A.N. KOLMOGOROV

ELÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ET DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE

A. KOLMOGOROV, S. FOMINE

Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle

ÉDITIONS MIR·MOSCOU

Préface à l'édition française

A la fin des années 40 un nouveau cours, nommé « Analyse III », a été inclus dans les programmes de la Faculté des mathématiques de l'Université d'Etat de Moscou. Il comportait des éléments de la théorie de la mesure et de la théorie des fonctions, les équations intégrales, la théorie des espaces de Banach et certaines autres questions. Ce cours que nous avons professé pendant plusieurs années se trouve à l'origine du présent ouvrage. Par la suite, le cours d'« Analyse III », apparu premièrement à l'Université de Moscou, a été inclus dans les programmes d'autres universités.

Tout en nous efforçant de donner dans cet ouvrage un exposé unique des questions générales de la théorie des ensembles, de la théorie de la mesure et de l'intégration, ainsi que des idées et des méthodes générales de l'analyse fonctionnelle, nous avons eu le souci d'accorder assez d'attention aux problèmes moins abstraits de l'analyse classique et même des mathématiques appliquées, où les questions citées plus haut trouvent leur application. Dans ses grandes lignes, le présent ouvrage correspond au programme du cours d'« Analyse III », adopté actuellement dans les universités soviétiques.

A côté d'autres questions, nous avons réservé une place importante à la théorie générale de la mesure. A cette occasion il faut signaler l'apparition récente d'un grand nombre d'ouvrages traitant de la théorie de l'intégration à partir du schéma de Daniel sans faire appel à la théorie de la mesure. A notre point de vue, la théorie de la mesure qui est largement utilisée dans la théorie ergodique, dans la théorie des processus aléatoires, etc., présente assez d'intérêt en elle-même, indépendamment du problème de l'introduction de la notion d'intégrale, pour être incluse dans un cours universitaire obligatoire.

Pour la compréhension du contenu de ce livre le lecteur doit connaître l'analyse mathématique élémentaire et les fondements de l'algèbre linéaire.

Lors de la traduction du livre en français le texte a été minutieusement revisé, les fautes d'impression et les défauts d'exposé remarqués ont été corrigés.

Une aide importante dans ce travail nous a été fournie par le rédacteur de l'édition française V. A. Medvedev que nous tenons à remercier.

Décembre 1973

A. KOLMOGOROV
S. FOMINE

Eléments de la théorie des ensembles

§ 1. Notion d'ensemble. Opérations sur les ensembles

1. Généralités. En mathématiques on rencontre des *ensembles* de nature très variée. Citons, par exemple, l'ensemble des faces d'un polyèdre, l'ensemble des points d'une droite, l'ensemble des entiers naturels, etc. La notion d'ensemble est tellement générale qu'il est difficile de lui donner une définition qui ne se ramènerait pas au remplacement du mot « ensemble » par un de ses synonymes: totalité, groupement, collection d'éléments, etc.

Le rôle que la notion d'ensemble joue dans les mathématiques modernes est déterminé non seulement par le fait que la théorie des ensembles est actuellement elle-même une discipline fort développée, mais surtout par l'influence que cette théorie, née à la fin du siècle passé, a exercé et continue à exercer sur toute la science mathématique. Nous n'avons pas l'intention de donner ici un exposé plus ou moins complet de la théorie des ensembles. Nous introduirons seulement les notations principales et définirons les notions les plus élémentaires, nécessaires pour la suite.

Les ensembles seront désignés par des lettres majuscules A, B, . . . et leurs éléments par des lettres minuscules a, b, . . . L'assertion « l'élément a appartient à l'ensemble A » s'écrit symboliquement: $a \in A$ ou $A \ni a$; l'écriture $a \notin A$ (ou $A \not\ni a$) signifie que l'élément a n'appartient pas à A. Si tous les éléments de l'ensemble A appartiennent également à l'ensemble B (le cas $A = B$ n'étant pas exclu), on dit que A est un *sous-ensemble* ou une *partie* de l'ensemble B et on écrit $A \subset B$. Par exemple, les nombres entiers constituent un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels.

Parfois on ne sait pas d'avance si tel ou tel ensemble (par exemple, l'ensemble des racines d'une équation) contient ou non au moins un élément. C'est pourquoi il est utile d'envisager des ensembles ne contenant aucun élément; un tel ensemble est appelé ensemble *vide* et noté par le symbole $\varnothing$. Tout ensemble contient $\varnothing$ comme sous-ensemble.

2. Opérations sur les ensembles. Soient A et B deux ensembles arbitraires; on appelle *réunion* ou *somme* de A et B l'ensemble $C = A \cup B$ des éléments qui appartiennent au moins à l'un des ensembles A et B (fig. 1).

On définit de manière analogue la réunion d'un nombre arbitraire (fini ou infini) d'ensembles: si A_α sont les ensembles donnés, leur réunion $\bigcup_\alpha A_\alpha$ est l'ensemble des éléments dont chacun appartient au moins à l'un des ensembles A_α.

On appelle *intersection* de deux ensembles A et B l'ensemble $C = A \cap B$ des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B (fig. 2). Par exemple, l'intersection de l'ensemble des entiers pairs

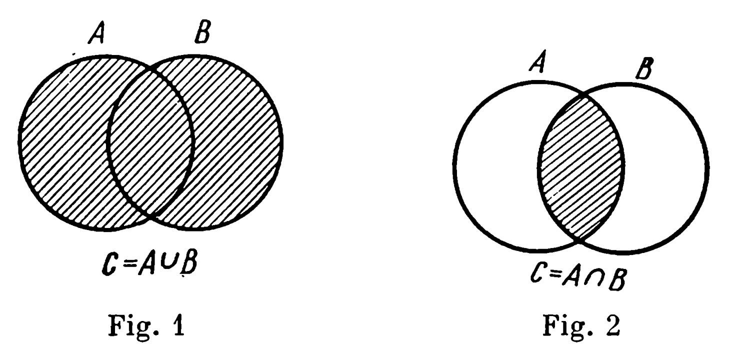


Fig. 1 Fig. 2

et de l'ensemble des entiers divisibles par 3 est l'ensemble des entiers divisibles par 6. L'intersection d'un nombre arbitraire (fini ou infini) d'ensembles A_α est par définition l'ensemble $\bigcap_\alpha A_\alpha$ des éléments appartenant à la fois à tous les ensembles A_α.

Par leur définition même, la réunion et l'intersection des ensembles sont des opérations commutatives et associatives, c'est-à-dire

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

En outre, chacune d'elles est distributive par rapport à l'autre:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1}$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{2}$$

En effet, démontrons, par exemple, la première de ces égalités [1]). Soit x un élément de l'ensemble qui se trouve au premier membre de l'égalité (1), c'est-à-dire $x \in (A \cup B) \cap C$. Cela signifie que x appartient à C et à l'un au moins des ensembles A et B. Mais alors x appartient au moins à l'un des ensembles $A \cap C$ et $B \cap C$, c'est-à-dire il appartient au second membre de l'égalité (1). Réciproquement, soit $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. On a alors $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$. Par conséquent, x appartient à C et à l'un au moins des ensembles A et B, c'est-à-dire $x \in C$ et $x \in A \cup B$, ce qui fait que $x \in (A \cup B) \cap C$. L'égalité (1) est démontrée. La démonstration de l'égalité (2) est analogue.

[1]) L'égalité de deux ensembles $A = B$ signifie que tout élément de A appartient à B, et vice versa. Autrement dit, l'égalité $A = B$ est équivalente aux deux inclusions simultanées $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définissons maintenant la soustraction des ensembles. On appelle *différence* de deux ensembles A et B l'ensemble $C = A \setminus B$ des éléments de A n'appartenant pas à B (fig. 3). En général, il n'est pas obligatoire que $A \supset B$. Au lieu de $A \setminus B$ on écrit parfois $A - B$.

Il est parfois commode (par exemple, dans la théorie de la mesure) de se servir de la *différence symétrique* de deux ensembles A et B qui est, par définition, la réunion des différences $A \setminus B$ et $B \setminus A$ (fig. 4).

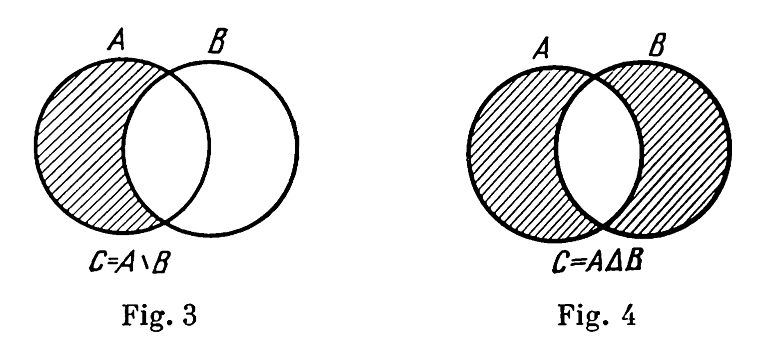


Fig. 3 Fig. 4

On désigne la différence symétrique des ensembles A et B par $A \triangle B$. Ainsi donc, par définition,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

E x e r c i c e. Montrer que

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

On est amené souvent à considérer des ensembles qui sont tous des parties d'un même ensemble S (*référentiel*). C'est le cas, par exemple, des ensembles dont les éléments sont des points de la droite numérique. Dans ce cas, la différence $S \setminus A$ s'appelle *complémentaire* de l'ensemble A et se note CA ou A'.

Dans la théorie des ensembles et ses applications on recourt souvent à un principe très important, nommé p r i n c i p e d e d u a l i t é et fondé sur les deux relations suivantes:

1. *Le complémentaire de la réunion est égal à l'intersection des complémentaires*:

$$S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha). \tag{3}$$

2. *Le complémentaire de l'intersection est égal à la réunion des complémentaires*:

$$S \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (S \setminus A_\alpha). \tag{4}$$

Le principe de dualité consiste en ceci: de toute égalité portant sur des parties de l'ensemble de référence S on peut obtenir t o u t à f a i t a u t o m a t i q u e m e n t une autre égalité, dite duale de la première, en remplaçant tous les ensembles considérés par

leurs complémentaires, les réunions par des intersections et les intersections par des réunions. Un exemple d'application de ce principe est fourni au § 2, chap. II, par la déduction du théorème 3′ à partir du théorème 3.

Démontrons la relation (3).

Soit $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. Cela signifie que x n'appartient pas à la réunion $\bigcup_\alpha A_\alpha$ et donc n'appartient à aucun des ensembles A_α. Par conséquent, x appartient à tous les complémentaires $S \setminus A_\alpha$ et donc $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. Réciproquement, supposons que $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$, c'est-à-dire que x appartienne à chacun des ensembles $S \setminus A_\alpha$; alors x n'appartient à aucun des ensembles A_α, c'est-à-dire n'appartient pas à leur réunion $\bigcup_\alpha A_\alpha$ et donc $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. L'égalité (3) est démontrée. La relation (4) se démontre de façon analogue. (Faites cette démonstration.)

Le terme « différence symétrique », introduit pour désigner l'opération $A \triangle B$, n'est pas tout à fait réussi; cette opération est, sous beaucoup de rapports, analogue à la réunion de deux ensembles $A \cup B$. En effet, l'expression $A \cup B$ signifie que les deux assertions: « l'élément appartient à A » et « l'élément appartient à B » sont liées par le « ou » inclusif, tandis que l'expression $A \triangle B$ signifie que les mêmes deux assertions sont liées par le «ou » exclusif: l'élément x appartient à $A \triangle B$ si et seulement s'il appartient ou *seulement* à A, ou *seulement* à B. L'ensemble $A \triangle B$ pourrait être appelé « réunion modulo deux » de A et B (on prend la réunion de ces deux ensembles, mais on rejette les éléments que l'on rencontre deux fois).

§ 2. Applications. Partition d'un ensemble

1. Application d'un ensemble dans un autre. Notion générale de fonction. En analyse on définit la notion de fonction de la manière suivante. Soit X un sous-ensemble quelconque de la droite numérique. On dit qu'on a défini sur cet ensemble une f o n c t i o n f, si à tout nombre $x \in X$ on a fait correspondre un nombre bien déterminé $y = f(x)$. L'ensemble X est appelé *domaine de définition* de la fonction f; l'ensemble Y de toutes les valeurs prises par cette fonction s'appelle *domaine de valeurs* de f.

Si au lieu des ensembles numériques on considère des ensembles de nature arbitraire, on est conduit à la notion la plus générale de fonction. Soient M et N deux ensembles quelconques. On dit qu'on a défini sur M une fonction f à valeurs dans N, si à tout élément x de M on a fait correspondre un élément y de N et un seul. Dans le cas des ensembles de nature arbitraire (y compris les ensembles numériques) au lieu du mot « fonction » on utilise souvent le mot « application » et on parle alors de l'application d'un ensemble dans un autre. En spécialisant la nature des ensembles M et N, on obtient divers types de fonctions qui portent des noms spéciaux,

comme « fonction vectorielle », «mesure », « fonctionnelle », « opérateur », etc. Il en sera question dans la suite.

Pour désigner une fonction (une application) de M dans N nous utiliserons souvent l'écriture $f\colon\ M \to N$.

Si a est un élément de M, on dit que l'élément $b = f(a)$ qui lui correspond dans N est son *image* par (ou dans) l'application f. L'ensemble de tous les éléments a de M ayant pour image l'élément donné b de N s'appelle image réciproque de b et se note $f^{-1}(b)$.

Soit A une partie de M; l'ensemble $\{f(a){:}a \in A\}$ de tous les éléments $f(a)$ tels que $a \in A$ s'appelle *image* de A et se note $f(A)$. Pour chaque partie B de N on définit à son tour l'image réciproque $f^{-1}(B)$: c'est l'ensemble de tous les éléments de M dont l'image appartient à B. Il peut arriver que dans M il n'existe aucun élément dont l'image par f soit un élément de B; dans ce cas l'ensemble $f^{-1}(B)$ est vide.

Nous nous bornerons ici à l'étude des propriétés les plus générales des applications.

Nous adoptons la terminologie suivante. On dit que f est une application de l'ensemble M « sur » l'ensemble N, si $f(M) = N$; une telle application s'appelle encore *surjection*. Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque $f(M) \subset N$, on dit que f est une application de M « dans » N.

Si pour n'importe quels deux éléments distincts x_1 et x_2 de M leurs images $y_1 = (x_1)$ et $y_2 = (x_2)$ sont aussi distinctes, l'application f est appelée *injection*.

On se propose d'établir les propriétés fondamentales des applications.

Théorème 1. *L'image réciproque de la réunion de deux ensembles est égale à la réunion de leurs images réciproques*:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Démonstration. Soit x un élément de l'ensemble $f^{-1}(A \cup B)$. Cela signifie que $f(x) \in A \cup B$, c'est-à-dire que $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. Mais alors x appartient au moins à l'un des ensembles $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Réciproquement, si x appartient à $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, il appartient alors au moins à l'un des ensembles $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$; cela signifie que $f(x)$ appartient au moins à l'un des ensembles A et B et donc $f(x) \in A \cup B$, d'où il résulte que $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Théorème 2. *L'image réciproque de l'intersection de deux ensembles est égale à l'intersection de leurs images réciproques*:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

D é m o n s t r a t i o n. Si $x \in f^{-1}(A \cap B)$, on a $f(x) \in A \cap B$, c'est-à-dire

$$f(x) \in A \quad \text{et} \quad f(x) \in B,$$

mais alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Réciproquement, si $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, on a $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$. Par conséquent, $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, c'est-à-dire $f(x) \in A \cap B$, d'où l'on déduit que $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Les théorèmes 1 et 2 restent valables pour la réunion et l'intersection d'un nombre arbitraire (fini ou infini) d'ensembles. Il en est de même du théorème suivant.

T h é o r è m e 3. *L'image de la réunion de deux ensembles est égale à la réunion de leurs images*:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

D é m o n s t r a t i o n. Si $y \in f(A \cup B)$, cela signifie que $y = f(x)$, où x est un élément qui appartient au moins à l'un des ensembles A et B. Par conséquent, $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Réciproquement, si $y \in f(A) \cup f(B)$, on a $y = f(x)$, où x appartient au moins à l'un des ensembles A et B, c'est-à-dire $x \in A \cup B$ et donc $y = f(x) \in (A \cup B)$.

Remarquons que *l'image de l'intersection de deux ensembles ne coïncide pas, en général, avec l'intersection de leurs images.* Par exemple, si l'application considérée est la projection du plan sur l'axe x, les segments

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 0,$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 1.$$

n'ont aucun point commun, tandis que leurs images coïncident.

E x e r c i c e. Démontrer que l'image réciproque du complémentaire d'un ensemble est égale au complémentaire de son image réciproque. La proposition analogue est-elle aussi vraie pour l'image du complémentaire?

2. Partition d'un ensemble. Relation d'équivalence. Dans les questions les plus diverses on a affaire au partage de tel ou tel ensemble en parties deux à deux disjointes. Par exemple, le plan (considéré comme ensemble de points) peut être décomposé en droites parallèles à l'axe x, l'espace à trois dimensions peut être considéré comme la réunion des sphères concentriques de différents rayons r (y compris $r = 0$), les habitants d'une ville peuvent être partagés en groupes suivant l'année de naissance de chacun, etc.

Chaque fois qu'un ensemble M est représenté d'une manière quelconque sous forme d'une réunion de sous-ensembles deux à deux disjoints de M, nous dirons que l'ensemble M est *partagé en classes* ou qu'on a une *partition de l'ensemble M (en classes)*.

D'habitude, on a affaire à des partitions qui sont obtenues à l'aide d'un critère, suivant lequel les éléments de l'ensemble M sont partagés en classes. Par exemple, l'ensemble des triangles du plan peut être partagé en classes de triangles égaux ou en classes de triangles de même aire, l'ensemble des fonctions d'une variable x peut être partagé en classes, en réunissant dans une même classe les fonctions qui prennent la même valeur en un point donné, etc.

Les critères, suivant lesquels on partage les éléments d'un ensemble en classes, peuvent être de nature très variée. Tout de même ils ne sont pas entièrement arbitraires. Supposons, par exemple, que l'on veuille partager l'ensemble des nombres réels en classes, de façon qu'un nombre b soit rapporté à la même classe que le nombre a si, et seulement si, $b > a$. Il est clair qu'une telle partition de l'ensemble des réels est impossible, car si $b > a$, b doit être mis dans la même classe que a, mais d'autre part, étant donné que $a < b$, *a ne peut pas* se trouver dans la même classe que b. De plus, comme a n'est pas plus grand que a, *il ne peut pas se trouver* dans la même classe que lui-même! Un autre exemple. Essayons de définir une partition de l'ensemble des points du plan, de façon que deux points a et b appartiennent à une même classe si, et seulement si, la distance de a à b est inférieure à 1. Il est clair que cela est impossible, car si la distance de a à b est inférieure à 1 et la distance de b à c est inférieure à 1, cela n'implique nullement que la distance de a à c est aussi inférieure à 1. Donc, si l'on met a dans la même classe que b et b dans la même classe que c, il peut arriver que deux points, dont la distance est supérieure à 1, se trouvent dans la même classe.

Les exemples cités ci-dessus nous indiquent les conditions qui doivent être satisfaites pour que tel ou tel critère permette effectivement de partager les éléments d'un ensemble en classes.

Soit M un ensemble. Supposons que certains couples d'éléments (a, b) de cet ensemble soient « marqués » [1]). Si (a, b) est un couple « marqué », nous dirons que l'élément a est lié à l'élément b par la relation φ et écrirons: $a \underset{\varphi}{\sim} b$. Par exemple, s'il s'agit de la partition de l'ensemble des triangles du plan en classes de triangles de même aire, l'écriture $a \underset{\varphi}{\sim} b$ signifie: « le triangle a a la même aire que le triangle b ». On dit que la relation φ est une *relation d'équivalence*, lorsqu'elle possède les propriétés suivantes:

1. Réflexivité: $a \underset{\varphi}{\sim} b$, quel que soit l'élément $a \in M$.

2. Symétrie: si $a \underset{\varphi}{\sim} b$, alors $b \underset{\varphi}{\sim} a$.

3. Transitivité: si $a \underset{\varphi}{\sim} b$ et $b \underset{\varphi}{\sim} c$, alors $a \underset{\varphi}{\sim} c$.

---

[1]) Les éléments a et b sont pris dans l'ordre, c'est-à-dire (a, b) et (b, a) sont considérés, en général, comme deux couples différents.

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la relation φ (le critère!) permette de partager l'ensemble M en classes. En effet, toute partition de l'ensemble M définit une relation d'équivalence entre ses éléments. En effet, si $a \underset{\varphi}{\sim} b$ signifie: « a appartient à la même classe que b », la relation φ est réflexive, symétrique et transitive, ce qui est facile à vérifier.

Réciproquement, soit φ une relation d'équivalence définie dans M et soit K_a la classe des éléments $x \in M$ équivalents à l'élément donné a: $x \underset{\varphi}{\sim} a$. En vertu de la réflexivité, l'élément a appartient lui-même à la classe K_a. Montrons que deux classes K_a et K_b sont soit confondues, soit disjointes. En effet, soit c un élément appartenant à la fois à K_a et à K_b, c'est-à-dire tel que $c \underset{\varphi}{\sim} a$ et $c \underset{\varphi}{\sim} b$. Alors, par symétrie $a \underset{\varphi}{\sim} c$ et par transitivité

$$a \underset{\varphi}{\sim} b. \qquad (1)$$

Si maintenant x est un élément quelconque de K_a, c'est-à-dire si $x \underset{\varphi}{\sim} a$, en vertu de (1) et de la transitivité on a $x \underset{\varphi}{\sim} b$, ce qui signifie que $x \in K_b$.

On démontre de la même façon que tout élément y de K_b appartient à K_a. Donc, si deux classes K_a et K_b ont au moins un élément commun, elles sont confondues. On obtient ainsi une partition de l'ensemble M en classes, définie par la relation d'équivalence donnée.

La notion de partition d'un ensemble en classes est en rapport direct avec la notion d'application, introduite au numéro précédent.

Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B. Lorsqu'on réunit dans la même classe tous les éléments de A qui ont la même image dans B, on obtient évidemment une partition de l'ensemble A. Réciproquement, considérons un ensemble quelconque A et une partition de cet ensemble en classes. Soit B l'ensemble de ces classes. En faisant correspondre à tout élément $a \in A$ la classe (c'est-à-dire l'élément de B) à laquelle il appartient, on obtient une application de l'ensemble A sur l'ensemble B.

Exemples 1. Projetons le plan xy sur l'axe x. Les images réciproques des points de l'axe x sont alors des droites verticales. Par conséquent, à l'application considérée correspond une partition du plan en droites parallèles.

2. Partageons les points de l'espace à trois dimensions en classes, en rapportant à la même classe les points équidistants de l'origine. Chaque classe est alors une sphère d'un certain rayon. L'ensemble de toutes ces classes peut être identifié à l'ensemble des points situés sur le demi-axe $[0, \infty)$. Donc, la partition de l'espace

à trois dimensions en sphères concentriques définit une application de cet espace sur une demi-droite.

3. Rapportons à une même classe tous les nombres réels ayant la même partie décimale. La partition que l'on obtient définit une application de la droite sur une circonférence de longueur 1.

La relation d'équivalence est un cas particulier de la notion plus générale de relation binaire. Soit M un ensemble quelconque. Notons par $M \times M$ ou M^2 l'ensemble de tous les couples ordonnés (a, b) avec $a, b \in M$. On dit que dans M on a défini une *relation binaire* φ, si on a choisi dans M^2 un sous-ensemble arbitraire R_φ. Plus précisément, nous dirons que l'élément a est lié à l'élément b par la relation binaire φ et écrirons $a\varphi b$ si et seulement si le couple (a, b) appartient à R_φ. Comme exemple de relation binaire on peut considérer la relation d'identité ε, définie de la manière suivante : on a $a\varepsilon b$ si et seulement si $a = b$; autrement dit, c'est la relation binaire définie par la diagonale Δ de $M \times M$, c'est-à-dire par l'ensemble des couples de la forme (a, a). Il est clair que toute relation d'équivalence φ, définie dans un ensemble M, est une relation binaire qui vérifie les conditions suivantes :

1) La diagonale Δ de M^2 appartient à R_φ (réflexivité).

2) Si $(a, b) \in R_\varphi$, alors $(b, a) \in R_\varphi$ (symétrie).

3) Si $(a, b) \in R_\varphi$ et $(b, c) \in R_\varphi$, alors $(a, c) \in R_\varphi$ (transitivité).

Ainsi donc, la relation d'équivalence est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Nous verrons au § 4 un autre cas particulier important de la relation binaire : la relation d'ordre.

§ 3. Ensembles équipotents. Puissance d'un ensemble

1. Ensembles finis et infinis. En considérant toute sorte d'ensembles, on remarquera qu'il est parfois possible de déterminer, sinon pratiquement, du moins en principe, le nombre d'éléments de l'ensemble donné. C'est le cas, par exemple, de l'ensemble des sommets d'un polyèdre, de l'ensemble des nombres premiers inférieurs à un nombre donné, de l'ensemble des molécules d'eau sur la Terre, etc. Chacun de ces ensembles contient un nombre fini d'éléments, bien que ce nombre puisse être inconnu. D'autre part, il existe des ensembles dont le nombre d'éléments est infini. Comme exemples on peut citer l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des points d'une droite, l'ensemble des cercles du plan, l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels, etc. Lorsqu'on dit qu'un ensemble est infini, cela signifie qu'on peut extraire de cet ensemble un élément, puis un autre, etc. et qu'après chaque extraction il reste encore des éléments dans cet ensemble.

Si deux ensembles sont finis, on peut les comparer et voir s'ils ont le même nombre d'éléments ou si l'un contient plus d'éléments que l'autre. La question suivante se pose : une comparaison pareille est-elle possible pour des ensembles infinis ? Autrement dit, est-il sensé de demander, par exemple, s'il y a plus de cercles sur le plan que de points rationnels sur la droite numérique, ou s'il y a autant de fonctions définies sur le segment [0, 1] que de droites dans l'espace, etc. ?

Voyons, comment on s'y prend pour comparer deux ensembles finis. On peut, par exemple, compter les éléments de chacun et comparer ensuite les nombres obtenus. Mais on peut procéder autrement : essayer d'établir une *bijection*, c'est-à-dire une correspondance biunivoque, entre les éléments de ces ensembles, autrement dit, une correspondance telle qu'à chaque élément d'un ensemble corresponde un élément et un seul de l'autre ensemble, et vice versa. Il est clair qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les éléments de deux ensembles finis si et seulement si les deux ensembles contiennent le même nombre d'éléments. Par exemple, pour vérifier si le nombre d'étudiants d'un groupe est le même que le nombre de chaises d'une salle de conférences, au lieu de compter les uns et les autres, on peut faire asseoir chaque étudiant sur une chaise. S'il se trouve que tous les étudiants sont assis et aucune chaise ne reste inoccupée, c'est-à-dire si on a établi une bijection entre ces deux ensembles, c'est qu'ils ont le même nombre d'éléments.

Notons maintenant que si le premier procédé (le comptage des éléments) n'est valable que pour les ensembles finis, le second (l'établissement d'une correspondance biunivoque) est valable pour les ensembles finis aussi bien que pour les ensembles infinis.

2. Ensembles dénombrables. Le plus simple de tous les ensembles infinis est l'ensemble des entiers naturels. On appelle *ensemble dénombrable* tout ensemble dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque avec les entiers naturels. En d'autres termes, un ensemble dénombrable est un ensemble dont les éléments peuvent être numérotés et disposés sous forme d'une suite infinie : $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Considérons quelques exemples d'ensembles dénombrables.

1. *L'ensemble des entiers relatifs.* On établit une bijection entre l'ensemble des entiers relatifs et l'ensemble des entiers naturels selon le schéma suivant :

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \ldots, \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{matrix}$$

c'est-à-dire à tout entier positif ou nul $n \geqslant 0$ on fait correspondre le naturel impair $2n + 1$ et à tout entier négatif $n < 0$ on fait

correspondre le naturel pair $2\,|n|$:

$$n \leftrightarrow 2n + 1 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0,$$
$$n \leftrightarrow 2\,|n| \quad \text{pour} \quad n < 0.$$

2. *L'ensemble des entiers positifs pairs.* La bijection est évidente $n \leftrightarrow 2n$.

3. *L'ensemble* 2, 4, 8, . . ., 2^n, . . . *des puissances du nombre* 2. La bijection entre cet ensemble et l'ensemble des entiers naturels est également évidente: $2^n \leftrightarrow 2$.

4. Considérons en exemple plus compliqué: montrons que l'*ensemble des nombres rationnels* est dénombrable. Tout nombre rationnel peut être représenté de façon unique sous forme d'une fraction irréductible $\alpha = \frac{q}{p}$ avec $q > 0$. Nous appellerons *hauteur* du nombre rationnel α la somme $|p| + q$. Il est clair que les fractions de hauteur donnée n sont en nombre fini. Par exemple, la hauteur 1 ne peut être atteinte que par le nombre $\frac{0}{1}$, la hauteur 2 par les nombres $\frac{1}{1}$ et $-\frac{1}{1}$, la hauteur 3 par les nombres $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{1}$ et $-\frac{1}{2}$, etc. Numérotons les nombres rationnels dans l'ordre de croissance de la hauteur, c'est-à-dire d'abord les nombres de hauteur 1, puis les nombres de hauteur 2, et ainsi de suite. Comme tout nombre rationnel se trouve alors muni d'un numéro, on obtient une correspondance biunivoque entre l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des entiers naturels.

On établit ici quelques propriétés générales des ensembles dénombrables.

1. *Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient A un ensemble dénombrable et B un sous-ensemble de A. Numérotons les éléments de A : a_1, a_2, . . ., a_n, . . . Soient a_{n_1}, a_{n_2}, . . . ceux des éléments ci-dessus qui appartiennent à B. Si parmi les nombres n_1, n_2, . . . il existe un plus grand, l'ensemble B est fini, sinon il est dénombrable, puisque ses éléments sont numérotés à l'aide des nombres 1, 2, . . .

2. *Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient A_1, A_2, . . . des ensembles dénombrables. On peut toujours considérer ces ensembles comme étant deux à deux disjoints, car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait considérer à leur place les ensembles A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, . . . dont chacun est fini ou dénombrable et dont la réunion est la même que celle de A_1, A_2, . . . Les éléments des ensembles A_1, A_2, . . .

deuvent être disposés sous la forme du tableau infini suivant :

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12}a_{13}a_{14}\ \ldots \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ \ldots \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ \ldots \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

où la première ligne représente la suite des éléments de A_1, la deuxième ligne, la suite des éléments de A_2, etc. Numérotons maintenant tous ces éléments « en diagonale », c'est-à-dire de façon que a_{11} soit le premier élément, a_{12} le deuxième, a_{21} le troisième, et ainsi de suite, dans l'ordre indiqué par les flèches du tableau ci-après :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \rightarrow a_{12} & & a_{13} \rightarrow a_{14} & & \ldots \\ \swarrow & \nearrow & \swarrow & & \\ a_{21} \quad a_{22} & & a_{23} \quad a_{24} & & \ldots \\ \downarrow \ \nearrow & \swarrow & & & \\ a_{31} \quad a_{32} & & a_{33} \quad a_{34} & & \ldots \\ \swarrow & & & & \\ a_{41} \quad a_{42} & & a_{43} \quad a_{44} & & \ldots \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & \end{array}$$

Il est clair que de cette façon chaque élément de chacun des ensembles considérés sera muni d'un numéro bien déterminé ; on aura donc une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les éléments de A_1, A_2, . . . et l'ensemble des entiers naturels, ce qu'il fallait démontrer.

E x e r c i c e s. 1. Démontrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.

2. Un nombre ξ est dit *algébrique*, s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

3. Démontrer que l'ensemble des intervalles rationnels (c'est-à-dire des intervalles à extrémités rationnelles) de la droite numérique est dénombrable.

4. Démontrer que l'ensemble de tous les points du plan ayant des coordonnées rationnelles est dénombrable.

Indication. Appliquer la propriété 2.

3. *Tout ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit M un ensemble infini. Choisissons dans M un élément quelconque a_1. Comme M est infini, on peut trouver dans M un élément a_2, différent de a_1, puis un élément a_3 différent de a_1 et a_2, etc. En continuant indéfiniment ce processus (qui ne peut pas s'arrêter par « insuffisance » d'éléments, M étant un ensemble infini), on obtient un sous-ensemble dénombrable

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

de l'ensemble M, ce qu'il fallait démontrer.

Cette proposition montre que les ensembles dénombrables sont « les plus petits » des ensembles infinis. Nous verrons plus bas qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables.

3. Ensembles équipotents. En comparant différents ensembles infinis avec la suite des nombres naturels, on a été conduit à la notion d'ensemble dénombrable. Mais un ensemble donné peut être comparé non seulement avec l'ensemble des entiers naturels; l'établissement d'une correspondance biunivoque (d'une bijection) permet de comparer n'importe quels deux ensembles. Introduisons la définition suivante.

Définition. Deux ensembles M et N sont dits *équipotents* (notation: $M \sim N$), s'il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre leurs éléments.

La notion d'équipotence est applicable aussi bien aux ensembles finis, qu'aux ensembles infinis. Deux ensembles finis sont équipotents, si (et seulement si) ils ont le même nombre d'éléments. La

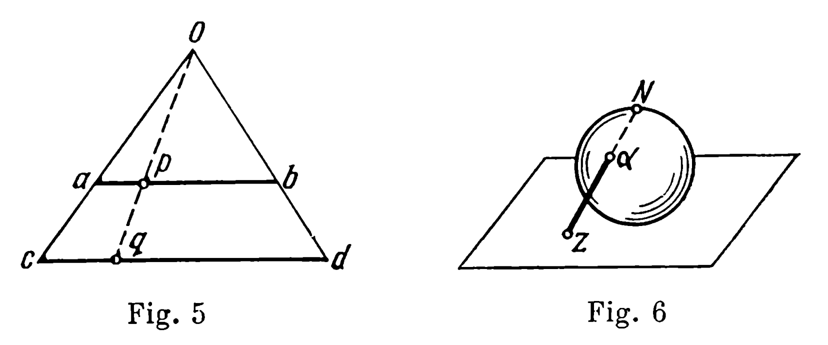


Fig. 5 Fig. 6

définition d'un ensemble dénombrable peut être formulée maintenant de la manière suivante: *un ensemble est appelé dénombrable, s'il est équipotent à l'ensemble des entiers naturels.*

Il est clair que deux ensembles équipotents à un troisième sont équipotents entre eux; en particulier, n'importe quels deux ensembles dénombrables sont équipotents entre eux.

Exemples. 1. Deux segments arbitraires $[a, b]$ et $[c, d]$, considérés comme ensembles de points, sont équipotents. Sur la figure 5 il est indiqué, comment établir une bijection entre ces deux ensembles: deux points p et q correspondent l'un à l'autre, s'ils sont situés sur la même droite passant par le point O, intersection des droites ac et bd.

2. L'ensemble des points du plan complexe achevé est équipotent à l'ensemble des points d'une sphère. La bijection $\alpha \leftrightarrow z$ peut être établie à l'aide de la projection stéréographique (fig. 6).

3. L'ensemble des nombres réels de l'intervalle (0,1) est équipotent à l'ensemble des points d'une droite. Une correspondance biunivoque peut être établie, par exemple, à l'aide de la fonction

$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

En examinant les exemples ci-dessus et ceux du n°2, on remarquera qu'un ensemble infini peut être équipotent à certaines de ses parties. Par exemple, il a y « autant » de nombres naturels que des nombres entiers et même « autant » que des nombres rationnels; dans l'intervalle (0,1) il y a « autant » de points que sur toute la droite, etc. C'est une propriété caractéristique des ensembles infinis. En effet, au n°2 (propriété 3) on a montré que de tout ensemble infini M on peut extraire un sous-ensemble dénombrable; soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ un tel sous-ensemble.

Partageons A en deux sous-ensembles dénombrables:

$$A_1 = \{a_1, a_3, a_5, \ldots\} \quad \text{et} \quad A_2 = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\}$$

et établissons une correspondance biunivoque entre A et A_1. Cette correspondance peut être ensuite prolongée jusqu'à une bijection entre les ensembles $A \cup (M \setminus A) = M$ et $A_1 \cup (M \setminus A) = M \setminus A_2$, en faisant correspondre à tout élément de $M \setminus A$ cet élément luimême. Cependant l'ensemble $M \setminus A_2$ n'est pas confondu avec M, c'est-à-dire il est un sous-ensemble propre de M. On a démontré donc la proposition suivante:

Tout ensemble infini possède au moins un sous-ensemble propre qui lui est équipotent.

Cette propriété peut être adoptée comme définition d'un ensemble infini.

E x e r c i c e. Démontrer que si M est un ensemble infini quelconque et A un ensemble dénombrable, on a $M \sim M \cup A$.

4. Non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels. Au n° 2 nous avons vu quelques exemples d'ensembles dénombrables. Le nombre de ces exemples pourrait être augmenté. D'autre part, comme nous l'avons déjà montré, la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est aussi un ensemble dénombrable.

Il est donc naturel de se demander: existe-t-il effectivement des ensembles non dénombrables? Le théorème suivant répond affirmativement à cette question.

T h é o r è m e 1. *L'ensemble des nombres réels, compris entre* 0 *et* 1, *est non dénombrable.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit un ensemble dénombrable quelconque de nombres réels α appartenant au segment [0, 1]:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 0,\ a_{11}a_{12}a_{13}\ \ldots a_{1n}\ \ldots, \\ \alpha_2 = 0,\ a_{21}a_{22}a_{23}\ \ldots a_{2n}\ \ldots, \\ \alpha_3 = 0,\ a_{31}a_{32}a_{33}\ \ldots a_{3n}\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = 0,\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ici a_{ik} désigne le k-ième chiffre décimal du nombre α_i. Construisons un nombre décimal

$$\beta = 0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

par le procédé diagonal de Cantor, plus précisément, de façon que b_1 soit un chiffre arbitraire différent de a_{11}, b_2 un chiffre arbitraire différent de a_{22}, etc. ; d'une façon générale, b_n doit être un chiffre arbitraire différent de a_{nn}. Le nombre β ainsi construit ne peut pas appartenir à la suite (1). En effet, il diffère de α_1 au moins par le premier chiffre décimal, de α_2 par le deuxième chiffre décimal, etc. ; d'une façon générale, puisque $b_n \neq a_{nn}$ pour tous les n, β est différent de tous les nombres α_i de la suite (1). Par suite, aucun ensemble dénombrable de nombres réels, appartenant au segment [0, 1], ne peut épuiser ce segment.

Dans cette démonstration il y a une petite « erreur ». Le fait est que certains nombres $\left(\text{à savoir, les nombres de la forme } \frac{p}{10^q}\right)$ peuvent avoir deux développements décimaux différents: avec 0 en période ou avec 9 en période; par exemple,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5000 \ldots = 0{,}4999 \ldots$$

Donc, si deux nombres sont représentés par des développements décimaux distincts, cela ne prouve pas qu'ils sont inégaux.

Tout de même, lorsqu'on construit le nombre β avec plus de prudence, en évitant les chiffres 0 et 9, par exemple, en posant $b_n = 2$ pour $a_{nn} = 1$ et $b_n = 1$ pour $a_{nn} \neq 1$, la démonstration est correcte.

Exercice. Montrer que les nombres possédant deux développements décimaux distincts forment un ensemble dénombrable.

Ainsi donc, le egment [0, 1] nous fournit un exemple d'ensemble non dénombrable. Citons quelques exemples d'ensembles équipotents au segment [0, 1].

1. L'ensemble des points de tout segment $[a, b]$ ou intervalle (a, b).
2. L'ensemble des points d'une droite.
3. L'ensemble des points du plan, de l'espace, d'une sphère, de l'intérieur d'une sphère, etc.
4. L'ensemble des droites du plan.
5. L'ensemble des fonctions continues d'une seule ou de plusieurs variables.

Dans les cas 1 et 2 la démonstration ne présente aucune difficulté (cf. exemples 1 et 3, n° 3). Dans les autres cas une démonstration *directe* serait assez compliquée.

Exercice. En utilisant les résultats de ce numéro et l'exercice 2 du n°2, démontrer l'existence des nombres *transcendants*, c'est-à-dire des nombres qui ne sont pas algébriques.

5. Théorème de Cantor-Bernstein. Le théorème suivant est l'un des plus importants de la théorie des ensembles.

Théorème 2 (de Cantor-Bernstein). *Soient A et B deux ensembles quelconques. S'il existe une application biunivoque f de l'ensemble A sur un sous-ensemble B_1 de B et une application biunivoque g de l'ensemble B sur un sous-ensemble A_1 de A, les ensembles A et B sont équipotents.*

Démonstration. Soit x un élément quelconque de A. Posons $x_0 = x$, et définissons par récurrence une famille d'éléments de la manière suivante. Supposons que x_n soit déjà défini. Lorsque n est pair on prend dans B l'élément x_{n+1} tel que $x_n = f(x_{n+1})$, et lorsque n est impair on prend dans A l'élément x_{n+1} tel que $x_n = g(x_{n+1})$, si un tel élément existe. Deux cas sont possibles.

1°. Pour un certain n il n'existe pas de x_{n+1} répondant à la condition posée. On appellera alors ordre de x ce nombre n.

2°. La suite des x_n est infinie. Dans ce cas, l'élément x sera dit d'ordre infini.

Partageons maintenant A en trois parties: A_E formée des éléments d'ordre pair, A_0 formée des éléments d'ordre impair et A_I des éléments d'ordre infini.

Après une partition analogue de l'ensemble B on remarquera que f applique A_E sur B_0 et A_I sur B_I et que g^{-1} applique A_0 sur B_E. Donc l'application ψ, coïncidant avec f sur $A_E \cup A_I$ et avec g^{-1} sur A_0, est une application biunivoque de tout l'ensemble A sur tout l'ensemble B.

Le théorème est donc démontré.

6. Notion de puissance d'un ensemble. Si deux ensembles finis sont équipotents, ils contiennent le même nombre d'éléments. Si deux ensembles équipotents M et N sont arbitraires, on dit que M et N ont la même *puissance*. Donc, la puissance d'un ensemble est ce qu'il y a de commun à cet ensemble et tout autre ensemble qui lui est équipotent. Pour les ensembles finis la notion de puissance coïncide avec la notion familière de nombre d'éléments de l'ensemble. On désigne la puissance de l'ensemble des entiers naturels (et donc de tout ensemble dénombrable) par le symbole $\aleph_0$ (se lit « aleph zéro »). Quant aux ensembles équipotents à l'ensemble des nombres réels du segment [0, 1], on dit qu'ils ont la *puissance du continu*. Cette puissance est désignée par c (ou par le symbole $\aleph$).

La question très importante concernant l'existence des puissances, comprises entre $\aleph_0$ et c, sera abordée plus bas, au § 4. Les ensembles que l'on rencontre en analyse ont d'ordinaire soit la puissance $\aleph_0$, soit la puissance c.

Pour les puissances des ensembles finis, c'est-à-dire pour les nombres naturels, outre la notion d'égalité, valable pour tous les ensembles, nous connaissons en plus les notions « plus grand »

et « plus petit ». Il s'agit maintenant d'étendre ces deux dernières notions aux ensembles infinis.

Soient A et B deux ensembles arbitraires. Désignons par $m(A)$ et $m(B)$ leurs puissances.

Formellement, quatre cas sont possibles:

1. A est équipotent à un sous-ensemble de B et B est équipotent à un sous-ensemble de A.

2. A possède un sous-ensemble équipotent à B, mais B ne possède aucun sous-ensemble équipotent à A.

3. B possède un sous-ensemble équipotent à A, mais A ne possède aucun sous-ensemble équipotent à B.

4. Aucun des deux ensembles ne possède de sous-ensemble équipotent à l'autre.

Dans le premier cas, en vertu du théorème de Cantor-Bernstein, les ensembles A et B sont équipotents, c'est-à-dire

$$m(A) = m(B).$$

Dans le deuxième cas il est naturel de convenir que $m(A) > m(B)$; dans le troisième cas on convient que $m(A) < m(B)$.

Dans le quatrième cas on devrait considérer les puissances de A et B comme incomparables. Mais en réalité ce cas est impossible! Ceci résulte du théorème de Zermelo dont il sera question au § 4. Ainsi donc, *quels que soient les ensembles* A *et* B, *on a soit* $m(A) = m(B)$ (*si les ensembles* A *et* B *sont équipotents*), *soit* $m(A) < m(B)$, *soit* $m(A) > m(B)$.

Nous avons remarqué plus haut que les ensembles dénombrables sont « les plus petits » parmi tous les ensembles infinis. Puis nous avons montré qu'il existe des ensembles infinis ayant « un degré d'infinité plus haut »; il s'agit des ensembles qui ont la puissance du continu. On se demande maintenant, s'il existe des puissances plus grandes que celle du continu. Ou, d'une façon plus générale, existe-t-il une puissance qui soit « la plus grande »? La réponse se trouve dans le théorème suivant.

Théorème 3. *Soit* M *un ensemble quelconque et soit* $\mathfrak{M}$ *l'ensemble ayant pour éléments tous les sous-ensembles de* M. *Alors l'ensemble* $\mathfrak{M}$ *a une puissance plus grande que celle de* M.

Démonstration. On voit facilement que la puissance $\mathfrak{m}$ de l'ensemble $\mathfrak{M}$ ne peut pas être inférieure à la puissance m de l'ensemble donné M; en effet, les singletons [1]) de M forment un sous-ensemble de $\mathfrak{M}$, équipotent à M. Il reste donc à démontrer que les puissances $\mathfrak{m}$ et m sont distinctes. Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments $a, b, \ldots$ de l'ensemble M et certains éléments $A, B, \ldots$ de l'ensemble $\mathfrak{M}$

[1]) On appelle ainsi tout ensemble qui comporte un seul élément.

(c'est-à-dire certains sous-ensembles de M):

$$a \leftrightarrow A, \quad b \leftrightarrow B, \quad \ldots$$

Montrons que cette correspondance n'épuise pas l'ensemble $\mathfrak{M}$. Pour cela, construisons un ensemble $X \subset M$ ne correspondant à aucun élément de M. Soit X l'ensemble des éléments de M n'appartenant pas aux sous-ensembles qui leur correspondent. D'une façon plus détaillée: si $a \leftrightarrow A$ et $a \in A$, alors a n'appartient pas à X; par contre, si $a \leftrightarrow A$ et $a \notin A$, alors a est considéré comme élément de X. Il est clair que X est un sous-ensemble de M et donc un élément de $\mathfrak{M}$. Montrons que X ne correspond à aucun élément de M. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un élément x de M, tel que $x \leftrightarrow X$. Voyons, si cet élément appartient ou non à X. Supposons que $x \notin X$; or, puisque, par hypothèse, X contient tout élément de M qui n'appartient pas au sous-ensemble qui lui correspond, alors $x \in X$. D'autre part, en supposant que $x \in X$, on doit en conclure que $x \notin X$, car X ne peut pas contenir un élément de M qui appartient au sous-ensemble qui lui correspond. Donc, l'élément x considéré doit à la fois appartenir et ne pas appartenir à X. On en déduit qu'un tel élément ne peut pas exister, ce qui prouve qu'il est impossible d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble M et tous ses sous-ensembles.

Le théoréme est démontré.

Quelle que soit la puissance d'un ensemble donné, nous pouvons donc construire un ensemble ayant une puissance plus grande, ensuite un autre dont la puissance soit encore plus grande, etc. Nous obtiendrons de cette façon une échelle de puissances, non bornée supérieurement.

R e m a r q u e. On désigne la puissance de l'ensemble $\mathfrak{M}$ par 2^m, où m est la puissance de M (le lecteur comprendra sans peine le sens de cette notation, en considérant le cas où M est un ensemble fini). Le théorème précédent peut être alors exprimé par l'inégalité: $m < 2^m$. En particulier, pour $m = \aleph_0$ on obtient l'inégalité $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Montrons que $2^{\aleph_0} = \aleph$, ou que la *puissance de l'ensemble des parties de la suite naturelle est égale à la puissance du continu.*

Partageons les sous-ensembles de la suite naturelle en deux classes, $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{S}$, en mettant dans $\mathfrak{P}$ ceux qui ont des complémentaires infinis et dans $\mathfrak{S}$ ceux qui ont des complémentaires finis. La classe $\mathfrak{S}$ contient, en particulier, la suite naturelle toute entière, car le complémentaire de celle-ci est vide. La classe $\mathfrak{S}$ est un ensemble dénombrable (démontrer!). Elle n'exerce aucune influence sur la puissance de l'ensemble $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{S}$.

On peut établir une correspondance biunivoque entre les sous-ensembles appartenant à la classe $\mathfrak{P}$ et les nombres réels α de l'intervalle $[0, 1)$.

En effet, faisons correspondre à tout sous-ensemble $A \in \mathfrak{P}$ le nombre réel α, $0 \leqslant \alpha < 1$, ayant le développement dyadique

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \ldots,$$

où ε_n est égal à 1 ou à 0, suivant que n appartient ou non à l'ensemble A. La vérification des détails est laissée au lecteur.

Exercice. Démontrer que l'ensemble des fonctions numériques (ou, plus généralement, l'ensemble des fonctions à valeurs dans un ensemble qui contient au moins deux éléments), définies sur un ensemble quelconque M, a une puissance supérieure à celle de M.

Indication. Utiliser le fait que l'ensemble des *fonctions caractéristiques* (c'est-à-dire des fonctions sur M qui ne prennent que deux valeurs : 0 et 1) est équipotent à l'ensemble des parties de M.

§ 4. Ensembles ordonnés. Nombres transfinis

Dans ce paragraphe on exposera certaines notions liées au concept d'ordre dans un ensemble. Nous nous bornerons ici aux renseignements les plus élémentaires ; pour un exposé plus détaillé on pourra se reporter aux ouvrages indiqués dans la bibliographie à la fin de ce livre.

1. Ensembles ordonnés. Soit M un ensemble quelconque et soit φ une relation binaire dans M (définie à l'aide d'un ensemble $R_\varphi \in M \times M$). On dit que φ est une *relation d'ordre*, si elle vérifie les conditions suivantes :

1) *réflexivité* $a\varphi a$,
2) *transitivité* : si $a\varphi b$ et $b\varphi c$, alors $a\varphi c$,
3) *antisymétrie* : si $a\varphi b$ et $b\varphi a$, alors $a = b$.

On convient de noter une relation d'ordre par le symbole $\leqslant$. L'écriture $a \leqslant b$ signifie donc que le couple (a, b) appartient à l'ensemble donné R_φ. Dans ce cas on dit que *a est inférieur ou égal* à b ou que *a précède b*. Tout ensemble muni d'une relation d'ordre s'appelle *ensemble ordonné*.

Considérons quelques exemples d'ensembles ordonnés.

1. Tout ensemble peut être considéré de façon triviale comme ordonné, en posant $a \leqslant b$ si et seulement si $a = b$. Autrement dit, on peut toujours prendre comme relation d'ordre dans un ensemble la relation binaire d'identité ε. Certainement, cet exemple ne présente pas un grand intérêt.

2. Soit M l'ensemble des fonctions continues sur un segment $[\alpha, \beta]$. En posant $f \leqslant g$ si et seulement si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tous les $t \in [\alpha, \beta]$, on obtient évidemment une relation d'ordre.

3. L'ensemble des parties d'un ensemble donné est ordonné par la relation d'inclusion : $M_1 \leqslant M_2$ signifie que $M_1 \subset M_2$.

4. L'ensemble des entiers naturels est ordonné, si $a \leqslant b$ signifie « a divise b ».

Soit M un ensemble ordonné quelconque. Lorsque $a \leqslant b$ et $a \neq b$, on utilise le symbole $<$, c'est-à-dire on écrit $a < b$, et on dit que *a est inférieur à b* ou que *a précède strictement b*. Au lieu de $a \leqslant b$ on utilise parfois l'écriture équivalente $b \geqslant a$ et on dit alors que *b est supérieur ou égal à a* (*b est supérieur à a*, si $b \neq a$) ou que *b suit a*. On dit que $a \in M$ est un *élément maximal* de M, si $a \leqslant b$ implique $b = a$. De manière analogue, a est dit *élément minimal* de M, si $c \leqslant a$ implique $c = a$.

Un ensemble ordonné dont n'importe quels deux éléments a et b possèdent un suivant c ($a \leqslant c$, $b \leqslant c$) s'appelle *ensemble filtrant à droite*.

2. Applications conservant l'ordre. Soient M et M' deux ensembles ordonnés et f une application de M dans M'. Nous dirons que l'application f conserve l'ordre, si $a \leqslant b$, où $a, b \in M$, implique $f(a) \leqslant f(b)$ (dans M') . On dit que f est un *isomorphisme* des ensembles ordonnés M et M', si elle est bijective et la relation $f(a) \leqslant f(b)$ est vérifiée *si et seulement si* $a \leqslant b$. Les ensembles M et M' sont dits alors *isomorphes*.

Soient, par exemple, M l'ensemble des entiers naturels, ordonné par la relation de divisibilité (cf. exemple 4, n° 1), et M' le même ensemble, ordonné de façon naturelle, c'est-à-dire de façon que $b \geqslant a$, si $b - a$ est un nombre positif. Alors, l'application de M sur M' qui fait correspondre tout entier naturel n à lui-même conserve l'ordre (mais n'est pas un isomorphisme).

La relation d'isomorphisme des ensembles ordonnés est évidemment une relation d'équivalence (elle est symétrique, transitive et réflexive). Par conséquent, lorsqu'on a une certaine quantité [1]) d'ensembles ordonnés, on peut toujours les partager en classes d'ensembles isomorphes. Il est clair que si ce n'est que l'ordre défini dans un ensemble qui nous intéresse et non la nature de ses éléments, alors deux ensembles ordonnés isomorphes peuvent être considérés comme identiques.

3. Types d'ordre. Ensembles totalement ordonnés. Lorsque deux ensembles ordonnés sont isomorphes, nous dirons qu'ils ont le même *type d'ordre*. Cela signifie que le type d'ordre c'est ce qu'il y a de commun aux ensembles ordonnés isomorphes de même que la puissance est ce qu'il y a de commun aux ensembles équipotents (indépendamment de la relation d'ordre dont chacun de ces ensembles est muni).

Soient a et b deux éléments d'un ensemble ordonné. Il se peut qu'aucune des relations $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ n'ait lieu. Dans ce cas on dit que les éléments a et b sont *incomparables*. Si dans un ensemble

---

[1]) Nous évitons les expressions dans le genre de « tous les ensembles ordonnés », car au fond elles sont, comme l'expression « l'ensemble de tous les ensembles », contradictoires et donc inadmissibles dans une théorie mathématique rigoureuse.

ordonné M il existe des éléments incomparables, c'est-à-dire si la relation d'ordre est définie seulement pour certains couples d'éléments de M, on dit que M est partiellement ordonné. Si, par contre, dans un ensemble ordonné M il n'y a pas d'éléments incomparables, on dit que M est un *ensemble totalement ordonné*. Autrement dit, un ensemble M est totalement ordonné, s'il est ordonné et si pour n'importe quels deux éléments distincts $a, b \in M$ on a nécessairement soit $a < b$, soit $b < a$.

Les ensembles indiqués dans les exemples 1-4, nº 1, ne sont que partiellement ordonnés. Les exemples les plus simples d'ensembles totalement ordonnés sont fournis par l'ensemble des nombres naturels, l'ensemble des nombres rationnels, l'ensemble des nombres réels du segment [0, 1], etc. (munis des relations naturelles « plus grand » et « plus petit », propres à ces ensembles).

Il est clair que tout sous-ensemble d'un ensemble totalement ordonné est lui-même un ensemble totalement ordonné.

Comme l'ordre total est un cas particulier de la notion d'ordre, on peut appliquer aux ensembles totalement ordonnés la notion d'application conservant l'ordre et, en particulier, la notion d'isomorphisme. On peut donc parler du type d'ordre d'un ensemble totalement ordonné.

La suite des nombres naturels 1, 2, 3, . . ., munie de la relation naturelle d'ordre, représente le plus simple exemple d'ensemble totalement ordonné infini. On désigne son type d'ordre par ω.

Si deux ensembles ordonnés sont isomorphes, ils ont certainement la même puissance (l'isomorphisme est une bijection). Donc, on peut parler de la puissance qui correspond au type d'ordre donné (par exemple, la puissance qui correspond au type ω est $\aleph_0$). La réciproque n'est pas vraie : un ensemble de puissance donnée peut être ordonné, en général, de beaucoup de manières différentes. Seulement dans le cas d'un ensemble totalement ordonné f i n i le type d'ordre est déterminé de façon unique par le nombre n des éléments de cet ensemble (on le désigne aussi par n). Mais déjà dans le cas de l'ensemble dénombrable des entiers naturels, outre le type « naturel » ω, on peut envisager, par exemple, le type :

$$1, 3, 5, \ldots, \quad 2, 4, 6, \ldots,$$

où tout nombre impair précède tous les nombres pairs, l'ensemble des nombres impairs et celui des nombres pairs, pris à part, étant ordonnés par croissance. On peut montrer que l'ensemble des types d'ordre distincts qui correspondent à la même puissance $\aleph_0$, est infini et même qu'il est non dénombrable.

4. Somme ordinale d'ensembles totalement ordonnés. Soient M_1 et M_2 deux ensembles totalement ordonnés disjoints dont les types d'ordre sont respectivement Θ_1 et Θ_2. Dans la réunion $M_1 \cup M_2$ on peut définir une relation d'ordre total, en considérant t o u t

élément de M_1 comme précédant tout élément de M_2, l'ordre dans M_1 et M_2 étant laissé inchangé (vérifier que c'est bien une relation d'ordre total!). L'ensemble totalement ordonné ainsi obtenu est appelé *somme ordinale* des ensembles M_1 et M_2 et noté $M_1 + M_2$. Il importe de souligner que l'ordre des termes ici n'est pas indifférent: la somme ordinale $M_2 + M_1$ n'est pas, en général, isomorphe à la somme ordinale $M_1 + M_2$.

Le type d'ordre de $M_1 + M_2$ est appelé *somme ordinale* des types Θ_1 et Θ_2 et noté $\Theta_1 + \Theta_2$.

Cette définition peut être facilement étendue à un nombre fini arbitraire de termes $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$.

Exemple. Considérons les types d'ordre ω et n. On voit immédiatement que $n + \omega = \omega$; en effet, lorsqu'on ajoute à la suite naturelle $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ un nombre fini de termes à sa gauche, on obtient le même type d'ordre ω. D'autre part, le type d'ordre $\omega + n$, c'est-à-dire le type d'ordre de l'ensemble

$$1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

n'est pas égal à ω.

5. Ensembles bien ordonnés. Nombres transfinis. Plus haut nous avons introduit la notion d'ordre, puis la notion d'ordre total. Introduisons maintenant la notion encore plus étroite, mais très importante, de bon ordre.

Définition. Un ensemble totalement ordonné M s'appelle *bien ordonné*, si tout sous-ensemble non vide de M possède un plus petit élément (c'est-à-dire un élément qui précède tous les éléments de ce sous-ensemble).

Lorsqu'un ensemble totalement ordonné est fini, il est évidemment bien ordonné. Un exemple d'ensemble totalement ordonné qui n'est pas bien ordonné est fourni par l'ensemble des nombres réels du segment [0,1]. Cet ensemble possède un plus petit élément: le nombre 0, mais son sous-ensemble formé par les nombres positifs n'a pas de plus petit élément.

Il est clair que *tout sous-ensemble* (*non vide*) *d'un ensemble bien ordonné est également bien ordonné.*

Le type d'ordre d'un ensemble bien ordonné s'appelle *nombre ordinal* (*nombre ordinal transfini ou simplement transfini*, si l'on veut souligner qu'il s'agit d'un ensemble infini).

La suite naturelle (munie de la relation naturelle d'ordre) est un ensemble non seulement totalement ordonné, mais encore bien ordonné. Par conséquent, son type d'ordre ω est un nombre ordinal (un transfini!). Le type d'ordre $\omega + k$ de l'ensemble

$$1, 2, \ldots, n, \quad a_1, a_2, \ldots, a_k$$

est également un nombre ordinal.

Par contre, l'ensemble

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1 \tag{1}$$

est totalement ordonné, mais non bien ordonné. Chaque sous-ensemble non vide de (1) possède un plus grand élément (c'est-à-dire un élément qui suit tous les autres), mais ne possède pas, en général, un plus petit élément (par exemple, l'ensemble (1) lui-même n'a pas de plus petit élément). On convient de désigner le type d'ordre de l'ensemble (1) (qui n'est pas un nombre ordinal!) par le symbole ω^*.

Démontrons la proposition simple, mais importante, qui suit.

Lemme 1. *La somme ordinale d'un nombre fini d'ensembles bien ordonnés est un ensemble bien ordonné.*

En effet, soit M un sous-ensemble quelconque de la somme ordinale $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ de n ensembles bien ordonnés; soit M_k le premier de ces ensembles qui contient des éléments de M. L'intersection de M et M_k est un sous-ensemble (non vide) de l'ensemble bien ordonné M_k et possède donc un plus petit élément. Cet élément est aussi le plus petit dans M.

Corollaire. *La somme ordinale de plusieurs nombres ordinaux est un nombre ordinal.*

Ainsi donc, à partir d'une quantité donnée de nombres ordinaux, on peut construire de nouveaux nombres ordinaux. Par exemple, à partir des nombres naturels (c'est-à-dire des nombres ordinaux finis) et du nombre ordinal ω, on peut obtenir les nombres ordinaux

$$\omega + n, \quad \omega + \omega, \quad \omega + \omega + n, \quad \omega + \omega + \omega, \quad \text{etc.}$$

Le lecteur construira sans difficulté des ensembles bien ordonnés correspondant à ces transfinis.

Au n°4 nous avons introduit la notion de somme ordinale de types d'ordre. On peut introduire de même la notion de *produit ordinal*. Soient M_1 et M_2 deux ensembles totalement ordonnés ayant les types d'ordre Θ_1 et Θ_2. Prenons un, nombre suffisamment grand d'exemplaires de l'ensemble M_1, plus précisément, un pour chaque élément de M_2, et remplaçons les éléments de M_2 par ces exemplaires de M_1. L'ensemble ainsi obtenu est appelé produit ordinal de M_1 et M_2 et noté $M_1 \cdot M_2$. Formellement, $M_1 \cdot M_2$ représente l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in M_1$ et $b \in M_2$, ordonné de façon que $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$, si $b_1 < b_2$ (quels que soient a_1, a_2,) et $(a_1, b) < (a_2, b)$, si $a_1 < a_2$.

De manière analogue on définit le produit ordinal d'un nombre fini arbitraire de facteurs $M_1 M_2 \ldots M_p$. Le type d'ordre Θ du produit $M_1 \cdot M_2$ des ensembles totalement ordonnés M_1 et M_2 est appelé *produit ordinal des types d'ordre* Θ_1 et Θ_2:

$$\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2.$$

Le produit ordinal, de même que la somme ordinale, n'est pas commutatif.

Lemme 2. *Le produit ordinal de deux ensembles bien ordonnés est un ensemble bien ordonné.*

Démonstration. Soit M un sous-ensemble du produit $M_1 \cdot M_2$; M est un ensemble de couples (a, b). Considérons tous les seconds éléments b des couples appartenant à M. Ils forment un sous-ensemble de M_2. Comme M_2 est bien ordonné, ce sous-ensemble possède un plus petit élément. Notons-le par b_0 et considérons tous les couples de la forme (a, b_0) appartenant à M. Leurs premiers éléments a forment un sous-ensemble de M_1. Comme M_1 est bien ordonné, parmi ces éléments il existe un plus petit. Notons-le par a_0. Alors le couple (a_0, b_0), comme on le voit facilement, est le plus petit élément de M.

Corollaire. *Le produit ordinal de plusieurs nombres ordinaux est un nombre ordinal.*

Exemples. Il est aisé de voir que $\omega + \omega = \omega \cdot 2$, $\omega + \omega + \omega = \omega \cdot 3$. De même, il est facile de construire des ensembles bien ordonnés dont les types d'ordre soient $\omega \cdot n$, ω^2, $\omega^2 \cdot n$, $\omega^3, \ldots, \omega^p, \ldots$ Tous ces ensembles seront dénombrables.

On peut définir aussi d'autres opérations sur les types d'ordre, par exemple, l'élévation à une puissance, et considérer des nombres ordinaux comme ω^ω, ω^{ω^ω}, etc.

6. Comparaison des nombres ordinaux. Si n_1 et n_2 sont deux nombres ordinaux finis, on a toujours l'une des possibilités suivantes: ou ces deux nombres sont égaux, ou l'un d'eux est plus grand que l'autre. Etendons cette relation d'ordre au cas des nombres ordinaux transfinis.

Pour cela, introduisons les notions suivantes. Tout élément a d'un ensemble totalement ordonné M définit dans M une *section commençante* P (l'ensemble des éléments inférieurs à a) et une *section finissante* Q (l'ensemble des éléments supérieurs ou égaux à a).

Soient α et β deux nombres ordinaux et soient M et N deux ensembles de types d'ordre respectifs α et β. Nous dirons que: $\alpha = \beta$, si les ensembles M et N sont isomorphes, $\alpha < \beta$, si M est isomorphe à une section commençante de N, et $\alpha > \beta$, si, inversement, N est isomorphe à une section commençante de M.

Théorème 1. *Quels que soient les nombres ordinaux α et β, on a soit $\alpha = \beta$, soit $\alpha < \beta$, soit $\alpha > \beta$.*

Pour la démonstration on établira d'abord le lemme suivant.

Lemme 3. *Si f est une application isomorphe de l'ensemble bien ordonné A sur un sous-ensemble quelconque $B \subset A$,* on a $f(a) \geqslant a$ *pour tous les $a \in A$.*

En effet, s'il y a des éléments $a \in A$ tels que $f(a) < a$, il existe parmi eux un plus petit (en vertu du bon ordre!). Désignons cet élément par a_0 et posons $b_0 = f(a_0)$. Alors, $b_0 < a_0$ et, comme l'application f est isomorphe, on doit avoir $f(b_0) < f(a_0) = b_0$, ce qui est impossible, a_0 étant le plus petit des éléments qui possèdent la propriété indiquée.

De ce lemme il résulte immédiatement qu'un ensemble bien ordonné ne peut pas être isomorphe à sa section commençante. Si l'ensemble A était isomorphe à sa section commençante définie

par l'élément a, on aurait $f(a) < a$. Donc, on ne peut pas avoir à la fois

$$\alpha = \beta \quad \text{et} \quad \alpha < \beta.$$

Pour la même raison on ne peut pas avoir simultanément $\alpha = \beta$ et $\alpha > \beta$. Les relations

$$\alpha < \beta \quad \text{et} \quad \alpha > \beta$$

sont également incompatibles, sinon on aurait (par transitivité!) $\alpha < \alpha$, ce qui est impossible, ainsi qu'on vient de le voir. Nous avons montré donc que chacune des relations $\alpha \lesseqgtr \beta$ exclut les deux autres. Montrons à présent que l'une de ces relations a *toujours lieu*, c'est-à-dire que n'importe quels deux nombres ordinaux sont comparables.

Construisons d'abord pour chaque nombre ordinal α un ensemble $W(\alpha)$, lui servant de «représentant standardisé». Notamment, prenons pour $W(\alpha)$ l'ensemble des nombres ordinaux inférieurs à α.

Tous les nombres ordinaux qui font partie de $W(\alpha)$ sont deux à deux comparables et l'ensemble $W(\alpha)$ (ordonné selon les valeurs des nombres ordinaux) a le type d'ordre α. En effet, si l'ensemble

$$A = \{\ldots, a, \ldots, b, \ldots\}$$

a le type d'ordre α, par la définition même, les nombres ordinaux inférieurs à α se trouvent en correspondance biunivoque avec les sections commençantes de l'ensemble A et donc avec les éléments de cet ensemble. Autrement dit, les éléments d'un ensemble dont le type d'ordre est α peuvent être numérotés à l'aide des nombres ordinaux inférieurs à α:

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_\lambda, \ldots\}.$$

Soient maintenant α et β deux nombres ordinaux; alors les ensembles $A = W(\alpha)$ et $B = W(\beta)$ ont respectivement les types d'ordre α et β. Soit ensuite $C = A \cap B$ l'intersection des ensembles A et B, c'est-à-dire l'ensemble des nombres ordinaux inférieurs à α et à β à la fois. L'ensemble C est bien ordonné. Désignons son type d'ordre par γ et montrons que $\gamma \leqslant \alpha$. En effet, si $C = A$, on a $\gamma = \alpha$; par contre, si $C \neq A$, alors C est une section commençante de A et donc

$$\gamma < \alpha.$$

En effet, quels que soient $\xi \in C$ et $\eta \in A \setminus C$, les nombres ordinaux ξ et η sont comparables, c'est-à-dire on a $\xi \lessgtr \eta$. Or, la relation $\eta < \xi < \alpha$ est impossible, sinon on devrait avoir $\eta \in C$. Par conséquent, $\xi < \eta$, ce qui montre que C est une section commençante de A et donc $\gamma < \alpha$. En outre, γ est le plus petit élément de l'ensemble $A \setminus C$. On a donc $\gamma \leqslant \alpha$ et, par analogie, $\gamma \leqslant \beta$.

Notons encore que le cas $\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$ est impossible, sinon on devrait avoir

$$\gamma \in A \setminus C, \quad \gamma \in B \setminus C,$$

ce qui signifierait d'une part que $\gamma \notin C$ et d'autre part que $\gamma \in$ $\in A \cap B = C$. Par conséquent, on ne peut avoir que les cas suivants:

$$\begin{array}{lll} \gamma = \alpha, & \gamma = \beta, & \alpha = \beta, \\ \gamma = \alpha, & \gamma < \beta, & \alpha < \beta, \\ \gamma < \alpha, & \gamma = \beta, & \alpha > \beta, \end{array}$$

ce qui prouve que α et β sont comparables. Le théorème est donc complètement démontré.

Pour tout nombre ordinal il existe une puissance bien déterminée qui lui correspond et la comparabilité des nombres ordinaux entraîne, évidemment, la comparabilité des puissances correspondantes. En d'autres termes:

Si A et B sont deux ensembles bien ordonnés, alors ou bien ils sont équipotents, ou bien la puissance de l'un est plus grande que la puissance de l'autre (c'est-à-dire deux ensembles bien ordonnés ne peuvent pas avoir des puissances non comparables).

Considérons tous les nombres ordinaux qui correspondent à des puissances finies ou dénombrables. Ils forment un ensemble bien ordonné. On se convainc aussitôt que cet ensemble n'est pas dénombrable. En effet, conformément aux notations usuelles, désignons par ω_1 le type d'ordre de l'ensemble des transfinis dénombrables. Si la puissance qui lui correspond était dénombrable, il en serait de même de l'ensemble ayant le type d'ordre $\omega_1 + 1$. Cependant, il est évident que ω_1 suit tous les transfinis dont les puissances correspondantes sont finies ou dénombrables.

Désignons par le symbole $\aleph_1$ la puissance qui correspond au nombre ordinal transfini ω_1. On voit aisément qu'il n'existe aucune puissance m telle que

$$\aleph_0 < m < \aleph_1.$$

En effet, si une telle puissance m existait, l'ensemble $W(\omega_1)$ des nombres ordinaux transfinis qui précèdent ω_1 contiendrait un sous-ensemble de puissance m. Un tel sous-ensemble est bien ordonné et non dénombrable. Mais alors son type d'ordre α précéderait ω_1 et, en même temps, suivrait tous les transfinis dénombrables. Or, ceci serait en contradiction avec la définition de ω_1.

7. Axiome du choix, théorème de Zermelo et leurs équivalents. La comparabilité des ensembles bien ordonnés suivant leur puissance nous amène à poser la question suivante: est-il possible que tout ensemble soit rendu d'une manière quelconque bien ordonné? La réponse affirmative signifierait, en particulier, qu'il n'existe pas de puissances non comparables. Une telle réponse a été donnée par

Zermelo qui a démontré que *tout ensemble peut être rendu bien ordonné.* La démonstration de ce théorème (que nous ne reproduisons pas ici, cf. par exemple, [2]) est basée essentiellement sur la proposition que l'on appelle *axiome du choix* et qui consiste en ceci.

Soit A un ensemble d'indices α et supposons qu'à chaque indice α on ait fait correspondre un ensemble quelconque M_α. Alors l'axiome du choix affirme qu'*il est possible de définir sur A une fonction φ faisant correspondre à tout $\alpha \in A$ un élément m_α de l'ensemble correspondant M_α.* Autrement dit, on peut former un ensemble, en choisissant dans chaque M_α un élément et un seul.

La théorie des ensembles, telle qu'elle est traitée ici, remonte à Cantor et Zermelo et représente ce qu'on appelle la théorie « naïve » des ensembles. L'axiome du choix, appelé aussi axiome de Zermelo, apparut dans le cadre de cette théorie avec d'autres questions, comme l'hypothèse du continu, c'est-à-dire la question de savoir si la puissance du continu coïncide avec la première puissance non dénombrable $\aleph_1$; il donna lieu à de nombreuses discussions et fit apparaître une longue série de travaux sur la logique mathématique et les fondements des mathématiques. Notons, en particulier, la création des théories axiomatiques de Gödel-Bernays et Zermelo-Fraenkel. Dans les limites de ces théories on a établi la non-contradiction et l'indépendance de l'axiome du choix. Le lecteur pourra se reporter aux ouvrages spécialisés: A. Fraenkel, I. Bar-Hillel « Foundations of set theory », Amsterdam, 1958; P. J. Cohen « Set theory and the continuum hypothesis », New-York-Amsterdam, 1966. Notons qu'en renonçant à l'axiome du choix, on appauvrit considérablement le contenu de la théorie des ensembles.

Cependant, la critique de la théorie « naïve » des ensembles et les tentatives de se passer de l'axiome du choix ont conduit à la création des théories si remarquables comme la théorie des fonctions récursives et des notions comme celle de nombre calculable.

Nous énoncerons ici quelques propositions dont chacune est équivalente à l'axiome du choix (c'est-à-dire chacune d'elles peut être démontrée, si l'on admet l'axiome du choix, et réciproquement, l'axiome du choix peut être démontré, en admettant l'une quelconque de ces propositions). Il est clair avant tout que le théorème de Zermelo est lui-même une telle proposition. En effet, en supposant chaque ensemble M_α bien ordonné, pour construire la fonction φ dont l'existence est affirmée dans l'axiome du choix, il suffit de prendre dans chaque M_α le plus petit élément.

Pour énoncer d'autres propositions équivalentes à l'axiome du choix, introduisons les notions suivantes. Soit M un ensemble ordonné. Tout sous-ensemble $A \subset M$ dont n'importe quels deux éléments sont comparables (au sens de l'ordre défini dans M) est appelé *chaîne.* La chaîne est appelée *maximale*, si elle n'est pas contenue comme partie propre dans une autre chaîne de M. L'élément a de l'ensemble ordonné M est appelé *majorant* du sous-ensemble $M' \subset M$ si tout élément $a' \in M'$ précède a.

Théorème de Hausdorff. *Dans un ensemble ordonné toute chaîne est contenue dans une chaîne maximale.*

La proposition suivante fournit le plus commode des énoncés équivalents à l'axiome du choix.

Lemme de Zorn. *Si dans un ensemble ordonné M toute chaîne admet un majorant, alors tout élément de M précède un élément maximal.*

Une démonstration de l'équivalence de toutes ces propositions (axiome du choix, théorème de Zermelo, théorème de Hausdorff, lemme de Zorn) est donnée, par exemple, dans le livre de A. Kurosh « Leçons d'algèbre générale » cf. aussi [8]. Nous ne la reproduirons pas ici.

Si l'ensemble des majorants du sous-ensemble A possède un plus petit élément a, on dit que a est *la borne supérieure* de A ; de manière analogue on définit *la borne inférieure* de A. L'ensemble ordonné dont toute partie *finie* non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure est appelé *treillis*.

8. Récurrence transfinie. L'une des méthodes de démonstration les plus répandues est la méthode de démonstration par récurrence. Elle consiste, comme on le sait, dans ceci. Soit $P(n)$ une proposition qui s'énonce pour chaque entier naturel n et supposons qu'on sache que :

1) la proposition $P(1)$ est vraie ;

2) le fait que $P(k)$ est vraie pour tous les $k \leqslant n$ entraîne que $P(n+1)$ est aussi vraie.

Alors la proposition $P(n)$ est vraie pour tous les $n = 1, 2, \ldots$ En effet, dans le cas contraire, parmi les nombres n tels que $P(n)$ est fausse il existerait un plus petit, soit n_1. Or, il est clair que $n_1 > 1$, c'est-à-dire que $n_1 - 1$ est aussi un nombre naturel et on obtient donc une contradiction avec la condition 2).

Une méthode analogue peut être appliquée, en remplaçant la suite naturelle par un ensemble bien ordonné quelconque. Dans ce cas elle s'appelle méthode de la *récurrence transfinie*. Ainsi, la méthode de la récurrence transfinie consiste dans ceci. Soit un ensemble bien ordonné quelconque A (éventuellement, l'ensemble des nombres ordinaux transfinis, inférieurs à l'un quelconque) et soit $P(a)$ une proposition quelconque, énonçable pour tout $a \in A$ et telle que $P(a)$ soit vraie pour le plus petit élément de A et vraie pour a, lorsqu'elle est vraie pour tous les éléments qui précèdent a. Alors $P(a)$ est vraie pour tous les $a \in A$.

En effet, si dans A il y avait des éléments a tels que $P(a)$ soit fausse, l'ensemble de tels éléments posséderait un plus petit, soit a^*, et on aboutirait à une contradiction, car pour tout $a < a^*$ la proposition $P(a)$ serait vraie.

Comme d'après le théorème de Zermelo tout ensemble peut être rendu bien ordonné, la récurrence transfinie peut être appliquée, en principe, à n'importe quel ensemble. Toutefois, en pratique, il est souvent plus commode de se servir du lemme de Zorn qui exige

seulement que l'ensemble considéré soit ordonné. Or, pour les objets considérés dans les problèmes qui font appel au lemme de Zorn il existe d'habitude un ordre qui apparaît de façon naturelle, « de soi-même ».

§ 5. Familles d'ensembles

1. Anneau d'ensembles. On appelle *famille d'ensembles* tout ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles. Sauf mention du contraire, nous ne considérerons que des familles d'ensembles dont chacum est une partie d'un certain ensemble référentiel X. Les familles d'ensembles seront désignées par des lettres majuscules de l'alphabet allemand. Nous nous intéresserons principalement aux familles d'ensembles, closes par rapport à certaines opérations introduites au § 1.

Définition 1. Une famille d'ensembles non vide $\mathfrak{R}$ est appelée *anneau*, si elle possède la propriété que $A \in \mathfrak{R}$ et $B \in \mathfrak{R}$ impliquent $A \triangle B \in \mathfrak{R}$ et $A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Comme pour deux ensembles arbitraires A et B on a toujours

$$A \cup B = (A \triangle B) \Delta (A \cap B)$$

et

$$A \setminus B = A \triangle (A \cap B),$$

on en déduit que les relations $A \in \mathfrak{R}$ et $B \in \mathfrak{R}$ impliquent aussi $A \cup B \in \mathfrak{R}$ et $A \setminus B \in \mathfrak{R}$. Donc, l'anneau d'ensembles est une famille d'ensembles, close par rapport à la réunion, à l'intersection, à la soustraction et à la différence symétrique de deux ensembles. Il est évident qu'un anneau d'ensembles est clos aussi par rapport à la réunion et à l'intersection d'un nombre fini arbitraire d'ensembles:

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Tout anneau d'ensembles contient l'ensemble vide $\varnothing$, car on a toujours $A \setminus B = \varnothing$. La famille qui ne contient que l'ensemble vide représente le plus petit anneau d'ensembles.

L'ensemble E s'appelle *unité* de la famille d'ensemble $\mathfrak{S}$, si $E \in \mathfrak{S}$ et pour tout $A \in \mathfrak{S}$ on a

$$A \cap E = A.$$

Ainsi, l'unité d'une famille d'ensembles $\mathfrak{S}$ n'est autre chose que l'ensemble maximal de cette famille contenant tous les autres ensembles de $\mathfrak{S}$.

---

[1]) Les notions considérées dans ce paragraphe nous seront indispensables au chap. V lors de l'exposition de la théorie générale de la mesure. C'est pourquoi la lecture de ce paragraphe peut être reportée au plus tard. Le lecteur qui ne s'intéresse qu'à la théorie de la mesure sur le plan (§ 1, chap. V) pourra omettre entièrement ce paragraphe.

Un anneau d'ensembles avec unité s'appelle *algèbre d'ensembles.*

E x e m p l e s. 1. Quel que soit l'ensemble A, la famille $\mathfrak{M}(A)$ de tous ses sous-ensembles est une algèbre d'ensembles dont l'unité $E = A$.

2. Quel que soit l'ensemble non vide A, la famille $\{A, \varnothing\}$ constituée par l'ensemble A et l'ensemble vide $\varnothing$ est une algèbre d'ensembles dont l'unité $E = A$.

3. La famille des sous-ensembles finis d'un ensemble quelconque A est un anneau d'ensembles. Cet anneau est une algèbre si et seulement si l'ensemble A est lui-même fini.

4. La famille de tous les sous-ensembles bornés de la droite numérique est un anneau d'ensembles sans unité.

De la définition de l'anneau d'ensembles on déduit immédiatement la propriété suivante.

T h é o r è m e 1. *L'intersection* $\mathfrak{R} = \bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha$ *de tout ensemble d'anneaux est un anneau.*

Le résultat qu'on va établir maintenant est simple, mais important pour la suite.

T h é o r è m e 2. *Pour toute famille non vide d'ensembles* $\mathfrak{S}$ *il existe un anneau et un seul* $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ *contenant* $\mathfrak{S}$ *et inclus dans tout anneau* $\mathfrak{R}$ *qui contient* $\mathfrak{S}$.

D é m o n s t r a t i o n. Il est aisé de voir que l'anneau $\mathfrak{R}$ est défini par la famille $\mathfrak{S}$ de façon unique. Pour démontrer son existence considérons la réunion $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$ de tous les ensembles A appartenant à $\mathfrak{S}$ et l'anneau $\mathfrak{M}(X)$ des sous-ensembles de X. Soit Σ l'ensemble de tous les anneaux d'ensembles contenus dans $\mathfrak{M}(X)$ et contenant $\mathfrak{S}$. L'intersection

$$\mathfrak{P} = \bigcap_{\mathfrak{R} \in \Sigma} \mathfrak{R}$$

de tous ces anneaux est justement l'anneau cherché $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

En effet, quel que soit l'anneau $\mathfrak{R}^*$ contenant $\mathfrak{S}$, l'intersection $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{M}(X)$ est un anneau de Σ et donc

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}^*,$$

c'est-à-dire $\mathfrak{P}$ vérifie effectivement la condition de minimalité. Cet anneau est appelé *anneau minimal* sur $\mathfrak{S}$ ou anneau *engendré par* $\mathfrak{S}$ et désigné par $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

2. Demi-anneau d'ensembles. Dans certaines questions, par exemple, dans la théorie de la mesure, un rôle important est joué non seulement par la notion d'anneau, mais aussi par la notion plus générale de demi-anneau d'ensembles.

D é f i n i t i o n 2. Une famille d'ensembles $\mathfrak{S}$ est appelée *demi-anneau*, si elle contient l'ensemble vide $\varnothing$, est close par rapport

à l'intersection et possède la propriété suivante : si les ensembles A et $A_1 \subset A$ appartiennent à $\mathfrak{S}$, alors A peut être mis sous la forme $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ où A_k sont des ensembles deux à deux disjoints de $\mathfrak{S}$ dont le premier est l'ensemble donné A_1.

Par la suite, toute famille d'ensembles deux à deux disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dont la réunion est égale à l'ensemble donné A, sera appelée *décomposition finie* de l'ensemble A.

Tout anneau d'ensembles $\mathfrak{R}$ est un demi-anneau, car si A et $A_1 \subset A$ appartiennent à $\mathfrak{R}$, on a la décomposition

$$A = A_1 \cup A_2, \text{ où } A_2 = A \setminus A_1 \in \mathfrak{R}.$$

Comme exemple de demi-anneau qui n'est pas un anneau on peut considérer l'ensemble de tous les intervalles ouverts (a, b), fermés $[a, b]$ et semi-ouverts (semi-fermés) $[a, b)$ et $(a, b]$ de la droite numérique [1]). Un autre exemple est donné par l'ensemble des rectangles « semi-ouverts » $a < x \leqslant b$, $c < y \leqslant d$ du plan, ou par l'ensemble des parallélépipèdes semi-ouverts de l'espace.

Etablissons les propriétés suivantes des demi-anneaux d'ensembles.

L e m m e 1. *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et A des ensembles appartenant au demi-anneau $\mathfrak{S}$. Si les ensembles A_i sont deux à deux disjoints et tous inclus dans A, la collection des ensembles A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ peut être complétée par des ensembles $A_{n+1}, \ldots, A_s \in \mathfrak{S}$ jusqu'à une décomposition finie*

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k \; (s \geqslant n)$$

de l'ensemble A.

D é m o n s t r a t i o n. Démontrons le lemme par récurrence. Pour $n = 1$ l'affirmation du lemme découle de la définition du demi-anneau. Supposons que cette affirmation soit vraie pour $n = m$ et considérons $m + 1$ ensembles $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$ vérifiant les conditions du lemme. Par l'hypothèse de récurrence

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup B_2 \ldots \cup B_p,$$

où tous les ensembles B_q $(q = 1, 2, \ldots, p)$ appartiennent à $\mathfrak{S}$. Posons

$$B_{q1} = A_{m+1} \cap B_q.$$

D'après la définition du demi-anneau on a la décomposition

$$B_q = B_{q1} \cup B_{q2} \ldots \cup B_{qr_q},$$

[1]) Y compris, bien sûr, l'intervalle « vide » (a, a) et le segment constitué d'un seul point $[a, a]$.

où tous les B_{qj} appartiennent à $\mathfrak{S}$. On voit sans peine que

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1} \cup \bigcup_{q=1}^{p} (\bigcup_{j=2}^{r_q} B_{qj}).$$

Ainsi, l'affirmation du lemme est démontrée pour $n = m + 1$, donc pour tous les n.

L e m m e 2. *Quelle que soit la famille finie d'ensembles* $A_1, \ldots, A_n$ *appartenant au demi-anneau* $\mathfrak{S}$, *il existe dans* $\mathfrak{S}$ *une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints* $B_1, \ldots, B_t$, *telle que chaque ensemble* A_k *peut être mis sous forme d'une réunion*

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s$$

de quelques-uns des ensembles B_s.

D é m o n s t r a t i o n. Pour $n = 1$ le lemme est évident: il suffit de poser $t = 1$ et $B_1 = A_1$. Supposons qu'il soit vrai pour $n = m$ et considérons dans $\mathfrak{S}$ une famille d'ensembles $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_t$ les ensembles de $\mathfrak{S}$ qui vérifient les conditions du lemme pour $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Posons

$$B_{s1} = A_{m+1} \cap B_s.$$

En vertu du lemme 1 on a la décomposition

$$A_{m+1} = \bigcup_{s=1}^{t} B_{s1} \cup \bigcup_{p=1}^{q} B'_p, \quad B'_p \in \mathfrak{S}, \tag{1}$$

d'après la définition même du demi-anneau on a la décomposition

$$B_s = B_{s1} \cup B_{s2} \cup \ldots \cup B_{sf_s}, \quad B_{sj} \in \mathfrak{S}.$$

Il est aisé de voir que

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} \bigcup_{j=1}^{f_s} B_{sj}, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

et que les ensembles

$$B_{sj}, \ B'_p$$

sont deux à deux disjoints. Donc, les ensembles B_{sj}, B'_p vérifient les conditions du lemme pour $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$. Le lemme est démontré.

3. Anneau engendré par un demi-anneau. Nous avons déjá vu au nº 1 que pour chaque famille d'ensembles $\mathfrak{S}$ il existe un anneau minimal unique contenant $\mathfrak{S}$. Cependant, pour une famille arbitraire $\mathfrak{S}$ la construction effective de l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ est assez compliquée. Par contre, elle est nettement réalisable dans le cas important, où $\mathfrak{R}$ est un demi-anneau. Cette construction est indiquée par le théorème suivant.

Théorème 3. *Si $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau, alors $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ coïncide avec la famille $\mathfrak{Z}$ des ensembles A dont chacun admet une décomposition de la forme*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad A_k \in \mathfrak{S}.$$

Démonstration. Montrons que la famille $\mathfrak{Z}$ est un anneau. Si A et B sont deux ensembles quelconques de $\mathfrak{Z}$, on a les décompositions

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \quad A_i \in \mathfrak{S}, \quad B_j \in \mathfrak{S}.$$

Comme $\mathfrak{S}$ est un demi-anneau, les ensembles

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

appartiennent aussi à $\mathfrak{S}$. En vertu du lemme 1 on a les décompositions

$$A_i = \bigcup_j C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}; \quad B_j = \bigcup_i C_{ij} \cup \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}, \tag{2}$$

où les ensembles D_{ik} et E_{jl} appartiennent à $\mathfrak{S}$. Des égalités (2) il résulte que les ensembles $A \cap B$ et $A \triangle B$ admettent les décompositions suivantes

$$A \cap B = \bigcap_{i,j} C_{ij}, \quad A \triangle B = \bigcup_{i,k} D_{ik} \cup \bigcup_{j,l} E_{jl}$$

et donc appartiennent aussi à $\mathfrak{Z}$. Ainsi $\mathfrak{Z}$ est bien un anneau; sa minimalité parmi tous les anneaux contenant $\mathfrak{S}$ est évidente.

4. σ-algèbres. Dans beaucoup de questions et en particulier dans la théorie de la mesure, on est amené à considérer des réunions et des intersections non seulement d'un nombre fini, mais aussi d'une infinité dénombrable d'ensembles. C'est pourquoi il convient d'introduire, outre la notion d'anneau d'ensembles, encore les notions suivantes.

Définition 3. Un anneau d'ensembles est appelé *σ-anneau*, si avec toute suite d'ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ il contient aussi leur réunion

$$S = \bigcup_n A_n.$$

Définition 4. Un anneau d'ensembles est appelé *δ-anneau*, si avec toute suite d'ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ il contient aussi leur intersection

$$D = \bigcap_n A_n.$$

Il est naturel d'appeler *σ-algèbre* tout σ-anneau avec unité et *δ-algèbre* tout δ-anneau avec unité. Mais on voit facilement que ces

deux notions coïncident: toute σ-algèbre est en même temps une δ-algèbre et toute δ-algèbre est une σ-algèbre. Ceci résulte des relations de dualité:

$$\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcap_n (E \setminus A_n),$$

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

(cf. § 1).

L'exemple le plus simple de σ-algèbre est fourni par l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque A.

Lorsqu'on a une famille d'ensembles quelconque $\mathfrak{S}$, il existe toujours au moins une σ-algèbre contenant cette famille. En effet, posons

$$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$$

et considérons la famille $\mathfrak{B}$ des parties de l'ensemble X. Il est clair que $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre contenant $\mathfrak{S}$. Si $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre arbitraire contenant $\mathfrak{S}$ et $\widetilde{X}$ est son unité, alors tout ensemble $A \in \mathfrak{S}$ est inclus dans $\widetilde{X}$ et, par conséquent, $X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A \subset \widetilde{X}$. Nous dirons que $\mathfrak{B}$ est une σ-algèbre *irréductible* (par rapport à la famille $\mathfrak{S}$), si $\widetilde{X} = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$. Autrement dit, la σ-algèbre irréductible est une σ-algèbre qui ne contient pas de points n'appartenant à aucun $A \in \mathfrak{S}$. Il est naturel de considérer dans chaque cas seulement des σ-algèbres de cette sorte.

Pour les σ-algèbres irréductibles on a un théorème analogue au théorème 2, démontré plus haut pour les anneaux.

Théorème 4. *Pour toute famille d'ensembles non vide $\mathfrak{S}$ il existe une σ-algèbre irréductible (par rapport à cette famille) $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ contenant $\mathfrak{S}$ et incluse dans toute σ-algèbre qui contient $\mathfrak{S}$.*

La démonstration est exactement la même que celle du théorème 2. La σ-algèbre $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ s'appelle *σ-algèbre minimale sur la famille $\mathfrak{S}$.*

En analyse un rôle important jouent les ensembles appelés *boréliens* ou *B*-ensembles. Ce sont les ensembles de la droite numérique qui appartiennent à la σ-algèbre minimale sur l'ensemble de tous les segments $[a, b]$.

5. Familles d'ensembles et applications. Signalons les faits suivants qui nous seront utiles lors de l'étude des fonctions mesurables.

Soit $y = f(x)$ une fonction définie sur l'ensemble M et à valeurs dans l'ensemble N et soit $\mathfrak{M}$ une famille quelconque de parties de l'ensemble M. Désignons par $f(\mathfrak{M})$ la famille des images $f(A)$ des

ensembles appartenant à $\mathfrak{M}$. Soient, d'autre part, $\mathfrak{N}$ une famille quelconque de parties de N et $f^{-1}(\mathfrak{N})$ la famille des images réciproques $f^{-1}(A)$ des ensembles de $\mathfrak{N}$. Alors on a les propositions suivantes, dont la vérification est laissée au lecteur :

1) Si $\mathfrak{N}$ est un anneau, $f^{-1}(\mathfrak{N})$ est aussi un anneau.
2) Si $\mathfrak{N}$ est une algèbre, $f^{-1}(\mathfrak{N})$ est aussi une algèbre.
3) Si $\mathfrak{N}$ est une σ-algèbre, $f^{-1}(\mathfrak{N})$ est aussi une σ-algèbre.
4) $\mathfrak{R}(f^{-1}(\mathfrak{N})) = f^{-1}(\mathfrak{R}(\mathfrak{N}))$.
5) $\mathfrak{B}(f^{-1}(\mathfrak{N})) = f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathfrak{N}))$.

Ces propositions restent-elles vraies, si l'on remplace f^{-1} par f et $\mathfrak{N}$ par $\mathfrak{M}$?

Espaces métriques et topologiques

§ 1. Notion d'espace métrique

1. Définition et exemples. L'une des opérations les plus importantes de l'analyse est le passage à la limite. Cette opération est basée sur la notion de distance entre deux points, définie sur la droite numérique. De nombreux faits fondamentaux de l'analyse ne sont pas liés à la nature algébrique des nombres réels (c'est-à-dire au fait qu'ils forment un corps) et sont basés seulement sur la notion de distance. En généralisant l'idée des nombres réels comme d'un ensemble muni de distance, on est conduit à la notion d'espace métrique qui représente l'une des notions les plus importantes des mathématiques modernes. Nous exposerons ici, dans ses traits fondamentaux, la théorie des espaces métriques et de leur généralisation: les espaces topologiques. Les résultats de ce chapitre sont nécessaires pour toute la suite.

Définition. On appelle *espace métrique* un couple (X, ρ), constitué d'un *ensemble* (espace) X d'*éléments* (points) et d'une *distance* (métrique) ρ, c'est-à-dire une fonction réelle non négative $\rho(x, y)$, définie pour tous les $x, y \in X$ et satisfaisant aux trois axiomes suivants:

1) $\rho(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,

2) (axiome de symétrie): $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3) (inégalité triangulaire): $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Nous désignerons généralement l'espace métrique lui-même, c'est-à-dire le couple (X, ρ), par une seule lettre:

$$R = (X, \rho).$$

S'il n'y a aucune confusion à craindre, nous désignerons souvent l'espace métrique par le même symbole que l'ensemble de ses points X.

Considérons des exemples d'espaces métriques. Certains de ces espaces jouent un rôle important en analyse.

1. En posant pour les éléments d'un ensemble arbitraire

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

on obtient évidemment un espace métrique. Cet espace pourrait être appelé espace de points isolés.

2. L'ensemble des nombres réels, muni de la distance

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

est un espace métrique, noté $\mathbf{R}^1$.

3. L'ensemble des systèmes ordonnés de n nombres réels

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

muni de la distance

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}, \qquad (1)$$

est appelé *espace arithmétique euclidien à n dimensions* et noté $\mathbf{R}^n$. Les axiomes 1) et 2) dans $\mathbf{R}^n$ sont évidents. Montrons que dans $\mathbf{R}^n$ l'inégalité triangulaire est aussi vérifiée.

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $z = (z_1, \ldots, z_n)$; alors l'inégalité triangulaire peut s'écrire sous la forme:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2}. \qquad (2)$$

En posant $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$, on obtient $z_k - x_k = a_k + b_k$ et l'inégalité (2) devient alors:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \qquad (3)$$

Or, cette inégalité est une conséquence immédiate de l'inégalité bien connue de Cauchy-Bouniakovsky [1]:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \qquad (4)$$

En effet, d'après cette inégalité on a

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2,$$

d'où l'inégalité (3) et donc l'inégalité (2).

[1]) L'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky découle de l'identité

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2,$$

qui peut être vérifiée immédiatement.

4. Considérons de nouveau l'ensemble des systèmes ordonnés de n nombres réels $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et définissons la distance entre ses éléments, cette fois, par la formule

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|. \tag{5}$$

Les axiomes 1)-3) sont évidents. On désigne l'espace métrique obtenu par le symbole $\mathbf{R}_1^n$.

5. Considérons le même ensemble que dans les exemples 3 et 4 et définissons une distance entre ses éléments par la formule

$$\rho_0(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k - x_k|. \tag{6}$$

Les axiomes 1)-3) sont évidents. On désigne cet espace métrique par $\mathbf{R}_0^n$; dans beaucoup de questions d'analyse il est aussi commode que l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$.

Les trois derniers exemples montrent qu'il importe parfois de noter différemment un espace métrique et l'ensemble de ses points, car le même ensemble peut être métrisé de différentes façons.

6. L'ensemble $C[a, b]$ de toutes les fonctions réelles continues, définies sur le segment $[a, b]$, muni de la distance

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |g(t) - f(t)|, \tag{7}$$

est aussi un espace métrique. Les axiomes 1)-3) sont vérifiés immédiatement. Cet espace joue un rôle très important en analyse. Nous allons le désigner par le même symbole $C[a, b]$ que l'ensemble des points de cet espace. Au lieu de $C[0, 1]$ nous écrirons simplement C.

7. Désignons par l_2 l'espace métrique dont les points sont les suites de nombres réels

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

et dont la distance est définie par la formule

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}. \tag{8}$$

De l'inégalité évidente

$$(x_k \pm y_k)^2 \leqslant 2(x_k + y_k^2)$$

il résulte que la fonction $\rho(x, y)$ est définie pour tous les $x, y \in l_2$, c'est-à-dire que la série $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$ est convergente, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty.$$

Montrons maintenant que la fonction (8) vérifie les axiomes de l'espace métrique. Les axiomes 1) et 2) sont évidents; l'inégalité triangulaire s'écrit:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}. \tag{9}$$

D'après ce qui précède, chacune des trois séries écrites ici est convergente. D'autre part, pour chaque n on a l'inégalité

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$$

(cf. exemple 4). En passant dans cette inégalité à la limite pour $n \to \infty$, on obtient (9), c'est-à-dire l'inégalité triangulaire dans l_2.

8. Considérons, comme dans l'exemple 6, l'ensemble des fonctions définies et continues sur le segment $[a, b]$, mais en définissant cette fois la distance par la formule

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{10}$$

Un tel espace métrique sera noté $C^2[a, b]$ et nommé *espace des fonctions continues à métrique quadratique*. Les axiomes 1) et 2) de l'espace métrique sont cette fois encore évidents; l'inégalité triangulaire découle de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky sous forme intégrale [1])

$$\left(\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \right)^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\, dt \cdot \int_a^b y^2(t)\, dt.$$

9. Considérons l'ensemble des suites bornées de nombres réels $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. En posant

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|, \tag{11}$$

[1]) Cette inégalité peut être obtenue, par exemple, de l'identité facile à vérifier suivante:

$$\left(\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \right)^2 = \int_a^b x^2(t)\, dt \int_a^b y^2(t)\, dt - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [x(s)\, y(t) - y(s)\, x(t)]^2 \, ds\, dt.$$

on obtient un espace métrique, que nous désignerons par m. Les axiomes 1)-3) sont évidents.

10. L'ensemble des systèmes ordonnés de n nombres réels, muni de la distance

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}, \tag{12}$$

où p est un nombre quelconque $\geqslant 1$, est un espace métrique, que nous désignerons par $\mathbf{R}_p^n$. Les axiomes 1) et 2) sont dans ce cas encore évidents. Vérifions l'axiome 3). Soient

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \ y = (y_1, \ldots, y_n), \ z = (z_1, \ldots, z_n)$$

trois points de $\mathbf{R}_p^n$. Posons

$$y_k - x_k = a_k, \quad z_k - y_k = b_k;$$

alors l'inégalité

$$\rho_p(x, z) \leqslant \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z),$$

que nous devons établir, prend la forme suivante:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{1/p}. \tag{13}$$

C'est l'*inégalité de Minkowski*. Pour $p = 1$ elle est évidente (le module de la somme est inférieur ou égal à la somme des modules), c'est pourquoi nous allons considérer $p > 1$ [1]).

La démonstration de l'inégalité (13) pour $p > 1$ est basée sur l'*inégalité de Hölder*:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{1/p}, \tag{14}$$

où les nombres $p > 1$ et $q > 1$ sont liés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{ou} \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{15}$$

Remarquons que l'inégalité (14) est homogène. Cela signifie que si elle est vérifiée pour deux vecteurs

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \text{ et } b = (b_1, \ldots, b_n),$$

elle l'est aussi pour les vecteurs λa et μb, où λ et μ sont des nombres arbitraires. C'est pourquoi il suffit de démontrer l'inégalité (14)

---

[1]) Pour $p < 1$ l'inégalité de Minkowski n'a pas lieu. Autrement dit, si l'on voulait considérer l'espace $\mathbf{R}_p^n$ pour $p < 1$, dans un tel espace l'inégalité triangulaire ne serait pas vérifiée.

pour le cas où

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1. \tag{16}$$

Supposons donc que la condition (16) soit remplie et démontrons que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1. \tag{17}$$

Considérons sur le plan (ξ, η) la courbe définie par l'équation $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi > 0)$ ou, ce qui revient au même, par l'équation $\xi =$

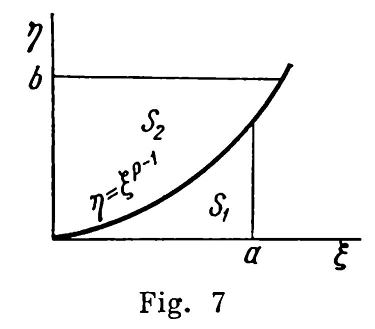


Fig. 7

$= \eta^{q-1}$ (fig. 7). D'après la figure il est clair que pour toutes valeurs positives de a et b on a $S_1 + S_2 \geqslant ab$. Calculons les aires S_1 et S_2:

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1}\, d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1}\, d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Ainsi, on a l'inégalité numérique

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En remplaçant dans cette inégalité a par $|a_k|$ et b par $|b_k|$ et en sommant sur k de 1 à n, on obtient, compte tenu de (15) et (16),

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1,$$

c'est-à-dire l'inégalité (17). Par conséquent, l'inégalité générale (14) est aussi démontrée. Si dans l'inégalité de Hölder (14) on met $p = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky (4).

Passons maintenant à la démonstration de l'inégalité de Minkowski. Pour cela, considérons l'identité

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1} |a| + (|a| + |b|)^{p-1} |b|.$$

En remplaçant ici a par a_k, b par b_k et en sommant sur k de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p = \sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

En appliquant maintenant l'inégalité de Hölder à chacune des deux sommes du second membre et en tenant compte du fait que $(p-1)q = p$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p\Big)^{1/q} \Big(\Big[\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big]^{1/p} + \Big[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big]^{1/p}\Big).$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p\Big)^{1/q},$$

il vient

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{1/p},$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité (13). Ainsi donc, on a établi l'inégalité triangulaire dans l'espace $\mathbf{R}_p^n$.

La métrique ρ_p, considérée dans cet exemple, coïncide avec la métrique euclidienne (cf. exemple 3) pour $p = 2$ et avec la métrique de l'exemple 4 pour $p = 1$. On peut montrer que la métrique

$$\rho_0(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k - x_k|$$

de l'exemple 5 est le cas limite de la métrique $\rho_p(x, y)$, c'est-à-dire

$$\rho_0(x, y) = \lim_{p \to \infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

De l'inégalité

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big),$$

établie plus haut, on déduit sans peine l'*inégalité intégrale de Hölder :*

$$\int_a^b |x(t)\,y(t)|\,dt \leqslant \Big(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\Big)^{1/p} \Big(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\Big)^{1/q},$$

vraie pour toutes les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, telles que les intégrales du second membre existent. De là on obtient à son tour *l'inégalité*

intégrale de Minkowski :

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

11. Examinons encore un exemple important d'espace métrique. Ses éléments sont les suites de nombres réels

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty,$$

où $p \geqslant 1$ est un nombre fixe ; la distance étant définie par la formule

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{18}$$

Cet espace métrique sera désigné par l_p.

En vertu de l'inégalité de Minkowski (13), pour tout n on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Comme, par hypothèse, les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$$

sont convergentes, en passant à la limite pour $n \to \infty$, on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} < \infty. \tag{19}$$

Ainsi, nous avons démontré que la distance, définie dans l_p par la formule (18), existe effectivement, quels que soient $x, y \in l_p$. L'inégalité (19) montre aussi que dans l_p l'inégalité triangulaire est vérifiée. Les autres axiomes sont évidents.

On obtiendra une infinité d'autres exemples par le procédé suivant. Soient $R = (X, \rho)$ un espace métrique et M un sous-ensemble quelconque de X. Alors le couple formé par l'ensemble M et la même fonction $\rho(x, y)$, qui est maintenant supposée définie pour $x, y \in M$, est aussi un espace métrique ; on l'appelle *sous-espace* de l'espace métrique R.

2. Applications continues d'un espace métrique dans un autre. Isométrie. Soient X et Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y. Cela signifie qu'à tout $x \in X$ on fait correspondre un élément $y = f(x)$ de Y. L'application f est appelée *continue* au

point $x_0 \in X$, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$, tel que pour tous les $x \in X$ vérifiant la condition

$$\rho(x, x_0) < \delta$$

on a l'inégalité

$$\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(ici ρ désigne la distance sur X et ρ_1 la distance sur Y). Si l'application f est continue en tout point de l'espace X, on dit que f est *continue sur* X. Si X et Y sont des ensembles numériques, c'est-à-dire si f est une fonction numérique, définie sur un sous-ensemble X de la droite numérique, la définition ci-dessus coïncide avec la définition, bien connue en analyse élémentaire, de la continuité d'une fonction.

On peut définir de manière analogue la continuité d'une fonction (application) f de plusieurs variables $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ (où $X_1, \ldots, X_n$ sont des espaces métriques) à valeurs dans un espace métrique Y.

Remarquons, à cette occasion, que la distance $\rho(x, y)$, considérée comme une fonction de deux variables x et y de X, est elle-même continue. Cela résulte immédiatement de l'inégalité

$$|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(y_0, y),$$

que l'on peut déduire facilement de l'inégalité triangulaire.

Si l'application $f: X \to Y$ est biunivoque, il existe une application réciproque $x = f^{-1}(y)$ de l'espace Y sur l'espace X. Si l'application f est biunivoque et bicontinue (c'est-à-dire f et f^{-1} sont continues), elle est appelée *application homéomorphe* ou *homéomorphisme*; les espaces X et Y, entre lesquels on peut établir un homéomorphisme, sont dits *homéomorphes*. Comme exemple d'espaces métriques homéomorphes on peut indiquer la droite numérique $(-\infty, \infty)$ et un intervalle quelconque, par exemple, l'intervalle $(-1, 1)$. Dans ce cas, l'homéomorphisme est défini par la formule

$$y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Un cas particulier important de l'homéomorphisme est l'application dite isométrique.

On dit que la bijection f entre les espaces métriques $R = (X, \rho)$ et $R' = (Y, \rho')$ est une *isométrie*, si

$$\rho(x_1, x_2) = \rho'(f(x_1, f(x_2)),$$

quels que soient $x_1, x_2 \in R$. Les espaces R et R', entre lesquels on peut établir une application isométrique, sont dits *isométriques*.

L'isométrie des espaces R et R' signifie que les relations métriques entre leurs éléments sont les mêmes; seule la nature de leurs éléments peut être différente, mais cela est sans importance du point

de vue de la théorie des espaces métriques. Par la suite, les espaces isométriques seront considérés comme identiques.

Nous reviendrons sur les notions abordées ici (continuité, homéomorphisme), d'un point de vue plus général, à la fin du § 5 de ce chapitre.

§ 2. Convergence. Ensembles ouverts et ensembles fermés

1. Points d'accumulation. Fermeture. Nous introduirons ici quelques notions de la théorie des espaces métriques qui seront souvent utilisées dans la suite.

On appelle *boule ouverte* $B(x_0, r)$ d'un espace métrique R l'ensemble des points $x \in R$ tels que

$$\rho(x, x_0) < r.$$

Le point x_0 est le *centre* de cette boule, le nombre r est son *rayon.*

On appelle *boule fermée* $B[x_0, r]$ l'ensemble des points $x \in R$ tels que

$$\rho(x, x_0) \leqslant r.$$

La boule ouverte de centre x_0 et de rayon ε est appelée encore *ε-voisinage* du point x_0 et notée par le symbole $O_\varepsilon(x_0)$.

E x e r c i c e. Donner un exemple d'espace métrique contenant deux boules $B(x, \rho_1)$ et $B(y, \rho_2)$ telles que $\rho_1 > \rho_2$ et pourtant $B(x, \rho_1) \subset B(y, \rho_2)$.

Un point $x \in R$ est appelé *point adhérent* à l'ensemble $M \subset R$, si tout voisinage de x contient au moins un point de M. L'ensemble de tous les points adhérents à l'ensemble M s'appelle *fermeture* de M et se note $[M]$. Ainsi, nous avons défini sur les ensembles d'un espace métrique *l'opération de fermeture* qui consiste dans le passage d'un ensemble M à sa fermeture $[M]$.

T h é o r è m e 1. *L'opération de fermeture possède les propriétés suivantes :*

1) $M \subset [M]$,
2) $[[M]] = [M]$,
3) *si* $M_1 \subset M_2$, *alors* $[M_1] \subset [M_2]$,
4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

D é m o n s t r a t i o n. La première propriété est évidente, car tout point appartenant à M est un point adhérent à M. Démontrons la deuxième.

Soit x un point de $[[M]]$. Alors, tout voisinage $O_\varepsilon(x)$ de ce point contient un point $x_1 \in [M]$. Posons $\varepsilon - \rho(x, x_1) = \varepsilon_1$ et considérons la boule $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Cette boule est contenue toute entière dans $O_\varepsilon(x)$.

En effet, si $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, alors $\rho(z, x_1) < \varepsilon$ et comme $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, d'après l'inégalité triangulaire on a

$$\rho(z, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

c'est-à-dire $z \in O_\varepsilon(x)$. Puisque $x_1 \in [M]$, on trouvera dans $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ un point $x_2 \in M$. Mais alors $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Etant donné que $O_\varepsilon(x)$ est un voisinage arbitraire de x, on a donc $x \in [M]$. La deuxième propriété est démontrée.

La troisième propriété est évidente. Démontrons la quatrième.

Si $x \in [M_1 \cup M_2]$, alors x appartient au moins à l'un des ensembles $[M_1]$ et $[M_2]$, c'est-à-dire

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2].$$

Etant donné que $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ et $M_2 \subset M_1 \cup M_2$, l'inclusion réciproque résulte de la propriété 3).

Le théorème est complètement démontré.

Un point $x \in R$ est appelé *point d'accumulation* de l'ensemble $M \subset R$, si tout voisinage de x contient une infinité de points de M.

Un point d'accumulation de l'ensemble M peut être dans M ou ne pas y être. Par exemple, si M est l'ensemble des nombres rationnels du segment $[0, 1]$, tout point de ce segment est un point d'accumulation de M.

Un point x appartenant à l'ensemble M est appelé *point isolé* de cet ensemble, s'il existe un voisinage $O_\varepsilon(x)$ de x ne contenant aucun point de M, autre que x. On propose au lecteur, à titre d'exercice, de démontrer la proposition suivante:

Tout point adhérent à l'ensemble M est soit un point d'accumulation, soit un point isolé de cet ensemble.

On peut en conclure que la fermeture $[M]$ est constituée par des points de trois sortes:

1) points isolés de l'ensemble M;
2) points d'accumulation de M, appartenant à M;
3) points d'accumulation de M, n'appartenant pas à M.

Donc, la fermeture $[M]$ d'un ensemble M s'obtient par adjonction à M de tous ses points d'accumulation.

2. Convergence. Soit $x_1, x_2, \ldots$ une suite de points de l'espace métrique R. On dit que cette suite *converge vers* x, si tout voisinage $O_\varepsilon(x)$ du point x contient tous les points x_n à partir d'un certain rang, autrement dit, si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre N_ε tel que $O_\varepsilon(x)$ contienne tous les points x_n avec $n > N_\varepsilon$. Le point x est appelé *limite* de la suite $\{x_n\}$.

Cette définition peut être, évidemment, formulée encore de la manière suivante: la suite $\{x_n\}$ converge vers x, si

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

De la définition il résulte immédiatement que 1) aucune suite ne peut avoir deux limites différentes et que 2) si la suite $\{x_n\}$ converge vers x, toute sous-suite de $\{x_n\}$ converge vers le même point x.

Le théorème suivant établit un lien étroit entre la notion de point adhérent et celle de limite.

Théorème 2. *Pour qu'un point x soit adhérent à l'ensemble M, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{x_n\}$ de points de M, admettant x pour limite.*

Démonstration. La condition est nécessaire, car si x est un point adhérent à l'ensemble M, tout voisinage $O_{1/n}x$ de x contient au moins un point $x_n \in M$. Ces points forment une suite qui converge vers x. Il est évident que la condition est aussi suffisante.

Si x est un point d'accumulation de M, les points $x_n \in O_{1/n}(x) \cap \cap M$ correspondant à des n différents peuvent être choisis deux à deux distincts. Donc, *pour que x soit un point d'accumulation de l'ensemble M, il faut et il suffit qu'il existe dans M une suite de points deux à deux distincts, admettant x pour limite.*

La notion de continuité de l'application d'un espace métrique X dans un espace métrique Y, introduite au § 1, peut être maintenant exprimée en termes de convergence des suites. A savoir, l'application $y = f(x)$ est continue au point x_0, si pour toute suite $\{x_n\}$ qui converge vers x_0 la suite $\{y_n = f(x_n)\}$ converge vers $y_0 = f(x_0)$. La démonstration de l'équivalence de cette définition à celle du § 1 ne diffère en rien de la démonstration de l'équivalence des deux définitions analogues (« en termes de ε, δ » et « en termes de suites ») de la continuité des fonctions numériques et peut être laissée au lecteur.

3. Sous-ensembles denses. Soient A et B deux ensembles d'un espace métrique R. L'ensemble A est dit *dense* dans B, si $[A] \supset \supset B$. En particulier, l'ensemble A est dit *partout dense* (dans l'espace R), si sa fermeture $[A]$ coïncide avec l'espace R tout entier. Par exemple, l'ensemble des nombres rationnels est partout dense sur la droite numérique. L'ensemble A est dit *nulle part dense* , s'il n'est dense dans aucune boule, c'est-à-dire si toute boule $B \subset R$ contient une autre boule B' n'ayant avec A aucun point commun.

Exemples d'espaces contenant un ensemble partout dense et dénombrable. Tout espace métrique, qui contient un ensemble partout dense et dénombrable, est dit *séparable*. Etudions de ce point de vue les exemples donnés au § 1.

1. L'espace « discret », défini dans l'exemple 1, § 1, contient un ensemble partout dense et dénombrable si et seulement si cet espace est lui-même un ensemble dénombrable. C'est que la fermeture $[M]$ de tout ensemble M de cet espace coïncide avec M.

Tous les espaces énumérés dans les exemples 2-8, § 1, contiennent des ensembles partout denses et dénombrables. Indiquons dans chacun d'eux un tel ensemble, en conseillant instamment au lecteur d'effectuer en détail toutes les démonstrations.

2. Sur la droite numérique $\mathbf{R}^1$: les points rationnels.

3-5. Dans l'espace euclidien à n dimensions $\mathbf{R}^n$ et dans les espaces $\mathbf{R}_1^n$, $\mathbf{R}_0^n$: l'ensemble des vecteurs à coordonnées rationnelles.

6. Dans l'espace $C[a, b]$: l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels.

7. Dans l'espace l_2 : l'ensemble des suites à termes rationnels dont chacune ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls (ce nombre étant, en général, différent pour des suites différentes).

8. Dans l'espace $C^2[a, b]$: l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels.

Par ailleurs, l'*espace des suites bornées* m (exemple 9, § 1) n'est pas séparable.

En effet, considérons toutes les suites possibles ayant pour termes 0 et 1. Elles forment un ensemble qui a la puissance du continu (parce qu'il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre ces suites et les sous-ensembles de la suite naturelle). La distance de deux points de cette espèce, définie par la formule (11), § 1, est égale à 1. Entourons chacun de ces points d'une boule ouverte de rayon 1/2. Ces boules seront disjointes. Si un ensemble est partout dense dans m, chacune des boules construites doit contenir au moins un point de cet ensemble ; par conséquent, un tel ensemble ne peut pas être dénombrable.

4. Ensembles ouverts et ensembles fermés. Considérons les types d'ensembles les plus importants d'un espace métrique, à savoir les ensembles ouverts et les ensembles fermés.

Un ensemble M de l'espace métrique R est appelé *ensemble fermé*, s'il coïncide avec sa fermeture : $[M] = M$. Autrement dit, un ensemble est fermé, s'il contient tous ses points d'accumulation.

En vertu du théorème 1, la fermeture de tout ensemble est un ensemble fermé. Il suit du même théorème que $[M]$ est le plus petit des ensembles fermés contenant M. (Démontrer!)

Exemples. 1. Tout segment $[a, b]$ de la droite numérique est un ensemble fermé.

2. Toute boule fermée est un ensemble fermé. En particulier, l'ensemble des fonctions f de l'espace $C[a, b]$, telles que $|f(t)| \leqslant K$, est un ensemble fermé.

3. L'ensemble des fonctions f de $C[a, b]$, telles que $|f(t)| < K$ (boule ouverte), n'est pas fermé ; sa fermeture est l'ensemble des fonctions qui vérifient la condition $|f(t)| \leqslant K$.

4. Quel que soit l'espace métrique R, l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble R lui-même sont fermés.

5. Tout ensemble formé d'un nombre fini de points est fermé.

Les propriétés fondamentales des ensembles fermés sont exprimées par le théorème suivant.

Théorème 3. *Toute intersection et toute réunion finie d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.*

Démonstration. Soit $F = \bigcap F_\alpha$ une intersection d'ensembles fermés F_α et soit x un point d'accumulation de F. Cela signifie que tout voisinage $O_\varepsilon(x)$ de x contient une infinité de points de F. Mais alors, $O_\varepsilon(x)$ contient, à plus forte raison, un nombre infini de points de chaque ensemble F_α et, comme tous les ensembles F_α sont fermés, le point x appartient à chaque F_α; par conséquent, $x \in F = \bigcap F_\alpha$, c'est-à-dire F est fermé.

Soit maintenant F la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés: $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ et soit x un point n'appartenant pas à F. Montrons que x ne peut pas être un point d'accumulation de F. En effet, x n'appartient à aucun des ensembles fermés F_i; donc, il n'est point d'accumulation d'aucun de ces ensembles. Par suite, pour chaque i il existe un voisinage $O_{\varepsilon_i}(x)$ du point x qui contient au plus un nombre fini de points de F_i. En prenant le plus petit des voisinages $O_{\varepsilon_1}(x), \ldots, O_{\varepsilon_n}(x)$, on obtiendra un voisinage $O_\varepsilon(x)$ du point x, contenant au plus un nombre fini de points de F.

Ainsi donc, si un point x n'appartient pas à F, il ne peut pas être point d'accumulation de F, c'est-à-dire F est un ensemble fermé. Le théorème est démontré.

On dit que x est un *point intérieur* à l'ensemble M, s'il existe un voisinage $O_\varepsilon(x)$ de ce point tel que $O_\varepsilon(x) \subset M$.

L'ensemble dont tous les points sont intérieurs est appelé *ensemble ouvert.*

Exemples. 6. Tout intervalle (a, b) de la droite numérique $\mathbf{R}^1$ est un ensemble ouvert. En effet, si $a < \alpha < b$, le voisinage $O_\varepsilon(\alpha)$ de α, où $\varepsilon = \min(\alpha - a, b - \alpha)$, est contenu tout entier dans l'intervalle (a, b).

7. Dans tout espace métrique R une boule ouverte $B(a, r)$ est un ensemble ouvert. En effet, si $x \in B(a, r)$, on a $\rho(a, x) < r$. Posons $\varepsilon = r - \rho(a, x)$. Alors, $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

8. L'ensemble des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ telles que $f(t) < g(t)$, où $g(t)$ est une fonction continue fixée quelconque, est un sous-ensemble ouvert de l'espace $C[a, b]$.

Théorème 4. *Pour qu'un ensemble M soit ouvert, il faut et il suffit que son complémentaire $R \setminus M$ soit fermé.*

Démonstration. Si l'ensemble M est ouvert, tout point $x \in M$ possède un voisinage contenu dans M, c'est-à-dire n'ayant aucun point commun avec $R \setminus M$. Donc, aucun point n'appartenant

pas à $R \setminus M$ ne peut être adhérent à $R \setminus M$, ce qui signifie que $R \setminus M$ est fermé. Inversement, si $R \setminus M$ est fermé, tout point de M possède un voisinage inclus dans M, c'est-à-dire M est ouvert.

Etant donné que l'ensemble vide et tout l'espace R sont des ensembles fermés et en même temps chacun d'eux est le complémentaire de l'autre, on conclut que *l'ensemble vide et l'espace R sont des ensembles ouverts.*

Du théorème 3 et du principe de dualité (l'intersection des complémentaires est égale au complémentaire de la réunion, la réunion des complémentaires est égale au complémentaire de l'intersection, (cf. pages 9-10) on déduit le théorème important suivant, dual du théorème 3.

Théorème 3'. *Toute réunion (finie ou infinie) et toute intersection finie d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts.*

Les ensembles appartenant à la σ-algèbre minimale engendrée par tous les ensembles ouverts et fermés s'appellent *ensembles boréliens.*

5. Ensembles ouverts et fermés sur la droite. La structure des ensembles ouverts et fermés d'un espace métrique peut être très compliquée. Cela concerne même les ensembles ouverts et fermés d'un espace euclidien à deux ou plusieurs dimensions. Cependant, dans le cas d'une seule dimension, c'est-à-dire dans le cas de la droite, une description exhaustive de tous les ensembles ouverts (et donc de tous les ensembles fermés) ne présente pas de difficultés. Elle est donnée par le théorème suivant.

Théorème 5. *Tout ensemble ouvert de la droite numérique est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints*[1].

Démonstration. Soit G un ensemble ouvert de la droite numérique. Introduisons dans G une relation d'équivalence, en posant $x \sim y$, s'il existe un intervalle (α, β) tel que $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$. Il est évident que cette relation est réflexive et symétrique; elle est aussi transitive, car si $x \sim y$ et $y \sim z$, il y a deux intervalles (α, β) et (γ, δ) tels que

$$x, y \in (\alpha, \beta) \subset G \text{ et } y, z \in (\gamma, \delta) \subset G.$$

Mais alors $\gamma < \beta$, l'intervalle (α, δ) est inclus dans G et contient les points x et z. Par conséquent, l'ensemble G se trouve partagé en classes disjointes I_τ des points équivalents entre eux:

$$G = \bigcup I_\tau.$$

Démontrons que chaque I_τ est un intervalle (a, b), où $a = \inf I_\tau$, $b = \sup I_\tau$. L'inclusion $I_\tau \subset (a, b)$ est évidente. D'autre part, si

[1]) Les ensembles de la forme $(-\infty\ \ \infty)$, (α, ∞) et $(-\infty, \beta)$ sont aussi considérés comme des intervalles.

$x, y \in I_\tau$, par la définition même de I_τ on a $(x, y) \subset I_\tau$. A toute proximité de a à droite et à toute proximité de b à gauche il existe des points de I_τ. Donc, I_τ contient tout intervalle (a', b') dont les extrémités appartiennent à (a, b), d'où $I_\tau = (a, b)$. La famille d'intervalles disjoints I_τ ainsi obtenus est finie ou dénombrable ; en effet, en choisissant arbitrairement dans chacun de ces intervalles un point rationnel, on établira une correspondance biunivoque entre l'ensemble de ces intervalles et une partie de l'ensemble des nombres rationnels.

Le théorème est démontré.

Comme tout ensemble fermé est le complémentaire d'un ensemble ouvert, on en déduit que tout ensemble fermé de la droite numérique peut être obtenu, en retirant de la droite numérique un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles.

Fig. 8

Comme exemples élémentaires d'ensembles fermés de la droite numérique on peut citer les segments, les points isolés et les réunions de tels ensembles pris en nombre fini. Un exemple plus compliqué d'ensemble fermé de la droite numérique est fourni par l'*ensemble triadique de Cantor* que nous nous proposons de considérer ici.

Soit F_0 le segment $[0, 1]$. Supprimons l'intervalle $(1/3, 2/3)$ et désignons l'ensemble fermé qui reste par F_1. Ensuite, supprimons les intervalles $(1/9, 2/9)$ et $(7/9, 8/9)$ et désignons l'ensemble fermé qui reste (comportant quatre segments) par F_2. Dans chacun de ces quatre segments supprimons l'intervalle médian de longueur $(1/3)^3$, etc., (fig. 8). En répétant ce procédé, on obtient une suite décroissante d'ensembles fermés F_n. Posons

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

F est un ensemble fermé (comme intersection d'ensembles fermés). Il est obtenu du segment $[0, 1]$ par suppression d'une famille dénombrable d'intervalles.

Etudions la structure de l'ensemble F. Il contient, évidemment, les points

$$0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \ldots, \tag{1}$$

c'est-à-dire les extrémités des intervalles supprimés. Mais ces points n'épuisent pas l'ensemble F. En effet, les points du segment $[0, 1]$ qui appartiennent à l'ensemble F peuvent être caractérisés de la

manière suivante. Ecrivons chacun des nombres x, $0 \leqslant x \leqslant 1$ dans le système de base 3 :

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots,$$

où les nombres a_n peuvent prendre les valeurs 0, 1 et 2. Tout comme dans le cas des développements décimaux, certains nombres admettent deux représentations différentes. Par exemple,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \ldots + \frac{0}{3^n} + \ldots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^n} + \ldots$$

On vérifie aisément que l'ensemble F contient les points x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, et ceux-là seulement, qui admettent au moins un développement triadique tel que la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ne contienne pas le chiffre 1. Donc, à tout point $x \in F$ on peut faire correspondre une suite

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{2}$$

avec a_n égal à 0 ou à 2. L'ensemble de ces suites a la puissance du continu. Pour s'en convaincre il suffit de faire correspondre à chaque suite (2) une suite

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots \tag{2'}$$

avec $b_n = 0$ pour $a_n = 0$ et $b_n = 1$ pour $a_n = 2$. La suite (2′) peut être considérée comme le développement dyadique d'un nombre réel y, $0 \leqslant y \leqslant 1$. On obtient ainsi une application de l'ensemble F sur le segment [0, 1]. On en conclut que F a la puissance du continu [1]. Puisque l'ensemble des points (1) est dénombrable, ces points ne peuvent pas épuiser tout l'ensemble F.

Exercices. 1. Démontrer directement que le point $\frac{1}{4}$ appartient à l'ensemble F sans toutefois être l'extrémité d'un intervalle que l'on supprime.

Indication. Le point $\frac{1}{4}$ divise le segment [0, 1] dans le rapport 1 :3. Il divise dans le même rapport 1 :3 aussi le segment [0, 1/3] qui reste après la première suppression, etc.

Les points (1) sont appelés points *de première espèce* de l'ensemble F, les autres points de F étant appelés points *de seconde espèce.*

2. Démontrer que les points de première espèce forment un ensemble partout dense dans F.

3. Montrer que les nombres de la forme $t_1 + t_2$ avec $t_1, t_2 \in F$ remplissent tout le segment [0, 2].

---

[1]) La correspondance établie entre F et le segment [0, 1] est univoque, mais pas biunivoque (car certains nombres peuvent être représentés par deux développements différents). On en déduit que F a au moins la puissance du continu. Mais F est une partie du segment [0, 1], donc sa puissance ne peut pas être supérieure à celle du continu.

Nous avons montré que l'ensemble F a la puissance du continu ; c'est-à-dire qu'il contient autant de points que le segment [0, 1] tout entier.

Il est intéressant de comparer ce fait au résultat suivant : la somme des longueurs $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots$ des intervalles supprimés fait exactement 1 !

Remarques complémentaires

(1) Soient M un ensemble quelconque de l'espace métrique R et x un point de cet espace. On appelle *distance du point x à l'ensemble M* le nombre

$$\rho(x, M)=\inf_{a \in M} \rho(x, a).$$

Si $x \in M$, on a $\rho(x, M)=0$, mais du fait que $\rho(x, M)=0$ il ne résulte pas que $x \in M$. De la définition du point adhérent on déduit immédiatement que $\rho(x, M)=0$ si et seulement si x est un point adhérent à l'ensemble M.

Ainsi donc, l'opération de fermeture peut être définie comme l'adjonction à l'ensemble donné de tous les points dont la distance à cet ensemble est nulle.

(2) On définit de façon analogue la distance de deux ensembles. A et B étant deux ensembles de l'esepace métrique R, on pose

$$\rho(A, B)=\inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \rho(a, b).$$

Si $A \cap B \neq \varnothing$, on a $\rho(A, B)=0$; la réciproque n'est pas, en général, vraie.

(3) Soit M_K l'ensemble de toutes les fonctions f de l'espace $C[a, b]$, vérifiant la condition de Lipschitz : quels que soient $t_1, t_2 \in [a, b]$,

$$|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant K|t_2-t_1|,$$

où K est une constante. L'ensemble M_K est fermé. Il coïncide avec la fermeture de l'ensemble des fonctions dérivables sur $[a, b]$ et telles que $|f'(t)| \leqslant K$.

(4) L'ensemble $M=\bigcup_K M_k$ de toutes les fonctions dont chacune vérifie la condition de Lipschitz pour un certain K n'est pas fermé. Sa fermeture coïncide avec l'espace $C[a, b]$ tout entier.

(5) Un ensemble ouvert G de l'espace euclidien à n dimensions est appelé *ensemble connexe*, si n'importe quels deux points $x, y \in G$ peuvent être joints par une ligne brisée contenue toute entière dans G. Par exemple, l'intérieur du disque $x^2+y^2<1$ est un ensemble connexe. Par contre, la réunion des deux disques

$$x^2+y^2<1 \text{ et } (x-2)^2+y^2<1$$

n'est pas un ensemble connexe (bien que ces disques aient un point adhérent commun !). Un sous-ensemble ouvert H de l'ensemble ouvert G s'appelle *composante connexe* de G, s'il est connexe et n'est contenu dans aucun sous-ensemble ouvert et connexe (plus grand) de l'ensemble G. Introduisons dans G une relation d'équivalence : $x \sim y$, s'il existe un sous-ensemble ouvert et connexe H de G contenant x et y :

$$x, y \in H \subset G.$$

De même que dans le cas de la droite, on vérifie facilement que cette relation est transitive; G se décompose donc en classes disjointes: $G \bigcup I$. Ces classes sont des composantes connexes ouvertes de G. Elles forment un ensemble au plus dénombrable.

Pour $n=1$, c'est-à-dire sur la droite, tout ensemble ouvert et connexe est un intervalle (parmi les intervalles on compte aussi les ensembles $(-\infty, a)$,

(b, ∞) et $(-\infty, \infty)$). Ainsi, le théorème 5 sur la structure des ensembles ouverts de la droite renferme deux affirmations : a) tout ensemble ouvert de la droite est une réunion finie ou dénombrable de composantes connexes et b) tout ensemble ouvert et connexe de la droite est un intervalle. La première de ces affirmations est vraie également pour les ensembles des espaces euclidiens à n dimensions (et admet encore d'autres généralisations), tandis que la seconde ne se rapporte qu'à la droite.

§ 3. Espaces métriques complets

1. Définition et exemples d'espaces métriques complets. Dès les premiers pas dans l'étude de l'analyse mathématique on voit le rôle important joué par la propriété de complétude de la droite numérique, c'est-à-dire par le fait que toute suite de Cauchy de nombres réels converge vers un nombre réel. La droite numérique représente l'un des plus simples exemples d'espaces métriques dits complets dont les propriétés fondamentales seront étudiées dans ce paragraphe.

Une suite $\{x_n\}$ de points d'un espace métrique R est appelée *suite de Cauchy*, si elle vérifie la condition de Cauchy, c.-à-d. si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre N_ε tel que $\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$, quels que soient $n' > N_\varepsilon$ et $n'' > N_\varepsilon$.

De l'inégalité triangulaire on déduit immédiatement que toute suite convergente est une suite de Cauchy. En effet, si $\{x_n\}$ converge vers x, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre N_ε tel que $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tous les $n > N_\varepsilon$. Mais alors $\rho(x_{n'}, x_{n''}) \leqslant \leqslant \rho(x_{n'}, x) + \rho(x_{n'}, x) < \varepsilon$, quels que soient $n' > N_\varepsilon$ et $n'' > > N_\varepsilon$.

Définition 1. Si dans unespace métrique R toute suite de Cauchy est convergente, on dit que cet espace est *complet*.

Exemples. Tous les espaces considérés au § 1, excepté celui de l'exemple 8, sont complets. En effet :

1. Dans l'espace de points isolés (exemple 1, § 1) les seules suites de Cauchy sont les suites stationnaires, c.-à-d. les suites dont tous les termes, à partir d'un certain rang, sont égaux entre eux. Evidemment, toute suite de cette sorte est convergente ; donc, l'espace en question est complet.

2. La complétude de l'espace euclidien $\mathbf{R}^1$, dont les points constituent l'ensemble des nombres réels, est connue du cours d'analyse.

3. La complétude de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, découle immédiatement de la complétude de $\mathbf{R}^1$. En effet, soit $\{x^{(p)}\}$ une suite de Cauchy de points de $\mathbf{R}^n$; cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $N = N_\varepsilon$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2$$

pour tous les p et q supérieurs à N. Ici $x^{(p)} = \{x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\}$. Donc, pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$ on a l'inégalité

$$| x_k^{(p)} - x_k^{(q)} | < \varepsilon$$

quels que soient $p, q > N$, c.-à-d. $\{x_k^{(p)}\}$ est une suite numérique de Cauchy. Posons

$$x_k = \lim_{p \to \infty} x_k^{(p)} \quad \text{et} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Alors, il est évident que

$$\lim_{p \to \infty} x^{(p)} = x.$$

4-5. Pour démontrer que les espaces $\mathbf{R}_0^n$ et $\mathbf{R}_1^n$ sont complets on procède exactement de la même façon.

6. Démontrons que l'espace $C[a, b]$ est complet. Soit $\{x_n(t)\}$ une suite de Cauchy de $C[a, b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un tel N que

$$| x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon$$

quels que soient $n, m > N$ et t, $a \leqslant t \leqslant b$. Il en résulte que la suite $\{x_n(t)\}$ est uniformément convergente. Comme on le sait, dans ce cas sa limite $x(t)$ est une fonction continue. En faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient

$$| x_n(t) - x(t) | \leqslant \varepsilon$$

pour tous les t et pour tous les $n > N$, ce qui signifie que la suite $\{x_n(t)\}$ converge vers $x(t)$ au sens de la métrique de l'espace $C[a, b]$.

7. L'espace l_2. Soit $\{x^{(n)}\}$ une suite de Cauchy de l_2. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un tel N que

$$\rho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n, m > N, \qquad (1)$$

où

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots).$$

De (1) il résulte que pour tout k on a

$$(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon,$$

c.-à-d. que pour chaque k la suite de nombres réels $\{x_k^{(n)}\}$ est une suite de Cauchy, donc une suite convergente. Posons $x_k = \lim_{n \to \infty} x_k^{(n)}$. Désignons par x la suite $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$. Il s'agit de montrer que

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty, \quad \text{c.-à-d.} \quad x \in l_2,$$

b) $$\lim_{n \to \infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0.$$

C'est ce que nous ferons. De l'inégalité (1) il résulte que pour tout M fixé on a

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon.$$

Comme cette somme ne contient à présent qu'un nombre fini de termes, on peut, en fixant n, passer à la limite pour $m \to \infty$. Il vient

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon.$$

Cette égalité est vraie pour tout M. Reconstituons la série infinie, en passant à la limite pour $M \to \infty$; on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon. \qquad (2)$$

La convergence des séries $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2$ entraîne la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ (en vertu de l'inégalité évidente $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$). L'affirmation a) est donc démontrée. D'autre part, comme ε est aussi petit que l'on veut, l'inégalité (2) signifie que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2} = 0,$$

c.-à-d. que $x^{(n)} \to x$ au sens de la métrique de l_2. L'affirmation b) est ainsi démontrée.

8. On vérifie facilement que l'espace $C^2[a, b]$ n'est pas complet. Considérons, par exemple, la suite de fonctions continues

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nt & \text{pour } -\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{pour } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

C'est une suite de Cauchy dans $C^2[-1, 1]$, car

$$\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2\, dt \leqslant \frac{2}{\min(n, m)}.$$

Pourtant elle ne converge vers aucune fonction de $C^2[-1, 1]$. En effet, soient f une fonction quelconque de $C^2[-1, 1]$ et ψ une fonction discontinue, égale à -1 pour $t < 0$ et à $+1$ pour $t \geqslant 0$.

En vertu de l'inégalité intégrale de Minkowski (qui est évidemment vraie aussi pour les fonctions continues par morceaux), on a:

$$\left(\int_{-1}^{1} (f(t)-\psi(t))^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-1}^{1} (f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t)-\psi(t))^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Comme la fonction f est continue, l'intégrale du premier membre est différente de zéro. D'autre part, il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (\varphi_n(t)-\psi(t))^2\,dt = 0.$$

Donc, l'intégrale $\int_{-1}^{1} (f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt$ ne peut pas tendre vers zéro, quand $n \to \infty$.

Exercice. Démontrer que l'espace des suites bornées de nombres réels (exemple 9, § 1) est complet.

2. Théorème des boules emboîtées. En analyse on utilise largement une proposition, appelée théorème des segments emboîtés. Dans la théorie des espaces métriques un rôle analogue joue le théorème suivant que nous appellerons théorème des boules emboîtées.

Théorème 1. *Pour qu'un espace métrique R soit complet il faut et il suffit que toute suite de boules fermées emboîtées de R dont le rayon tend vers 0 ait une intersection non vide.*

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que l'espace R soit complet et considérons dans R une suite $B_1, B_2, B_3, \ldots$ de boules fermées emboîtées. Soient r_n le rayon et x_n le centre de la boule B_n. La suite des centres $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, car $\rho(x_n, x_m) < r_n$ pour $m > n$ et $r_n \to 0$, lorsque $n \to \infty$. Comme R est complet, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe. Posons

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n;$$

alors $x \in \bigcap\limits_n B_n$. En effet, la boule B_n contient tous les points de la suite $\{x_k\}$, sauf, peut être, les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ainsi, x est un point adhérent à chaque boule B_n. Et comme B_n est un ensemble fermé, $x \in B_n$ pour tous les n.

Pour montrer que la condition est suffisante considérons dans R une suite de Cauchy arbitraire $\{x_n\}$ et démontrons qu'elle est

convergente. La suite considérée étant une suite de Cauchy, on peut choisir, parmi ses termes, un point x_{n_1} tel que $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ pour tous les $n \geqslant n_1$. Désignons par B_1 la boule fermée de centre x_{n_1} et de rayon 1. Choisissons ensuite dans $\{x_n\}$ un point x_{n_2} tel que $n_2 > n_1$ et $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ pour tous les $n \geqslant n_2$. Désignons par B_2 la boule fermée de centre x_{n_2} et de rayon $\frac{1}{2}$. De façon générale, si les points $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$ sont déjà choisis, choisissons un point $x_{n_{k+1}}$, tel que $n_{k+1} > n_k$ et $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ pour tous les $n \geqslant n_{k+1}$, et entourons-le d'une boule fermée B_{k+1} de rayon $\frac{1}{2^k}$. En continuant cette construction, on obtiendra une suite de boules fermées emboîtées B_k de rayons respectifs $\frac{1}{2^{k-1}}$. Par hypothèse, cette suite de boules a un point commun ; désignons-le par x. Il est clair que ce point x est la limite de la sous-suite $\{x_{n_k}\}$. Mais si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente vers x, elle converge elle-même vers x. Donc dans ce cas on peur eirire: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Le théorème est démontré.

Exercices. 1. Démontrer que l'intersection des boules fermées emboîtées du théorème précédent se réduit à un seul point.

2. On appelle *diamètre* d'un ensemble M d'un espace métrique le nombre

$$d(M) = \sup_{x,\, y \in M} \rho(x, y).$$

Démontrer que dans un espace métrique complet toute suite d'ensembles (non vides) fermés emboîtés, dont le diamètre tend vers zéro, admet une intersection non vide.

3. Donner un exemple d'espace métrique complet et, dans cet espace, d'une suite de boules fermées emboîtées dont l'intersection soit vide.

4. Démontrer qu'un sous-espace d'un espace métrique complet R est complet si et seulement s'il est fermé dans R.

3. Théorème de Baire. Le théorème qui suit joue un róle fondamental dans la théorie des espaces métriques complets.

Théorème 2 (de Baire). *Un espace métrique complet R ne peut pas être mis sous la forme d'une réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses.*

Démonstration. Supposons le contraire. Soit $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ où chacun des ensembles M_n est nulle part dense. Soit S_0 une boule fermée de rayon 1. Comme l'ensemble M_1 est nulle part dense, il est non dense dans S_0 ; il existe donc une boule fermée

S_1 de rayon plus petit que $\frac{1}{2}$ telle que $S_1 \subset S_0$ et $S_1 \cap M_1 = \varnothing$. L'ensemble M_2 étant non dense dans S_1, la boule S_1 contient, pour la même raison, une boule fermée S_2 de rayon plus petit que $\frac{1}{3}$ telle que $S_2 \cap M_2 = \varnothing$, etc. On obtient ainsi une suite de boules fermées emboîtées $\{S_n\}$ dont les rayons tendent vers zéro et telles que $S_n \cap M_n = \varnothing$. En vertu du théorème 1 l'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ contient un point x. Par construction, ce point n'appartient à aucun des ensembles M_n ; par conséquent, $x \notin \bigcup_n M_n$, c.-à-d. $R \neq \bigcup_n M_n$, ce qui contredit l'hypothèse.

En particulier, *tout espace métrique complet sans points isolés est non dénombrable.* En effet, dans un tel espace tout point représente un ensemble nulle part dense.

4. Complétion d'un espace. Si R est un espace métrique non complet, il est toujours possible de le plonger (et, en un certain sens, de manière unique) dans un espace complet.

Définition 2. Soit R un espace métrique. L'espace métrique complet R^* s'appelle *complété* de l'espace R, si :

1) R est un sous-espace de R^* ;

2) R est partout dense dans R^*, c.-à-d. $[R] = R^*$.

(Ici $[R]$ désigne, naturellement, la fermeture de l'espace R dans R^*.)

Par exemple, l'espace $\mathbf{R}^1$ (exemple 2, § 1) est un complété de l'ensemble des nombres rationnels (muni de la même distance).

Théorème 3. *Tout espace métrique R admet un complété et ce complété est unique à une isométrie près qui laisse invariants les points de R.*

Démonstration. Commençons par l'unicité. Il nous faut démontrer que si R^* et R^{**} sont deux complétés de l'espace R, il existe une application biunivoque φ de l'espace R^* sur R^{**} telle que

1) $\varphi(x) = x$ pour tous les $x \in R$;

2) si $x^* \leftrightarrow x^{**}$ et $y^* \leftrightarrow y^{**}$, alors $\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**})$, où ρ_1 est la distance sur R^* et ρ_2 est la distance sur R^{**}.

On construit l'application φ de la manière suivante. Soit x^* un point quelconque de R^*. Alors, par la définition du complété, il existe une suite $\{x_n\}$ de points de R convergeant vers x^*. Les points de $\{x_n\}$ appartiennent aussi à R^{**}. Comme R^{**} est complet, la suite $\{x_n\}$ converge dans R^{**} vers un point x^{**}. Il est clair que x^{**} ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$ convergeant vers x^*. Posons $\varphi(x^*) = x^{**}$. L'application φ est l'isométrie cherchée.

5-0167

En effet, par construction, $\varphi(x) = x$ pour tous les $x \in R$. Soit, d'autre part,

$$\{x_n\} \to x^* \quad \text{dans} \quad R^* \quad \text{et} \quad \{x_n\} \to x^{**} \quad \text{dans} \quad R^{**},$$
$$\{y_n\} \to y^* \quad \text{dans} \quad R^* \quad \text{et} \quad \{y_n\} \to y^{**} \quad \text{dans} \quad R^{**};$$

alors, comme la distance est une fonction continue, on a

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

et, pour la même raison,

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Par conséquent,

$$\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Démontrons maintenant l'*existence* du complété. L'idée de cette démonstration est la même que dans la théorie cantorienne des nombres réels. Ici la situation est même plus simple que dans la théorie des nombres réels, car là pour les objets nouvellement introduits — les nombres irrationnels — on doit encore définir toutes les opérations arithmétiques.

Soit R un espace métrique quelconque. Nous dirons que deux suites de Cauchy $\{x_n\}$ et $\{x'_n\}$ de R sont équivalentes (notation $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$), si $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$. Le terme « équivalence » est justifié ici car la relation qu'on vient d'introduire est réflexive, symétrique et transitive. Il en résulte que toutes les suites de Cauchy que l'on peut former avec des points de l'espace R sont partagées en classes de suites équivalentes. Construisons maintenant l'espace R^*. Admettons comme points de R^* toutes les classes de suites de Cauchy équivalentes et définissons la distance entre elles de la manière suivante. Soient x^* et y^* deux de telles classes. Choisissons dans chacune d'elles un représentant, c.-à-d. une suite de Cauchy, soit $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ respectivement. Posons [1])

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{3}$$

Démontrons que cette définition de la distance est correcte, c.-à-d. que la limite (3) existe et ne dépend pas du choix des représentants $\{x_n\} \in x^*$ et $\{y_n\} \in y^*$.

Etant donné que $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont des suites de Cauchy, en vertu de l'inégalité

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m), \tag{4}$$

---

[1]) Pour ne pas encombrer l'écriture, nous désignons la distance sur R^* par le même symbole ρ que la distance sur l'espace initial R.

on a

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

pour tous les n et m suffisamment grands.

Ainsi, la suite de nombres réels $s_n = \rho(x_n, y_n)$ vérifie la condition de Cauchy et, par conséquent, a une limite.

Cette limite ne dépend pas du choix de $\{x_n\} \in x^*$ et $\{y_n\} \in y^*$. En effet, soient

$$\{x_n\}, \{x'_n\} \in x^* \quad \text{et} \quad \{y_n\}, \{y'_n\} \in y^*.$$

Un calcul analogue à (4) donne

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

Puisque $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ et $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Démontrons maintenant que dans R^* tous les axiomes de l'espace métrique sont vérifiés.

L'axiome 1) découle immédiatement de la définition des suites de Cauchy équivalentes.

L'axiome 2) est évident.

Montrons que l'inégalité triangulaire est aussi vérifiée. Comme dans l'espace initial R cet axiome est vérifié, on a

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n),$$

c.-à-d.

$$\rho(x^*, z^*) \leqslant \rho(x^*, y^*) + \rho(y^*, z^*).$$

Démontrons à présent que R peut être considéré comme un sous-espace de l'espace R^*.

A chaque point $x \in R$ correspond une classe de suites de Cauchy équivalentes, à savoir, l'ensemble des suites convergeant vers le point x. Cette classe n'est pas vide, car elle contient la suite stationnaire dont tous les termes sont égaux à x. Par ailleurs, si

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{et} \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

alors

$$\rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Donc, en faisant correspondre à tout point $x \in R$ la classe x^* de suites de Cauchy convergeant vers x, on obtient une application isométrique de R dans l'espace R^*.

Par la suite, nous pouvons ne pas faire de distinction entre l'espace R et son image dans R^*, c.-à-d. considérer R comme un sous-espace de R^*.

Montrons maintenant que R est partout dense dans R^*. En effet, soit x^* un point quelconque de R^* et soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire. Choisissons dans x^* un représentant, c.-à-d. une suite de Cauchy $\{x_n\}$. Soit N tel que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tous les n, $m > N$. On a alors

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

quel que soit $n > N$, ce qui signifie que tout voisinage du point x^* contient un point de R. Par conséquent, la fermeture de R dans R^* coïncide avec R^* tout entier.

Il reste à démontrer que R^* est complet. Remarquons tout d'abord que par la construction de R^* toute suite de Cauchy

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

de points de R converge dans R^* vers un certain point, plus précisément, vers le point $x^* \in R^*$ défini par cette suite même. D'autre part, comme R est dense dans R^*, pour toute suite de Cauchy x_1^*, x_2^*, . . ., x_n^*, . . . de points de R^* on peut construire une suite équivalente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de points de R. A cet effet, il suffit de prendre pour x_n n'importe quel point de R tel que $\rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$. La suite $\{x_n\}$ ainsi construite est une suite de Cauchy dans R et, par définition, converge vers un point $x^* \in R^*$. Mais alors la suite $\{x_n^*\}$ converge aussi vers x^*.

Le théorème est complètement démontré.

§ 4. Le principe des contractions et ses applications

1. Principe des contractions. De nombreuses questions, liées à l'existence et à l'unicité des solutions de certains types d'équations (par exemple, des équations différentielles), peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application de l'espace métrique correspondant dans lui-même. Parmi les différents critères d'existence et d'unicité d'un point fixe pour de telles applications, l'un des plus simples et à la fois des plus importants est celui qui porte le nom de *principe des contractions*.

Soit R un espace métrique. Une application A de l'espace R dans lui-même est appelée *application contractante* ou simplement *contraction*, s'il existe un nombre $\alpha < 1$ tel que pour tout couple de points $x, y \in R$ on a l'inégalité

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y). \qquad (1)$$

Toute application contractante est continue. En effet, si $x_n \to x$, en vertu de (1) on a également $Ax_n \to Ax$.

On dit que x est un *point fixe* pour l'application A, si $Ax = x$. Autrement dit, les points fixes sont les solutions de l'équation $Ax = x$.

Théorème 1. (Principe des contractions). *Toute contraction, définie sur un espace métrique complet R, admet un point fixe et un seul.*

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire de R. Posons

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A^2x_0, \ \ldots, \ x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0.$$

Montrons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. En effet, en posant, pour fixer les idées, $m \geqslant n$ on a

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant \\ &\leqslant \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leqslant \\ &\leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Comme $\alpha < 1$ pour n assez grand cette quantité peut devenir aussi petite que l'on veut. L'espace R étant complet, la suite de Cauchy $\{x_n\}$ a une limite dans R. Posons

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Alors, en vertu de la continuité de l'application A, on a

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

L'existence du point fixe est donc démontrée. Démontrons l'unicité de ce point. Si

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

l'inégalité (1) prend la forme

$$\rho(x, y) \leqslant \alpha\rho(x, y);$$

comme $\alpha < 1$, il vient

$$\rho(x, y) = 0, \quad \text{c.-à-d. } x = y.$$

Exercice. Montrer sur un exemple que l'application A qui vérifie la condition $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ pour tous les $x \neq y$ peut ne pas avoir de point fixe.

2. Applications simples du principe des contractions. Le principe des contractions peut être appliqué à la démonstration du théorème d'existence et d'unicité de la solution pour de nombreux types d'équations. Outre la démonstration de l'existence et de l'unicité de la

solution de l'équation $Ax = x$, le principe des contractions fournit une méthode effective de calcul approché de cette solution (méthode des approximations successives). Examinons les exemples simples suivants.

1. Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$ qui vérifie la condition de Lipschitz

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K |x_2 - x_1|$$

avec une constante $K < 1$ et qui représente une application du segment $[a, b]$ dans lui-même. Alors f est une contraction et, d'après

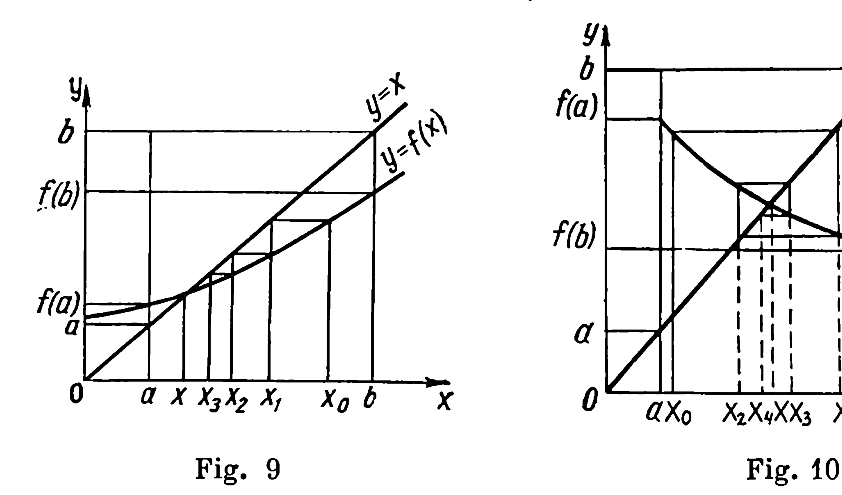


Fig. 9 Fig. 10

le théorème démontré, la suite x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... converge vers la racine unique de l'équation $x = f(x)$.

En particulier, f est une contraction, si elle est dérivable sur le segment $[a, b]$ et

$$|f'(x)| \leqslant K < 1.$$

Les figures 9 et 10 représentent la marche des approximations successives pour $0 < f'(x) < 1$ et pour $-1 < f'(x) < 0$.

Soit maintenant une équation de la forme $F(x) = 0$ telle que $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ et $0 < K_1 \leqslant F'(x) \leqslant K_2$ sur $[a, b]$. Introduisons la fonction $f(x) = x - \lambda F(x)$ et cherchons la solution de l'équation $x = f(x)$, équivalente à $F(x) = 0$. Comme $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, on a $1 - \lambda K_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \lambda K_1$; il est donc possible de choisir λ de façon qu'on puisse appliquer la méthode des approximations successives. C'est une méthode répandue de recherche des racines.

2. Considérons une application A d'un espace à n dimensions dans lui-même, donnée par le système d'équations linéaires

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si A est une contraction, nous pouvons appliquer la méthode des approximations successives à la résolution de l'équation $x = Ax$.

A quelles conditions donc l'application A est-elle une contraction? La réponse à cette question dépend du choix de la métrique. Examinons les trois cas suivants.

a) Espace $\mathbf{R}_0^n$, c.-à-d. $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i \left|\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}|\,|x'_j - x''_j| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x'_j - x''_j| =$$
$$= \left(\max_i \sum_j |a_{ij}|\right) \rho(x', x'').$$

D'où la condition cherchée:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

b) Espace $\mathbf{R}_1^n$, c.-à-d. $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i \left|\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}|\,|x'_j - x''_j| \leqslant \left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right) \rho(x', x'').$$

D'où la condition cherchée:

$$\sum_i |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

c) Espace $\mathbf{R}^n$, c.-à-d. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky on a

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\right)^2 \leqslant \left(\sum_i \sum_j a_{ij}^2\right) \rho^2(x', x'').$$

D'où la condition cherchée:

$$\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

Donc, si l'une au moins des conditions (2)-(4) est vérifiée [1]), il existe un point et un seul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j +$

[1]) En particulier, chacune des conditions (2)—(4) implique que

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$+ b_i$; les approximations successives de cette solution sont de la forme suivante:

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$
$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

et en qualité de $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ on peut prendre n'importe quel point de $\mathbf{R}^n$.

Chacune des conditions (2)-(4) est suffisante pour que l'application $y = Ax$ soit une contraction. Quant à la condition (2), on pourrait démontrer qu'elle est aussi nécessaire pour que l'application $y = Ax$ soit une contraction (au sens de la métrique a)).

Aucune des conditions (2)-(4) n'est nécessaire pour l'application de la méthode des approximations successives.

Si $| a_{ij} | < \frac{1}{n}$, toutes les trois conditions (2)-(4) sont vérifiées et la méthode des approximations successives est manifestement applicable.

Si $| a_{ij} | \geqslant \frac{1}{n}$, aucune des conditions (2)-(4) n'est vérifiée.

3. Théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations différentielles. Au numéro précédent nous avons examiné deux exemples simples d'application du principe des contractions dans un espace à une dimension et dans un espace à n dimensions. Pourtant, en analyse les applications les plus importantes de ce principe apparaissent dans le cas des espaces fonctionnels de dimension infinie. Nous allons montrer maintenant, comment à l'aide de ce principe on peut démontrer le théorème d'existence et d'unicité de la solution pour certains types d'équations différentielles et d'équations intégrales.

1. Problème de Cauchy. Soit une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{5}$$

à condition initiale

$$y(x_0) = y_0, \tag{6}$$

où la fonction f est définie et continue dans un domaine plan G contenant le point (x_0, y_0) et vérifie dans ce domaine la condition de

Lipschitz par rapport à y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M\,|y_1 - y_2|.$$

Démontrons qu'il existe alors une solution et une seule $y = \varphi(x)$ de l'équation (5), définie sur un segment $|x - x_0| \leqslant d$ et satisfaisant à la condition initiale (6) (théorème de Picard).

L'équation (5) avec la condition initiale (6) est équivalente à l'équation intégrale

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt. \tag{7}$$

En vertu de la continuité de f on a $|f(x, y)| < K$ dans un domaine $G' \subset G$ contenant le point (x_0, y_0). Choisissons $d > 0$ de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

1) $(x, y) \in G'$, si $|x - x_0| \leqslant d$, $|y - y_0| \leqslant Kd$;
2) $Md < 1$.

Désignons par C^* l'espace des fonctions continues φ, définies sur le segment $|x - x_0| \leqslant d$ et telles que $|\varphi(x) - y_0| \leqslant Kd$, doté de la métrique

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

L'espace C^* est complet, comme un sous-espace fermé de l'espace complet des fonctions continues sur $[x_0 - d, x_0 + d]$. Considérons l'application $\psi = A\varphi$ définie par la formule

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt,$$

où $|x - x_0| \leqslant d$. C'est une application de l'espace complet C^* dans lui-même et représente une contraction dans cet espace. En effet, soit $\varphi \in C^*$, $|x - x_0| \leqslant d$. Alors on a

$$|\psi(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\right| \leqslant Kd$$

et donc $A(C^*) \subset C^*$. D'autre part,

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant Md \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Comme $Md < 1$, A est une contraction.

Il en résulte que l'équation $\varphi = A\varphi$ (c.-à-d. l'équation (7)) admet dans l'espace C^* une solution et une seule.

2. Problème de Cauchy pour un système d'équations. Soit donné un système d'équations différentielles

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

à conditions initiales

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

où les fonctions f_i sont définies et continues dans un domaine G de l'espace R^{n+1} contenant le point $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$ et vérifient la condition de Lipschitz

$$|f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)} - f(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}| \leqslant M \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|.$$

Démontrons qu'il existe alors sur un segment $|x - x_0| \leqslant d$ une solution et une seule du problème initial (8), (9), c.-à-d. un système et un seul de fonctions φ_i, satisfaisant aux équations (8) et aux conditions initiales (9).

Le système (8) avec les conditions initiales (9) est équivalent au système d'équations intégrales

$$\varphi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

En vertu de la continuité, les fonctions f_i sont bornées dans un domaine $G' \subset G$ contenant le point $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$, c.-à-d. il existe une constante K telle que $|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant K$.

Choisissons $d > 0$ de façon que les conditions suivantes soient remplies:

1) $(x, y_1, \ldots, y_n) \in G'$, si $|x - x_0| \leqslant d$, $|y_i - y_{0i}| \leqslant Kd$; $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) $Md < 1$.

Considérons l'espace C_n^* ayant pour éléments les systèmes $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de n fonctions définies et continues pour $|x - x_0| \leqslant d$ et telles que $|\varphi_i(x) - y_{0i}| \leqslant Kd$. Définissons la métrique par la formule

$$\rho(\varphi, \psi) = \max_{x,\, i} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|.$$

L'espace ainsi défini est complet. L'application $\psi = A\varphi$, donnée par le système d'égalités

$$\psi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\,dt,$$

est une application contractante de l'espace complet C_n^* dans lui-même.

En effet,

$$\psi_i^{(1)}(x)-\psi_i^{(2)}(x)=\int_{x_0}^{x}[f_i(t,\ \varphi_1^{(1)}(t),\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)}(t))-$$
$$-f_i(t,\ \varphi_1^{(2)}(t),\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)}(t))]\,dt$$

et, par conséquent,

$$\max_{x,\ i}|\psi_i^{(1)}(x)-\psi_i^{(2)}(x)|\leqslant Md\max_{x,\ i}|\varphi_i^{(1)}(x)-\varphi_i^{(2)}(x)|.$$

L'application A est une contraction, car $Md<1$.

Il s'ensuit que l'équation opératorielle $\varphi = A\varphi$ admet dans l'espace C_n^* une solution et une seule.

4. Application du principe des contractions aux équations intégrales.

1. Equations de Fredholm. Utilisons maintenant la méthode des contractions pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm de deuxième espèce, c.-à-d. d'une équation de la forme.

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ y)f(y)\,dy+\varphi(x), \tag{11}$$

où K (*le noyau*) et φ sont des fonctions données, f est la fonction cherchée et λ est un paramètre arbitraire.

Nous verrons que ladite méthode n'est applicable que pour des valeurs assez petites du paramètre λ.

Supposons que $K(x, y)$ et $\varphi(x)$ soient continues pour $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$ et donc $|K(x, y)|\leqslant M$. Considérons l'application $g = Af$ de l'espace complet $C[a, b]$ dans lui-même, donnée par la formule

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ y)f(y)\,dy+\varphi(x).$$

On a

$$\rho(g_1, g_2) = \max|g_1(x) - g_2(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| M(b-a)\max|f_1(x)-f_2(x)|.$$

Par conséquent, pour $\lambda<\frac{1}{M(b-a)}$ l'application A est contractante.

D'après le principe des contractions on conclut que pour tout λ tel que $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ l'équation de Fredholm admet une solution continue unique. Les approximati ons successives de cette solu

tion $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ sont de la forme

$$f_n(x)=\lambda\int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y)\,dy+\varphi(x),$$

où en tant que $f_0(x)$ on peut prendre n'importe quelle fonction continue.

2. Equations intégrales non linéares. Le principe des contractions peut être appliqué aussi aux équations intégrales non linéaires du type

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x, y;\ f(y))\,dy+\varphi(x), \tag{12}$$

où K et φ sont des fonctions continues et, en outre, le noyau K satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à sa variable « fonctionnelle » :

$$|K(x, y;\ z_1)-K(x, y;\ z_2)| \leqslant M\,|z_1-z_2|.$$

Dans ce cas, pour l'application $g=Af$ de l'espace complet $C[a, b]$ dans lui-même, donnée par la formule

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x, y;\ f(y))\,dy+\varphi(x), \tag{13}$$

on a l'inégalité

$$\max|g_1(x)-g_2(x)| \leqslant |\lambda|\,M(b-a)\max|f_1(x)-f_2(x)|,$$

où $g_1=Af_1$, $g_2=Af_2$. Donc, pour $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ l'application A est contractante.

3. Equations de Volterra. Considérons enfin l'équation intégrale de Volterra:

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x, y)+f(y)\,dy+\varphi(x). \tag{14}$$

Ici, à la différence des équations de Fredholm, l'intégrale a pour borne supérieure la variable x. Formellement cette équation peut être considérée comme un cas particulier de l'équation de Fredholm, en prolongeant la fonction K par l'égalité

$$K(x, y)=0 \text{ pour } y>x.$$

Pourtant, si dans le cas d'une équation intégrale de Fredholm nous étions contraints à nous borner aux valeurs suffisamment petites du paramètre λ, dans le cas d'une équation de Volterra le principe des contractions (et la méthode des approximations suc-

cessives) est applicable pour toutes les valeurs de λ. Plus précisément, il s'agit de la généralisation suivante du principe des contractions:

Soit A une application continue de l'espace complet R dans lui-même dont une puissance $B = A^n$ est contraction; alors l'équation

$$Ax = x$$

a une solution et une seule.

En effet, soit x un point fixe de l'application B, c.-à-d. $Bx = x$. On a:

$$Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \to x \qquad (k \to \infty),$$

car, l'application B étant contractante, la suite Bx_0, B^2x_0, B^3x_0, ... converge pour tout $x_0 \in R$ vers le point fixe x de l'application B. Par conséquent,

$$Ax = x.$$

Ce point fixe est unique, car tout point fixe pour l'application A est fixe aussi pour l'application contractante A^n qui ne peut avoir qu'un seul point fixe.

Montrons maintenant qu'il existe une puissance de l'application

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy + \varphi_x$$

possédant la propriété d'être contraction. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$. Alors

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x, y)(f_1(y) - f_2(y))\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| M (x-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|,$$

où

$$M = \max |K(x, y)|.$$

On en déduit que

$$|A^2f_1(x) - A^2f_2(x)| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max |f_1(x) - f_2(x)|$$

et, plus généralement,

$$|A^nf_1(x) - A^nf_2(x)| \leqslant |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m \leqslant |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!},$$

où $m = \max |f_1(x) - f_2(x)|$.

Pour toute valeur de λ le nombre n peut être choisi assez grand pour que

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Alors l'application A^n sera une contraction. Par conséquent, l'équation de Volterra (14) admet pour tout λ une solution et une seule.

§ 5. Espaces topologiques

1. Définition et exemples d'espaces topologiques. Les notions fondamentales de la théorie des espaces métriques (point d'accumulation, point adhérent, fermeture d'un ensemble, etc.) ont été introduites à l'aide de la notion de voisinage ou, ce qui en fait revient au même, à l'aide de la notion d'ensemble ouvert. A leur tour, ces dernières notions (voisinage, ensemble ouvert) ont été définies à l'aide de la métrique, donnée dans l'espace considéré. Cependant, on peut suivre une autre voie: n'introduire dans l'ensemble donné R aucune métrique et définir dans R les ensembles ouverts directement, au moyen des axiomes. Cette voie qui offre beaucoup plus de liberté d'action conduit à la notion d'*espace topologique* dont l'espace métrique est un cas quelque peu spécial, bien que très important.

D é f i n i t i o n. Soit X un ensemble quelconque que nous appellerons support. On appelle *topologie* de X toute famille τ de sous-ensembles $G \subset X$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. L'ensemble X lui-même et l'ensemble vide $\varnothing$ appartiennent à τ.

2°. Toute réunion $\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$ (finie ou infinie) et toute intersection finie $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ d'ensembles de τ appartiennent à τ.

L'ensemble X avec une topologie donnée τ, c.-à-d. le couple (X, τ), s'appelle *espace topologique.*

Les ensembles appartenant à la famille τ sont dits *ouverts.*

De même qu'un espace métrique est formé par un ensemble de points (« support ») et une métrique définie sur cet ensemble, un espace topologique est formé par un ensemble de points et une topologie définie sur cet ensemble. Donc, donner un espace topologique, c'est donner un ensemble X et dans cet ensemble donner une topologie τ c.-à-d. indiquer les sous-ensembles de X qui seront considérés comme ouverts.

Il est clair que s u r u n m ê m e ensemble X on peut définir des topologies différentes, de sorte que cet ensemble peut être le support des espaces topologiques différents. Tout de même, nous désignerons un espace topologique, c.-à-d. un couple de la forme (X, τ) par une s e u l e lettre, par exemple, T. Les éléments d'un espace topologique seront appelés *points.*

Les complémentaires $T \setminus G$ des ensembles ouverts sont appelés *ensembles fermés* de l'espace topologique T. Des axiomes 1° et 2° il résulte en vertu des relations de dualité (§ 1, chap. I) que:

1. L'ensemble vide $\varnothing$ et l'espace T tout entier sont des ensembles fermés.

2. Toute intersection (finie ou infinie) et toute réunion finie d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.

Sur la base de ces définitions on introduit de façon naturelle dans tout espace topologique les notions de voisinage, de point adhérent, de fermeture d'un ensemble, etc. Plus précisément:

On appelle *voisinage* d'un point $x \in T$ tout ensemble ouvert $G \subset T$ contenant le point x; un point $x \in T$ est appelé *point adhérent* à un ensemble $M \subset T$, si tout voisinage de x contient au moins un point de M ; on dit que x est un *point d'accumulation* de l'ensemble M, si tout voisinage de x contient au moins un point de M autre que x. L'ensemble des points adhérents à l'ensemble M s'appelle *fermeture* de M et se note $[M]$. On démontre sans peine (cette démonstration est laissée au lecteur) que *les ensembles fermés* (considérés, conformément à la définition ci-dessus, comme complémentaires des ensembles ouverts) *sont les seuls qui vérifient la condition* $[M] = M$. *Ainsi que dans le cas d'un espace métrique*, $[M]$ *est le plus petit ensemble fermé contenant* M.

La définition des ensembles boréliens, formulée à la page 56 pour les espaces métriques, s'étend mot pour mot aux espaces topologiqus.

E x e r c i c e. Démontrer que l'opération de fermeture $[M]$, définie à l'aide de la topologie, possède les propriétés 1)—4) formulées dans le théorème 1, § 2.

E x e m p l e s. 1. En vertu du théorème 3′, § 2, les ensembles ouverts de tout espace métrique satisfont aux axiomes 1° et 2° de la définition d'un espace topologique. Par conséquent, tout espace métrique est en même temps un espace topologique.

2. Soit T un ensemble quelconque. Considérons comme ouverts tous ses sous-ensembles. Il est évident que les axiomes 1° et 2° sont vérifiés; donc, on obtient bien un espace topologique. Dans cet espace tous les ensembles sont à la fois ouverts et fermés et donc, chacun d'eux coïncide avec sa fermeture. Une topologie t r i v i a l e de cette sorte est, par exemple, celle de l'espace métrique indiqué dans l'exemple 1, § 1.

3. Un autre cas extrême peut être obtenu, si dans un ensemble quelconque X on considère la topologie dont les seuls ensembles sont X et $\varnothing$. Dans ce cas la fermeture de chaque ensemble non vide coïncide avec X tout entier. Un tel espace topologique peut être appelé « espace de points *collés* ».

4. Soit T un ensemble constitué de deux points a et b. Considérons comme ouverts l'ensemble T tout entier, l'ensemble vide et l'ensemble formé du seul point b. Les axiomes 1° et 2° sont vérifiés. Dans cet espace (que l'on appelle souvent *couple de points connexe*) les ensembles fermés sont: T tout entier, l'ensemble vide et l'ensemble dont le seul élément est a. La fermeture du singleton $\{b\}$ est T tout entier.

E x e r c i c e. Construire toutes les topologies possibles d'un ensemble X de deux, trois, quatre et cinq éléments.

2. Comparaison des topologies. Soient deux topologies τ_1 et τ_2 définies sur un même support X (on a alors deux espaces topologiques $T_1 = (X, \tau_1)$ et $T_2 = (X, \tau_2)$). On dit que la topologie τ_1 est *plus forte* ou *plus fine* que la topologie τ_2, si la famille d'ensembles τ_2 est contenue dans τ_1. Dans ce cas on dit encore que la topologie τ_2 est *plus faible* ou *plus grossière* que τ_1.

Dans l'ensemble de toutes les topologies possibles de l'ensemble X on introduit de façon naturelle une relation d'ordre partiel (la topologie τ_2 précède τ_1, si elle est plus faible que τ_1). Dans cet ensemble de topologies il existe un élément maximal: la topologie contenant comme ouverts tous les sous-ensembles de X (exemple 2), et un élément minimal: la topologie qui ne contient comme ensembles ouverts que X et $\varnothing$ (exemple 3).

Théorème 1. *Toute intersection* $\tau = \bigcap\limits_{\alpha} \tau_\alpha$ *de topologies de* X *est une topologie de* X. *Cette topologie* τ *est plus faible que chacune des topologies* τ_α.

Démonstration. Il est clair que $\bigcap\limits_{\alpha} \tau_\alpha$ contient X et $\varnothing$. D'autre part, comme chacun des ensembles τ_α est clos pour toute réunion et pour toute intersection finie de ses éléments, il en est de même de leur intersection $\tau = \bigcap\limits_{\alpha} \tau_\alpha$.

Corollaire. *Soit* $\mathfrak{B}$ *une famille quelconque de parties de* X; *il existe alors une topologie minimale de* X *contenant* $\mathfrak{B}$.

En effet, il existe des topologies contenant $\mathfrak{B}$ (par exemple, celle qui contient comme ensembles ouverts tous les $A \subset X$). L'intersection de toutes ces topologies est la topologie cherchée. On dit que cette topologie minimale est *engendrée par la famille* $\mathfrak{B}$ et on la note $\tau(\mathfrak{B})$.

Soit X un ensemble quelconque et A un sous-ensemble de X. On appelle *trace* de la famille $\mathfrak{B}$ sur le sous-ensemble A la famille $\mathfrak{B}_A$ des parties de X de la forme $A \cap B$, $B \in \mathfrak{B}$. Il est aisé de voir que la trace (sur A) de la topologie τ (définie sur X) est une topologie τ_A de A. Ainsi donc, tout sous-ensemble A d'un espace topologique est lui-même un espace topologique. L'espace topologique (A, τ_A) est appelé *sous-espace* de l'espace topologique initial (X, τ). Il est clair que deux topologies distinctes τ_1 et τ_2 de X peuvent engendrer une même topologie de $A \subset X$. La topologie τ_A s'appelle *topologie induite* par τ sur A.

3. Systèmes fondamentaux de voisinages. Base. Axiomes de dénombrabilité. Comme nous avons déjà vu, définir une topologie sur un ensemble quelconque c'est donner dans cet ensemble la famille des ensembles ouverts. Mais dans des problèmes concrets il est souvent commode de donner seulement une partie de la topologie, plus précisément une famille d'ensembles ouverts, à partir desquels on

peut déterminer de façon unique tous les ensembles ouverts de la topologie. Ainsi, par exemple, dans un espace métrique nous avons introduit d'abord la notion de boule ouverte (ε-voisinage) et défini ensuite les ensembles ouverts comme ensembles contenant avec tout point un ε-voisinage de ce point. Autrement dit, dans un espace métrique un ensemble est ouvert si et seulement s'il est une réunion (finie ou infinie) de boules ouvertes. En particulier, sur la droite numérique un ensemble est ouvert si et seulement s'il est une réunion d'intervalles. Ces considérations nous conduisent à la notion importante de b a s e d'un espace topologique.

D é f i n i t i o n. Une famille $\mathcal{G}$ d'ensembles ouverts s'appelle *base* de l'espace topologique T, si tout ensemble ouvert de T peut être représenté comme une réunion (finie ou infinie) d'ensembles de $\mathcal{G}$.

Ainsi, par exemple, l'ensemble des boules ouvertes (de centre et rayon arbitraires) d'un espace métrique est une base de cet espace. En particulier, l'ensemble de tous les intervalles est une base de la droite numérique. On obtiendra de même une base de la droite numérique, en se bornant aux intervalles à extrémités rationnelles, car tout intervalle et donc tout ensemble ouvert de la droite numérique peut être représenté comme une réunion de tels intervalles.

Ainsi donc, la topologie τ d'un espace T peut être donnée en indiquant une base $\mathcal{G}$ de cet espace; cette topologie τ coïncide alors avec la famille d'ensembles qui peuvent être représentés sous forme de réunions d'ensembles de $\mathcal{G}$.

Toute base $\mathcal{G}$ d'un espace topologique $T = (X, \tau)$ jouit des deux propriétés suivantes:

1) *tout point* $x \in X$ *appartient au moins à un ensemble* $G \in \mathcal{G}$,

2) *si* x *appartient à l'intersection de deux ensembles* G_1 *et* G_2 *de* $\mathcal{G}$, *il existe un ensemble* $G_3 \in \mathcal{G}$ *tel que*

$$x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2.$$

En effet, la propriété 1) signifie tout simplement que l'ensemble X, en tant qu'ensemble ouvert, doit représenter une réunion d'ensembles de $\mathcal{G}$; quant à la propriété 2), elle résulte du fait que $G_1 \cap G_2$ est un ensemble ouvert et représente donc une réunion d'ensembles de la base $\mathcal{G}$.

Réciproquement, soit X un ensemble quelconque et $\mathcal{G}$ une famille de parties de X possédant les propriétés 1) et 2). Alors, la famille d'ensembles qui peuvent être représentés sous forme de réunions d'ensembles de $\mathcal{G}$ est une topologie sur X (c.-à-d. vérifie les axiomes 1° et 2° de l'espace topologique).

En effet, soit $\tau(\mathcal{G})$ la famille contenant tous les sous-ensembles de X qui peuvent être mis sous forme de réunions d'ensembles de $\mathcal{G}$. Alors, l'ensemble vide [1]), l'ensemble X tout entier et toute réunion

[1]) Il peut être considéré comme la réunion d'une collection vide d'ensembles de la famille $\mathcal{G}$.

d'ensembles de $\tau(\mathcal{G})$ appartiennent à $\tau(\mathcal{G})$. Montrons que toute intersection finie d'ensembles de $\tau(\mathcal{G})$ appartient à $\tau(\mathcal{G})$. Il suffit de vérifier cela pour l'intersection de deux ensembles. Soient $A = \bigcup_\alpha G_\alpha$ et $B = \bigcup_\beta G_\beta$; alors $A \cap B = \bigcup_{\alpha, \beta} (G_\alpha \cap G_\beta)$. En vertu de la propriété 2), tout ensemble $G_\alpha \cap G_\beta$ appartient à $\tau(\mathcal{G})$. Il en résulte que $A \cap B \in \tau(\mathcal{G})$.

Ainsi, nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 2. *Pour qu'une famille $\mathcal{G}$ de parties G d'un ensemble X soit la base d'une topologie de X, il faut et il suffit que $\mathcal{G}$ possède les propriétés* 1) *et* 2).

Soit maintenant τ une topologie bien déterminée de l'espace T. Considérons dans T une famille $\mathcal{G}$ d'ensembles ouverts jouissant des propriétés 1) et 2). En adoptant $\mathcal{G}$ comme base, nous obtiendrons, évidemment, une topologie $\tau(\mathcal{G})$ de T coïncidant avec la topologie initiale τ ou plus faible que celle-ci. On se propose d'établir, à quelles conditions la famille $\mathcal{G}$ engendre exactement la topologie donnée τ.

Théorème 3. *Pour qu'une famille d'ensembles ouverts $\mathcal{G} \subset \tau$ soit base de la topologie τ, il faut et il suffit que :*

3) *pour tout ensemble ouvert G et tout point $x \in G$ il existe un ensemble $G_x \in \mathcal{G}$ tel que $x \in G_x \subset G$.*

Démonstration. Si la condition 3) est vérifiée, tout ensemble ouvert G peut être mis sous la forme

$$G = \bigcup_{x \in G} G_x,$$

ce qui signifie que $\mathcal{G}$ est une base de la topologie τ. Inversement, si $\mathcal{G}$ est une base de la topologie τ, tout ensemble $G \in \tau$ peut être représenté comme une réunion d'ensembles de $\mathcal{G}$ et alors pour tout $x \in G$ il existe un ensemble $G_x \in \mathcal{G}$ tel que $x \in G_x \subset G$.

Exercice. Soient $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux bases de topologie dans X (c.-à-d. deux familles d'ensembles satisfaisant aux conditions 1) et 2) p. 81) et τ_1 et τ_2 les topologies qu'elles définissent. Démontrer que $\tau_1 \subset \tau_2$ si et seulement si pour tout $G_1 \in \mathcal{G}_1$ et tout point $x \in G_1$ il existe un ensemble $G_2 \in \mathcal{G}_2$ tel que $x \in G_2 \subset G_1$.

A l'aide du théorème 3 on démontre facilement, par exemple, que dans tout espace métrique l'ensemble de toutes les boules ouvertes est une base de sa topologie. Il en est de même pour l'ensemble de toutes les boules de rayon rationnel. Sur la droite numérique on obtient une base si l'on considère par exemple l'ensemble des intervalles rationnels (c.-à-d. à extrémités rationnelles).

Une classe importante d'espaces topologiques est formée par les espaces à base dénombrable, c.-à-d. par les espaces possédant au moins une base comportant un nombre fini

ou une infinité dénombrable d'ensembles. Les espaces à base dénombrable s'appellent aussi *espaces satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité.*

Si l'espace topologique T possède une base dénombrable, alors il existe un ensemble dénombrable partout dense dans T, c.-à-d, un ensemble dénombrable dont la fermeture coïncide avec T. En effet, soit $\{G_n\}$ une telle base. Choisissons dans chacun de ses éléments un point arbitraire x_n. L'ensemble dénombrable $X = \{x_n\}$ est partout dense dans T, car dans le cas contraire l'ensemble ouvert non vide $G = T \setminus [X]$ ne contiendrait aucun point de X, ce qui est impossible, étant donné que G est une réunion d'ensembles de la famille $\{G_n\}$ et $x_n \in G_n$.

Les espaces topologiques possédant un ensemble dénombrable partout dense, de même que les espaces métriques, sont dits *séparables.*

Pour les espaces métriques on a aussi le théorème réciproque de celui que nous venons de démontrer :

Si l'espace métrique R est séparable, il possède une base dénombrable. En effet, une telle base est, par exemple, l'ensemble des boules ouvertes $B(x_n, 1/m)$, où $\{x_n\}$ est un ensemble dénombrable partout dense, n et m parcourent indépendamment l'un de l'autre l'ensemble des nombres naturels. On a donc le théorème suivant :

Théorème 4. *Un espace métrique R possède une base dénombrable si et seulement s'il est séparable.*

En vertu de ce théorème tous les exemples d'espaces métriques séparables peuvent servir d'exemples d'espaces métriques satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. L'espace non séparable des suites bornées (cf. exemple 9 § 1) n'a pas de base dénombrable.

Remarque. Le théorème 4 n'est pas, en général, vrai pour des espaces topologiques arbitraires (non métriques) : on peut indiquer des exemples d'espaces séparables sans base dénombrable. Donnons une explication de ces phénomènes. Dans un espace métrique R il existe pour tout point x un ensemble dénombrable $\mathfrak{U}$ de voisinages (par exemple, l'ensemble des boules ouvertes $B(x, 1/n)$) possédant la propriété suivante : quel que soit l'ensemble ouvert G contenant le point x, il existe dans $\mathfrak{U}$ un voisinage de x, contenu tout entier dans G. Un ensemble tel que $\mathfrak{U}$ s'appelle *système fondamental de voisinages* du point x.

Si le point x d'un espace topologique T possède un système fondamental de voisinages, on dit que ce point satisfait au *premier axiome de dénombrabilité.* Si cela a lieu pour tout point de l'espace T, on dit que cet espace *satisfait au premier axiome de dénombrabilité.*

Tout espace métrique, même non séparable, satisfait manifestement au premier axiome de dénombrabilité. Pourtant dans un espace topologique arbitraire (même s'il n'est que dénombrable) le premier axiome de dénombrabilité peut ne pas avoir lieu. C'est

pourquoi les raisonnements qui nous ont permis dans le cas d'un espace métrique de conclure que l'existence d'un ensemble dénombrable partout dense implique l'existence d'une base dénombrable ne sont plus valables dans le cas d'un espace topologique arbitraire. Du reste, même dans un espace topologique séparable satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité il peut ne pas y avoir de base dénombrable.

Une famille d'ensembles $\{M_\alpha\}$ est appelée *recouvrement* de l'ensemble X, si $\bigcup_\alpha M_\alpha = X$. Un recouvrement de l'espace topologique T constitué d'ensembles ouverts (fermés) est dit *recouvrement ouvert* (*fermé*). Si une partie $\{M_{\alpha_i}\}$ du recouvrement $\{M_\alpha\}$ est elle-même un recouvrement de l'espace T, on dit que $\{M_{\alpha_i}\}$ est un *sous-recouvrement* de $\{M_\alpha\}$.

Théorème 5. *Si T est un espace topologique à base dénombrable, de tout recouvrement ouvert de T on peut extraire un sous-recouvrement fini ou dénombrable.*

Démonstration. Soit $\{O_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de l'espace T. Alors tout point $x \in T$ appartient à un ensemble $\{O_\alpha\}$. Soit, d'autre part, $\{G_n\}$ une base dénombrable de T. Pour tout point $x \in T$ il existe un élément $G_n(x)$ de cette base tel que $x \in G_n(x) \subset O_\alpha$. La famille d'ensembles $G_n(x)$ ainsi choisis est finie ou dénombrable et recouvre tout l'espace T. En choisissant pour chaque $G_n(x)$ un ensemble O_α parmi ceux qui le contiennent, on obtiendra bien un sous-recouvrement fini ou dénombrable du recouvrement $\{O_\alpha\}$.

Le théorème est démontré.

Selon la définition d'un espace topologique, l'ensemble vide et l'espace T tout entier sont à la fois ouverts et fermés. L'espace qui ne contient aucun autre ensemble à la fois ouvert et fermé s'appelle espace *connexe*. La droite numérique $\mathbf{R}^1$ représente l'un des plus simples exemples d'espace connexe. Mais si l'on rejette un ou plusieurs points de $\mathbf{R}^1$, l'espace qui reste n'est plus connexe.

4. Suites convergentes dans T. Il est aisé d'étendre aux espaces topologiques la notion de suite convergente, bien connue pour le cas des espaces métriques. Nous dirons qu'une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de points de T est *convergente vers le point x*, si tout voisinage du point x contient tous les points de cette suite à partir d'un certain rang. Toutefois, dans les espaces topologiques la notion de convergence ne joue pas un rôle si important que dans les espaces métriques. Cela tient à ce que dans un espace métrique R un point x est adhérent à un ensemble $M \subset R$ si et seulement s'il existe dans M une suite convergente vers x, tandis que dans un espace topologique il n'en est pas en général de même. Dans un espace topologique T le fait que x est un point adhérent à l'ensemble M

(c.-à-d. $x \in [M]$) n'entraîne pas l'existence dans M d'une suite convergente vers x. Considérons, à titre d'exemple, le segment $[0, 1]$ et appelons ensembles ouverts tous les sous-ensembles de $[0, 1]$ (y compris l'ensemble vide) obtenus en retirant de ce segment un nombre fini ou une infinité dénombrable de points. Il est aisé de vérifier que les conditions 1° et 2° (p. 78) sont vérifiées, de sorte qu'on a bien un espace topologique. Dans cet espace, les seules suites convergentes sont les suites stationnaires, c.-à-d. celles dont tous les termes, à partir d'un certain rang, sont égaux: $x_n = x_{n+1} = \ldots$ (démontrer !). D'autre part, si l'on prend, par exemple, $M = (0, 1]$, le point 0 est adhérent à M (vérifier !) et pourtant aucune suite de points de M ne converge dans l'espace considéré vers le point 0.

Les suites convergentes se trouvent « restituées dans leurs droits », si les espaces topologiques considérés ne sont pas arbitraires, mais satisfont au premier axiome de dénombrabilité, c.-à-d. si chaque point x de l'espace T possède un système fondamental dénombrable de voisinages. Dans ce cas, tout point x adhérent à un ensemble quelconque $M \subset T$ peut être interprété comme la limite d'une suite de points de M. En effet, soit $\{O_n\}$ un système fondamental dénombrable de voisinages du point x. On peut toujours supposer que $O_{n+1} \subset O_n$ (sinon, on remplacerait O_n par $\bigcap\limits_{k=1}^{n} O_k$). Soit x_k un point quelconque de M, appartenant à O_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Il est clair qu'un tel x_k existe, car autrement x ne serait pas un point adhérent à M. La suite $\{x_k\}$ est évidemment convergente vers x.

Comme nous l'avons déjà signalé, tous les espaces métriques satisfont au premier axiome de dénombrabilité. C'est ce qui nous a permis de formuler dans un espace métrique les notions telles que fermeture, point adhérent, etc., en termes de convergence de suites.

5. Applications continues. Homéomorphisme. La notion d'application continue, introduite au § 1 pour des espaces métriques, peut être étendue de façon naturelle aux espaces topologiques arbitraires.

Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques. On dit que l'application f de l'espace X dans l'espace Y est *continue au point* x_0, si pour tout voisinage U_{y_0} du point $y_0 = f(x_0)$ il existe un voisinage V_{x_0} du point x_0 tel que $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$. L'application $f: X \to Y$ est appelée *continue*, lorsqu'elle est continue en tout point $x \in X$. En particulier, une application continue de l'espace topologique X dans la droite numérique s'appelle *fonction continue* sur cet espace.

On se convainc facilement que pour les espaces métriques cette définition coïncide avec celle de la continuité d'une application d'un espace métrique dans un autre, donnée au § 1.

La définition ci-dessus est de nature « locale ». La continuité de l'application f sur tout l'espace X est définie à l'aide de la continuité de f en tout point de X. Il se trouve que la notion de continuité de

l'application d'un espace topologique dans un autre peut être formulée en termes d'ensembles ouverts, c.-à-d. en termes de topologie de ces espaces.

Théorème 6. *Pour qu'une application f de l'espace topologique X dans l'espace topologique Y soit continue, il faut et il suffit que l'image réciproque $\Gamma = f^{-1}(G)$ de tout ensemble ouvert $G \subset Y$ soit ouverte (dans X).*

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons que l'application f soit continue et soit G un ensemble ouvert de Y. Démontrons que l'ensemble $\Gamma = f^{-1}(G)$ est ouvert. Soit x un point quelconque de Γ et $y = f(x)$. Alors, G est un voisinage du point y. Par la définition de la continuité, il existe un voisinage V_x du point x tel que $f(V_x) \subset G$, c.-à-d. $V_x \subset \Gamma$. Autrement dit, si $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V_x de x contenu dans Γ, ce qui signifie que Γ est bien un ensemble ouvert.

La condition est suffisante. Supposons $\Gamma = f^{-1}(G)$ ouvert pour tout ouvert $G \subset Y$. Considérons un point quelconque $x \in X$ et un voisinage quelconque U_y du point $y = f(x)$. Puisque $y \in U_y$, on a $x \in f^{-1}(U_y)$. L'ensemble ouvert $f^{-1}(U_y)$ est donc un voisinage du point x dont l'image est contenue dans U_y.

Le théorème est démontré.

Remarque. Soient X et Y deux ensembles quelconques et f une application de X dans Y. Si l'on définit sur Y une topologie τ (c.-à-d. une famille d'ensembles, contenant $\varnothing$ et Y et close pour toute réunion et pour toute intersection finie d'ensembles), alors l'image réciproque de cette topologie τ (c.-à-d. la famille de tous les ensembles $f^{-1}(G)$, où $G \in \tau$) est une topologie de X.

Pour la démonstration il suffit de se rappeler les théorèmes sur l'image réciproque d'une réunion et d'une intersection d'ensembles (cf. § 2 chap. I). Nous désignerons cette topologie par $f^{-1}(\tau)$. Si maintenant X et Y sont des espaces topologiques avec τ_x et τ_y comme topologies, le théorème 6 peut être formulé comme suit : *l'application $f: X \to Y$ est continue si et seulement si la topologie τ_x est plus forte que la topologie $f^{-1}(\tau_y)$.*

Du fait que l'image réciproque du complémentaire est égale au complémentaire de l'image réciproque on déduit le théorème suivant, dual du théorème 6.

Théorème 6′. *Pour qu'une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y soit continue, il faut et il suffit que l'image réciproque de tout ensemble fermé de Y soit un ensemble fermé (dans X).*

On vérifie facilement que l'image d'un ensemble ouvert (fermé) par une application continue n'est pas nécessairement ouvert (fer-

mé). Considérons, par exemple, une application continue de l'intervalle semi-ouvert $[0, 1)$ sur une circonférence. L'ensemble $[^1/_2, 1)$, fermé dans $[0, 1)$, a pour image sur la circonférence un ensemble non fermé (fig. 11).

Pour les applications continues on a le théorème suivant, analogue au théorème bien connu de l'analyse sur la continuité d'une fonction composée.

Théorème 7. *Soient X, Y et Z trois espaces topologiques. Si les applications $f: X \to Y$ et $\varphi: Y \to Z$ sont continues, l'application $x \to \varphi(f(x))$ de X dans Z est aussi continue.*

La démonstration de ce théorème s'obtient immédiatement du théorème 6.

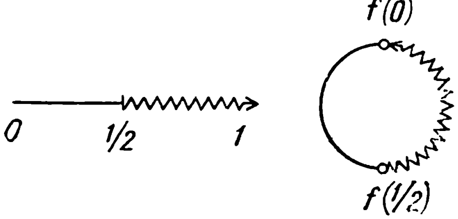


Fig. 11

La notion d'homéomorphisme, introduite au § 1 pour les espaces métriques, s'étend aux espaces topologiques. A savoir, l'application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y s'appelle *homéomorphisme*, lorsqu'elle est biunivoque et bicontinue : les espaces X et Y sont dits alors *espaces homéomorphes*. Deux espaces homéomorphes possèdent les mêmes propriétés topologiques et, du point de vue topologique, peuvent être considérés simplement comme deux exemplaires du même espace. Les topologies de deux espaces homéomorphes représentent l'image et l'image réciproque l'une de l'autre. La relation d'homéomorphisme est réflexive, symétrique et transitive ; par conséquent, tout ensemble d'espaces topologiques se trouve divisé en classes disjointes d'espaces homéomorphes entre eux.

Remarque. Il importe de noter que les propriétés métriques de deux espaces métriques homéomorphes peuvent être différentes [1]). Par exemple, l'un d'eux peut être complet sans que l'autre le soit. Ainsi, l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ est homéomorphe à la droite numérique (l'homéomorphisme peut être donné, par exemple, à l'aide de la fonction $x \to \operatorname{tg} x$) ; or, la droite numérique est un espace complet, tandis que l'intervalle ne l'est pas.

6. Axiomes de séparation. Bien que de nombreuses notions fondamentales des espaces métriques s'étendent sans difficulté aux espaces topologiques arbitraires, ces derniers représentent tout de même un objet trop général du point de vue des problèmes de l'ana-

---

[1]) La métrique d'un espace R définit de façon unique sa topologie, mais la réciproque n'est pas vraie : la même topologie de l'espace $R = (X, \rho)$ peut être obtenue à l'aide des métriques différentes, définies sur X.

lyse. Dans ces espaces on rencontre souvent des situations essentiellement différentes de celles qui peuvent apparaître dans les espaces métriques. Ainsi, nous avons vu que dans un espace topologique un ensemble fini de points peut ne pas être fermé (exemple 4, p. 79), etc.

Parmi les espaces topologiques on peut distinguer des espaces qui par leurs propriétés sont plus proches des espaces métriques. Pour cela il faut ajouter aux axiomes 1° et 2° de l'espace topologique (p. 78) certaines conditions supplémentaires. C'est le cas, par exemple des axiomes de dénombrabilité ; ils permettent d'étudier la topologie d'un espace en partant de la notion de convergence. Un autre type important de conditions supplémentaires est fourni par les conditions d'une autre nature, nommées *axiomes de séparation*. Nous énumérerons ci-après les axiomes de cette série dans l'ordre de leur renforcement successif.

Axiome T_1 (*premier axiome de séparation*) : quels que soient deux points distincts x et y de l'espace T, il existe un voisinage O_x du point x, ne contenant pas y, et un voisinage O_y du point y, ne contenant pas x.

Les espaces satisfaisant à cet axiome s'appellent *T_1-espaces*. Un exemple d'espace topologique qui n'est pas T_1-espace est fourni par le couple de points connexe.

Dans un T_1-espace tout singleton est un ensemble fermé. En effet, si $x \neq y$, il existe un voisinage O_y du point y, ne contenant pas x, c.-à-d. $y \notin [\{x\}]$. De ce fait, $[\{x\}] = \{x\}$. Par conséquent, dans un T_1-espace tout ensemble fini de points est également fermé. De plus, on vérifie sans peine que l'axiome T_1 équivaut exactement à la condition que tous les ensembles de cette sorte soient fermés.

Plus haut (cf. p. 79) nous avons appelé point d'accumulation d'un ensemble M de l'espace topologique T tout point $x \in T$ tel que $U \cap M \setminus \{x\} \neq \varnothing$, U étant un voisinage arbitraire du point x.

Dans des espaces ne satisfaisant pas à l'axiome T_1, même un ensemble fini peut avoir des points d'accumulation. En effet, soit, par exemple, T un couple de points connexe dont la topologie est formée par les ensembles $\varnothing$, $\{b\}$ et $\{a, b\}$. Alors le point a est un point d'accumulation de l'ensemble $M = \{b\}$.

Dans les T_1-espaces un tel phénomène est impossible. Plus précisément, on a la proposition suivante.

L e m m e. *Pour que le point x soit un point d'accumulation de l'ensemble M d'un T_1-espace, il faut et il suffit que tout voisinage U de ce point contienne une infinité de points de M.*

Il est évident que cette condition est suffisante. Démontrons qu'elle est nécessaire. Soit x un point d'accumulation de M ; supposons qu'il existe un voisinage U du point x ne contenant qu'un nombre fini de points de M. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tous ces points, excepté

le point x (s'il appartient à M). Alors, $V = U \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un voisinage de x et $V \cap M \setminus \{x\} = \varnothing$.

Tout espace métrique est manifestement un T_1-espace. C'est pourquoi dans un espace métrique la notion de point d'accumulation d'un ensemble a été introduite en partant de la propriété indiquée dans le lemme ci-dessus.

L'axiome suivant est un renforcement du premier axiome de séparation.

Axiome T_2 (deuxième axiome de séparation ou axiome de Hausdorff) : quels que soient deux points distincts x et y d'un espace topologique T, il existe deux voisinages O_x et O_y disjoints.

Les espaces satisfaisant à cet axiome s'appellent *T_2-espaces* ou *espaces de Hausdorff*. Tout espace de Hausdorff est un T_1-espace, mais pas inversement. Un exemple de T_1-espace qui n'est pas un espace de Hausdorff est fourni par le segment [0, 1] dont la topologie est formée par l'ensemble vide et tous les ensembles obtenus de ce segment en rejetant un nombre fini ou une infinité dénombrable de points.

Axiome T_3 (troisième axiome de séparation) : tout point et tout ensemble fermé ne contenant pas ce point possèdent des voisinages disjoints. Notons que dans un espace topologique T on appelle *voisinage d'un ensemble M* tout ensemble ouvert U contenant M.

Cet axiome peut être énoncé sous la forme équivalente suivante :

Pour tout voisinage U d'un point quelconque x il existe un voisinage plus petit de ce point, contenu dans U avec sa fermeture.

Le lecteur pourra démontrer cela à titre d'exercice.

Puisque dans un espace topologique arbitraire un ensemble d'un seul point peut ne pas être fermé, le troisième axiome de séparation présente de l'intérêt seulement pour les espaces satisfaisant à l'axiome T_1. Les espaces satisfaisant aux deux axiomes T_1 et T_3 à la fois sont appelés *espaces réguliers*.

Tout espace régulier est évidemment un espace de Hausdorff. On obtiendra un exemple d'espace de Hausdorff non régulier, en considérant le segment [0, 1], où les voisinages de tous les points, excepté 0, sont définis comme d'ordinaire, tandis que le point 0 admet pour voisinages tous les intervalles semi-ouverts $[0, \alpha)$, d'où l'on a retiré les points du type $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. C'est bien un espace de Hausdorff non régulier, car le point 0 et la suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ qui est un ensemble fermé ne contenant pas 0, n'a pas de voisinages disjoints.

En analyse on n'a pas d'habitude affaire à des espaces plus généraux que les espaces réguliers. Bien au contraire, les espaces les plus intéressants du point de vue de l'analyse satisfont encore à la condition plus forte suivante, nommée condition d e n o r m a l i t é de l'espace.

Axiome T_4 (*axiome de normalité*): un T_1-espace est dit *espace normal*, si pour n'importe quels deux ensembles fermés disjoints de cet espace il existe des voisinages disjoints.

En particulier, tous les espaces métriques sont normaux. En effet, soient X et Y deux ensembles fermés disjoints de l'espace métrique R. Tout point $x \in X$ possède un voisinage O_x qui ne rencontre pas Y; par conséquent, il se trouve à une distance positive ρ_x de Y. De même, la distance de tout point $y \in Y$ à l'ensemble X est un nombre positif ρ_y. Considérons les ensembles ouverts [1])

$$U = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{\rho_x}{2}\right) \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{y \in Y} B\left(y, \frac{\rho_y}{2}\right)$$

contenant respectivement X et Y et montrons que leur intersection est vide. Supposons qu'il existe un point $z \in U \cap V$. Alors il existe dans X un point x_0 tel que $\rho(x_0, z) < \rho_x/2$ et dans Y un point y_0 tel que $\rho(z, y_0) < \rho_{y_0}/2$. Soit, par exemple, $\rho_{x_0} \leqslant \rho_{y_0}$. On a alors

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) < \frac{\rho_{x_0}}{2} + \frac{\rho_{y_0}}{2} \leqslant \rho_{y_0},$$

c.-à-d. $x_0 \in B(y_0, \rho_{y_0})$. Comme cela contredit la définition de ρ_{y_0}, notre affirmation est démontrée.

Tout sous-espace d'un espace métrique, étant lui-même un espace métrique, possède toujours la propriété d'être normal. Il n'en est pas en général de même, lorsqu'il s'agit des espaces normaux arbitraires: un sous-espace d'un espace normal n'est pas forcément un espace normal. Autrement dit, la normalité des espaces n'est pas une propriété héréditaire [2]).

Un exemple de propriété héréditaire est fourni par la *régularité complète* des espaces topologiques qui constitue un renforcement de la propriété de régularité. Un T_1-espace topologique est appelé *complètement régulier*, si pour tout ensemble fermé $F \subset T$ et pour tout point $x_0 \in T \setminus F$ il existe une fonction réelle f, continue sur T, nulle en x_0, égale à 1 sur F et vérifiant la condition $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Tout espace normal est complètement régulier [3]), mais pas réciproquement. Tout sous-espace d'un espace complètement régulier (éventuellement, normal) est aussi complètement régulier. La notion d'espace complètement régulier est due à A. Tikhonov qui a montré par ailleurs que la classe des espaces complètement réguliers coïncide

---

[1]) Ici $B(x, r)$ est, comme d'habitude, une boule ouverte de rayon r et de centre x.

[2]) Une propriété P est dite *héréditaire*, si du fait qu'un espace topologique T la possède il résulte que tous les sous-espaces de T la possèdent également.

[3]) Ce fait (nullement évident) est une conséquence du théorème suivant, dû à P. S. Urysohn: si T est un espace normal et F_1, F_2 sont deux sous-ensembles fermés disjoints de T, il existe une fonction f continue sur T, vérifiant la condition $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, nulle sur F_1 et égale à 1 sur F_2.

avec la classe de tous les sous-espaces des espaces normaux. Du point de vue de l analyse les espaces complètement réguliers sont importants grâce au fait que sur un tel espace il y a des fonctions continues « en quantité suffisamment grande », plus précisément, grâce à la propriété suivante: quels que soient les points distincts x et y d'un espace complètement régulier T, il existe une fonction réelle f, définie et continue sur T, telle que $f(x) \neq f(y)$.

7. Différentes méthodes de définition de la topologie sur un espace. Métrisabilité. La méthode la plus directe pour définir la topologie d'un espace consiste à indiquer tout simplement les ensembles qu'il convient de considérer comme ouverts. Ces ensembles doivent satisfaire évidemment aux conditions 1° et 2° (page 78). Une méthode équivalente à celle-ci est sa duale qui consiste à indiquer une famille d'ensembles fermés, vérifiant les conditions 1 et 2 (page 79). Mais en réalité, cette méthode est peu pratique. Ainsi, par exemple, même dans le cas du plan il est pratiquement impossible de donner une description directe de t o u s les sous-ensembles ouverts (comme on parvient à le faire dans le cas de la droite (cf. théorème 5, § 2)).

Une méthode courante de définition de la topologie consiste à choisir une base; en fait, c'est justement de cette façon qu'on introduit la topologie dans un espace métrique, où à partir de la métrique donnée on choisit comme base l'ensemble des boules ouvertes.

Une autre méthode possible de définition de la topologie sur un espace consiste à introduire dans cet espace la notion de convergence. Mais au-delà des espaces métriques cette méthode n'est pas toujours commode, étant donné que le passage d'un ensemble à sa fermeture, comme on l'a déjà signalé au n° 4, ne peut pas être toujours exprimé en termes de suites convergentes. Cette méthode peut être rendue universelle, en généralisant convenablement la notion même de suite convergente (cf. par exemple, [29], chap. 2).

Il est possible d'introduire la topologie dans un espace, en définissant axiomatiquement l'*opération de fermeture*. On dit que dans un ensemble X on a défini l'opération de fermeture, si à tout ensemble $A \subset X$ on a fait correspondre un ensemble $[A] \subset X$, dit *fermeture* de A, de façon que le passage de A à $[A]$ possède les propriétés 1)-4), indiquées dans l'énoncé du théorème 1, § 2. En définissant par la suite les ensembles fermés comme ensembles jouissant de la propriété $[A] = A$, on voit aisément que cette classe d'ensembles vérifie les conditions 1 et 2 (page 78) et, par conséquent, définit bien une topologie sur X.

La donnée d'une métrique offre l'une des plus importantes méthodes de définition de la topologie d'un espace, bien que cette méthode soit loin d'être universelle. Comme nous l'avons déjà vu, tout espace métrique est normal et satisfait au premier axiome de dénombrabilité. Dans un espace dépourvu de l'une au moins de ces deux propriétés il est impossible de définir la topologie à l'aide d'une métrique.

Définition. Un espace topologique T, est dit *métrisable*, si sa topologie peut être définie à l'aide d'une métrique.

En vertu de ce qui vient d'être dit, la normalité et le premier axiome de dénombrabilité sont les conditions nécessaires de métrisabilité d'un espace. D'autre part, ni chacune de ces conditions prises à part, ni même les deux à la fois, ne sont suffisantes pour que l'espace soit métrisable. On a pourtant le théorème suivant, dû à P. S. Urysohn:

Pour qu'un espace topologique à base dénombrable soit métrisable, il faut et il suffit que cet espace soit normal.

Il est clair que cette condition est nécessaire. On trouvera une démonstration du fait, qu'elle est suffisante, par exemple, dans [2].

§ 6. Compacité

1. Notion de compacité. Un rôle fondamental en analyse est joué par la proposition suivante, connue sous le nom du lemme de Heine-Borel:

De tout recouvrement d'un segment $[a, b]$ *de la droite numérique par des intervalles on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Cette proposition reste vraie, si l'on remplace les intervalles par des ensembles ouverts arbitraires: *de tout recouvrement ouvert du segment* $[a, b]$ *on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

En partant de cette propriété des segments de la droite numérique, on introduit la notion importante suivante.

Définition. Un espace topologique T est appelé *espace compact*, si tout recouvrement ouvert de T contient un sous-recouvrement fini.

Un *compact* est un espace topologique compact qui satisfait à l'axiome de séparation de Hausdorff.

Nous verrons plus tard que la compacité est une propriété dont jouissent non seulement les segments, mais aussi tous les sous-ensembles fermés et bornés de tout espace euclidien de dimension finie. Par contre, la droite, le plan, l'espace à trois dimensions représentent les plus simples exemples d'espaces non compacts.

Nous dirons qu'une famille de parties $\{A\}$ d'un ensemble T est *centrée*, si aucune intersection finie $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ d'ensembles de cette famille n'est vide. De la définition des espaces compacts, à l'aide des relations de dualité, on déduit le théorème suivant.

Théorème 1. *Pour qu'un espace topologique T soit compact, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition*:

(R) *toute famille centrée de sous-ensembles fermés de T admet une intersection non vide.*

En effet, soit $\{F_\alpha\}$ une famille centrée de sous-ensembles fermés de T et soit T un espace compact. Les ensembles $G_\alpha = T \setminus F_\alpha$ sont ouverts et comme aucune intersection finie $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ n'est vide, on en déduit qu'aucune famille d'ensembles $G_i = T \setminus F_i$ ne recouvre T entièrement. Mais alors (en vertu de la compacité de T) l'ensemble de tous les G_α ne peut pas constituer un recouvrement de T, ce qui signifie que $\bigcap F_\alpha \neq \varnothing$. Ainsi donc, si T est un espace compact, il remplit la condition (R).

Réciproquement, supposons que T vérifie la condition (R) et soit $\{G_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de T. En posant $F_\alpha = T \setminus G_\alpha$, on obtient $\bigcap F_\alpha = \varnothing$, d'où l'on déduit (en vertu de la condition (R)) que la famille $\{F_\alpha\}$ ne peut pas être centrée. Il existe donc des ensembles $F_1, \ldots, F_n$, tels que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$. Mais alors les ouverts correspondants $G_i = T \setminus F_i$ forment un sous-recouvrement fini du recouvrement $\{G_\alpha\}$. Donc, la condition (R) est équivalente à la compacité.

Nous allons établir maintenant quelques propriétés importantes des espaces compacts.

Théorème 2. *Si T est un espace compact, tout sous-ensemble infini de T possède au moins un point d'accumulation.*

Démonstration. Si T contient un ensemble infini X ne possédant aucun point d'accumulation, alors de X on peut extraire un sous-ensemble dénombrable

$$X_1 = (x_1, x_2, \ldots),$$

ne possédant non plus aucun point d'accumulation. Mais alors les ensembles

$$X_n = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$$

forment une famille centrée de sous-ensembles fermés de T dont l'intersection est vide, ce qui signifie que T n'est pas compact.

Théorème 3. *Tout sous-ensemble fermé d'un espace compact est un espace compact.*

Démonstration. Soit F un sous-ensemble fermé de l'espace compact T et soit $\{F_\alpha\}$ une famille centrée quelconque de sous-ensembles fermés du sous-espace $F \subset T$. Comme tout ensemble F_α fermé dans F, est aussi fermé dans T, $\{F_\alpha\}$ est une famille centrée de sous-ensembles fermés de T. Par conséquent, $\bigcap F_\alpha \neq \varnothing$. En vertu du théorème 1 on en déduit la compacité de F.

Etant donné que tout sous-espace d'un espace de Hausdorff est lui-même un espace de Hausdorff, on obtient:

Corollaire. *Tout sous-ensemble fermé d'un compact est un compact.*

Théorème 4. *Un compact est fermé dans tout espace de Hausdorff qui le contient.*

Démonstration. Soit K un sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff T et soit $y \notin K$. Alors, quel que soit $x \in K$, il existe un voisinage U_x du point x et un voisinage V_x du point y tels que

$$U_x \cap V_x = \varnothing.$$

Les voisinages U_x forment un recouvrement ouvert de K. En vertu de la compacité de K on peut en extraire un sous-recouvrement fini $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$. Posons

$$V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \ldots \cap V_{x_n}.$$

Alors V est un voisinage du point y qui ne rencontre pas $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cup \ldots \cup U_{x_n} \supset K$. Par conséquent, $y \notin [K]$, ce qui signifie que K est fermé.

Le théorème est démontré.

Les théorèmes 3 et 4 montrent que dans la classe des espaces de Hausdorff la compacité est une propriété *intrinsèque*, c.-à-d. que tout compact reste un compact, quel que soit l'espace de Hausdorff plus large qui le contient.

Théorème 5. *Tout compact est un espace normal.*

Démonstration. Soient X et Y deux sous-ensembles fermés disjoints d'un compact K. En appliquant les mêmes raisonnements que dans la démonstration du théorème précédent, il est aisé de voir que pour tout point $y \in Y$ il existe un voisinage U_y de y et un ensemble ouvert $O_y \supset X$ tels que $U_y \cap O_y = \varnothing$. On en déduit que tout compact est un espace régulier. Supposons maintenant que y parcoure tout l'ensemble Y. Considérons un sous-recouvrement fini $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ du recouvrement $\{U_y\}$ de l'ensemble Y. Les ensembles ouverts

$$O^{(1)} = O_{y_1} \cap \ldots \cap O_{y_n} \quad \text{et} \quad O^{(2)} = U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}$$

vérifient les conditions

$$O^{(1)} \supset X, \quad O^{(2)} \supset Y, \quad O^{(1)} \cap O^{(2)} = \varnothing,$$

d'où la normalité de K.

2. Applications continues des espaces compacts. Les applications continues des espaces compacts, en particulier, des compacts, possèdent des propriétés aussi intéressantes qu'importantes.

Théorème 6. *L'image d'un espace compact dans une application continue est un espace compact.*

Démonstration. Soit X un espace compact et f une application continue de X dans un espace topologique Y. Considérons

un recouvrement quelconque $\{V_\alpha\}$ de son image $f(X)$ par des ensembles ouverts dans $f(X)$. Posons $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Les ensembles U_α sont ouverts (comme images réciproques d'ensembles ouverts dans une application continue) et constituent un recouvrement de l'espace X. En vertu de la compacité de X, de ce recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement fini $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Alors les ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_n$, où $V_i = f(U_i)$, recouvrent l'image $f(X)$ de l'espace X.

Théorème 7. *Toute application biunivoque et continue φ d'un compact X sur un espace de Hausdorff Y est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les conditions du théorème entraînent la continuité de l'application réciproque φ^{-1}. Soient F un ensemble fermé dans X et $P = \varphi(F)$ son image dans Y. D'après le théorème précédent P est un compact et, par conséquent, P est fermé dans Y. Donc, l'image réciproque de tout ensemble fermé $F \subset X$ dans l'application φ^{-1} est fermée. D'où la continuité de l'application φ^{-1}.

3. Fonctions continues et semi-continues définies sur un espace compact. Au numéro précédent il a été question des applications continues d'un compact dans un espace de Hausdorff. Un cas particulier des applications de ce type est constitué par les applications d'un compact dans la droite numérique, c.-à-d. par les fonctions numériques définies sur un compact. Ces fonctions possèdent les propriétés principales des fonctions définies sur un segment, connues du cours d'analyse.

Théorème 8. *Soient T un espace compact et f une fonction continue sur T. Alors f est bornée sur T et y atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.*

Démonstration. Une fonction continue est une application continue de T dans la droite numérique $\mathbf{R}^1$. En vertu du théorème général 6, l'image de T dans $\mathbf{R}^1$ est un ensemble compact. Or, du cours d'analyse (cf. aussi n° 2, § 7) on sait que tout sous-ensemble compact de la droite numérique est fermé et borné. Un tel ensemble non seulement admet une borne supérieure et une borne inférieure finies, mais aussi il les contient.

Le théorème est démontré.

Exercice. Soit K un espace métrique compact et soit A une application de K dans lui-même, telle que $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ pour $x \neq y$. Montrer que l'application A possède dans K un point fixe et un seul.

L'affirmation du dernier théorème admet une extension à une classe plus large de fonctions, nommées fonctions semi-continues.

Une fonction $f(x)$ est dite *semi-continue inférieurement* (resp. *supérieurement*) en un point x_0, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de x_0, tel que si $x \in U$, on a $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ (respectivement, $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$).

Par exemple, la fonction « partie entière de x », $f(x) = E(x)$ est semi-continue supérieurement. Lorsqu'on augmente (ou diminue) la valeur $f(x_0)$ d'une fonction continue en un point quelconque x_0 on obtient une fonction semi-continue supérieurement (inférieurement). Si la fonction $f(x)$ est semi-continue supérieurement, la fonction $-f(x)$ est semi-continue inférieurement. Ces deux remarques donnent la possibilité de construire un grand nombre d'exemples de fonctions semi-continues.

Pour étudier les propriétés de la semi-continuité des fonctions réelles, il est commode de convenir qu'elles peuvent prendre des valeurs infinies. Si $f(x_0) = -\infty$ la fonction f sera considérée comme semi-continue inférieurement au point x_0 ; si en outre, pour tout $h > 0$ il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) < -h$ pour tout $x \in U$, on dira aussi que f est semi-continue supérieurement au point x_0.

Si $f(x_0) = +\infty$, la fonction f sera considérée comme semi-continue supérieurement au point x_0 ; si, en outre, pour tout $h > 0$ il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) > h$ pour tout $x \in U$, on dira aussi que cette fonction est semi-continue inférieurement au point x_0.

Soit $f(x)$ une fonction réelle définie sur un espace métrique R. On appelle *limite supérieure* $\overline{f}(x_0)$ de la fonction $f(x)$ au point x_0 la quantité (finie ou infinie) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} [\sup\limits_{x \in B(x_0, \varepsilon)} f(x)]$. On définit la *limite inférieure* $\underline{f}(x_0)$ de manière analogue, en remplaçant la borne supérieure par la borne inférieure. La différence $\omega f(x_0) = \overline{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)$ (lorsqu'elle a un sens, c.-à-d. lorsque $\overline{f}(x_0)$ et $\underline{f}(x_0)$ ne sont pas infinis et de même signe) est appelée *oscillation* de la fonction $f(x)$ au point x_0. Il est aisé de voir que pour la continuité de la fonction $f(x)$ au point x_0 il faut et il suffit que $\omega f(x_0) = 0$ c.-à-d. que $-\infty < \underline{f}(x_0) = \overline{f}(x_0) < \infty$.

Quelle que soit la fonction $f(x)$, définie sur un espace métrique, la fonction $\overline{f}(x)$ est semi-continue supérieurement et la fonction $\underline{f}(x)$ est semi-continue inférieurement. Ceci résulte immédiatement de la définition des limites supérieure et inférieure.

Considérons l'espace métrique M ayant pour éléments x toutes les fonctions réelles bornées $\varphi(t)$, définies sur le segment $[a, b]$, la métrique étant définie par l'égalité

$$\rho(x, y) = \rho(\varphi, \psi) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Les fonctions définies sur M seront appelées, comme c'est l'usage, *fonctionnelles*, pour les distinguer des fonctions $\varphi(t)$, éléments de M.

Considérons un exemple important de fonctionnelle semi-continue.

Appelons longueur de la courbe $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ la fonctionnelle

$$L_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

où la borne supérieure (qui peut être égale à $+\infty$) est prise sur l'ensemble de toutes les subdivisions possibles du segment $[a, b]$. Cette fonctionnelle est définie sur tout l'espace M. Pour des fonctions continues elle coïncide avec la valeur de la limite

$$\lim_{\max |x_i - x_{i-1}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Enfin, pour des fonctions continûment dérivables elle peut s'écrire sous la forme

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

La fonctionnelle $L_a^b(f)$ est semi-continue inférieurement dans M, ce qui résulte immédiatement de sa définition.

Le théorème 9, démontré plus haut, s'étend aux fonctions semi-continues.

Théorème 8a. *Toute fonction finie et semi-continue inférieurement* (resp. *supérieurement*) *sur un T_1-espace compact T est bornée inférieurement* (resp. *supérieurement*) *sur T.*

En effet, supposons que $\inf f(x) = -\infty$. Il existe alors une suite $\{x_n\}$ telle que $f(x_n) < -n$. Comme l'espace T est compact, son sous-ensemble infini $\{x_n\}$ possède (d'après le théorème 2) au moins un point d'accumulation x_0. La fonction f étant par hypothèse finie et semi-continue inférieurement, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) > f(x_0) - 1$, si $x \in U$. Mais alors le voisinage U ne peut contenir qu'un nombre fini de points de l'ensemble $\{x_n\}$, ce qui contredit le fait que x_0 est un point d'accumulation de cet ensemble.

Pour le cas d'une fonction semi-continue supérieurement la démonstration est analogue.

Théorème 8b. *Toute fonction finie et semi-continue inférieurement* (resp. *supérieurement*) *sur un T_1-espace compact T atteint sur T sa borne inférieure* (resp. *supérieure*).

Soit $f(x)$ une fonction semi-continue inférieurement. D'après le théorème 8a elle admet une borne inférieure finie et il existe dans T une suite $\{x_n\}$ telle que $f(x_n) \leqslant \inf f(x) + \frac{1}{n}$.

Comme l'espace T est compact, l'ensemble $\{x_n\}$ possède un point d'accumulation x_0. On ne peut pas avoir $f(x_0) > \inf f$, car alors, étant donné que la fonction f est semi-continue inférieurement, il existerait un voisinage U du point x_0 et un nombre $\delta > 0$ tels que $f(x) > \inf f + \delta$ pour tout $x \in U$. Mais un tel voisinage U ne pourrait pas contenir un sous-ensemble infini de $\{x_n\}$. Donc, $f(x_0) = \inf f$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Compacité dénombrable. Introduisons la notion suivante.

Définition. On dit qu'un espace T est *dénombrablement compact*, si tout sous-ensemble infini de T admet au moins un point d'accumulation.

Du théorème 2, démontré au nº 1, il résulte que tout espace compact est dénombrablement compact. La réciproque n'est pas en général vraie. Voici un exemple « traditionnel » d'espace dénombrablement compact qui n'est pas compact. Considérons l'ensemble X de tous les nombres ordinaux α inférieurs au premier nombre ordinal non dénombrable ω_1. Appelons un intervalle (α, β) dans X l'ensemble de tous les nombres ordinaux γ tels que $\alpha < \gamma < \beta$. Appelons ensemble ouvert dans X toute réunion d'intervalles. Il est aisé de vérifier que l'espace ainsi construit est dénombrablement compact, mais non compact.

Le rapport entre la notion de compacité et celle de compacité dénombrable sera éclairci par le théorème suivant.

Théorème 9. *Pour qu'un espace topologique T soit dénombrablement compact, il faut et il suffit que l'une quelconque des conditions suivantes soit remplie :*

1) *Tout recouvrement ouvert dénombrable de l'espace T contient un sous-recouvrement fini.*

2) *Toute famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dans T possède une intersection non vide.*

D é m o n s t r a t i o n. L'équivalence des conditions 1) et 2) est une conséquence immédiate des relations de dualité. Si l'espace T n'est pas dénombrablement compact, alors en reprenant le raisonnement utilisé à la démonstration du théorème 2, il est aisé de voir que dans T il existe une famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dont l'intersection est vide. Ceci prouve que la condition 2) (et donc, la condition 1) également) est suffisante. Montrons maintenant que la condition 2) est nécessaire. Supposons l'espace T dénombrablement compact et soit $\{F_n\}$ une famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dans T. Il s'agit de montrer que $\bigcap_n F_n \neq \varnothing$. Posons

$$\Phi_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k.$$

Il est clair que tous les ensembles Φ_n sont fermés, non vides (puisque la famille $\{F_n\}$ est centrée), qu'ils forment une suite non croissante

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots$$

et que

$$\bigcap_n \Phi_n = \bigcap_n F_n.$$

Deux cas sont possibles:

1) A partir d'un certain numéro n_0, on a:

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \ldots$$

Dans ce cas il est évident que $\bigcap_n \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \varnothing$.

2) Parmi les Φ_n il y a une infinité d'ensembles deux à deux distincts. Il suffit de considérer le cas, où tous les Φ_n diffèrent l'un de l'autre. Soit

$$x_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}.$$

La suite $\{x_n\}$ constitue un ensemble infini de points distincts de T; en vertu de la compacité dénombrable de T, elle possède au moins un point d'accumulation, soit x_0. Or, comme Φ_n contient tous les points $x_n, x_{n+1}, \ldots,$ alors x_0 est également un point d'accumulation de Φ_n et comme Φ_n est fermé, $x_0 \in \Phi_n$. Par conséquent, $\bigcap_n \Phi_n \ni x_0$, c.-à-d. $\bigcap_n \Phi_n \neq \varnothing$.

Ainsi donc, les espaces compacts comme les espaces dénombrablement compacts sont caractérisés par le « comportement » de leurs

recouvrements ouverts. Et dans un cas et dans l'autre d'un recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini, mais dans le premier cas il s'agit des recouvrements arbitraires, tandis que dans le deuxième cas il ne s'agit que des recouvrements dénombrables.

Bien qu'en général la compacité dénombrable n'implique pas la compacité, on a le théorème suivant.

Théorème. 10. *Dans le cas des espaces à base dénombrable il y a identité entre la notion de compacité et celle de compacité dénombrable.*

En effet, quel que soit le recouvrement ouvert d'un espace T à base dénombrable, on peut en extraire un sous-recouvrement dénombrable (cf. théorème 5, § 5). Si, en outre, T est dénombrablement compact, de ce dernier on peut extraire, d'après le théorème précédent, un sous-recouvrement fini. On en déduit que l'espace T est alors compact.

Remarque. La notion de compacité dénombrable d'un espace topologique s'est avérée en réalité peu naturelle et moins réussie que celle de compacité. Elle est apparue, pour ainsi dire, « par inertie ». Cela tient à ce que pour les espaces métriques (comme pour les espaces à base dénombrable) ces deux notions coïncident (ce fait sera démontré au paragraphe suivant). D'autre part, pour les espaces métriques la notion de compacité fut primitivement introduite justement pour exprimer la propriété que tout sous-ensemble infini d'un tel espace possède un point d'accumulation, c.-à-d. comme la notion de compacité dénombrable. C'est l'extension « automatique » de cette définition du cas d'un espace métrique à celui d'un espace topologique qui conduisit à la notion d'espace topologique dénombrablement compact. Dans les ouvrages mathématiques, surtout dans les livres plus ou moins vieux, le terme « compacité » est souvent utilisé au sens de « compacité dénombrable », tandis que les espaces topologiques, compacts conformément à notre terminologie, c.-à-d. les espaces dont tout recouvrement ouvert contient un recouvrement fini, sont appelés *espaces bicompacts.* De même, les espaces compacts de Hausdorff (c.-à-d. les compacts) sont appelés *bicompacts*, le terme « compact » étant réservé pour désigner un espace métrique compact. Nous allons nous servir des termes introduits plus haut (compacité, compacité dénombrable) ; en outre, nous appellerons les espaces métriques compacts aussi *compacts* ou, lorsqu'il est nécessaire de souligner spécialement la présence de la métrique, « *compacts métriques* ».

5. Ensembles précompacts. Si un ensemble M, inclus dans un espace de Hausdorff T, n'est pas fermé dans T, il ne peut pas être compact. Par exemple, aucun sous-ensemble non fermé de la droite numérique n'est compact. Pourtant, il est possible que la fermeture $[M]$ d'un tel ensemble M dans T possède la propriété de compacité. Il en est ainsi, par exemple, de tout sous-ensemble borné de la

droite numérique ou d'un espace à n dimensions. On est conduit à la définition suivante.

Définition. Un ensemble M, inclus dans un espace topologique T, est dit *précompact* (ou *compact par rapport* à T), si sa fermeture dans T est compacte. De manière analogue, un ensemble M est dit *dénombrablement précompact* dans T, si tout sous-ensemble infini $A \subset M$ admet au moins un point d'accumulation (qui peut appartenir ou non à l'ensemble M).

La notion de précompacité (contrairement à celle de compacité) est évidemment liée à l'espace T, dans lequel nous plongeons l'ensemble donné. Par exemple, l'ensemble des points rationnels de l'intervalle (0, 1) est précompact, s'il est considéré comme sous-ensemble de la droite numérique, mais il n'est pas précompact, si on le considère comme sous-ensemble de l'espace des nombres rationnels.

La notion de précompacité a le plus d'importance dans le cas des espaces métriques, dont il sera question au paragraphe suivant.

§ 7. Compacité dans les espaces métriques

1. Ensembles totalement bornés. Comme les espaces métriques représentent un cas particulier des espaces topologiques, toutes les définitions et tous les résultats, établis au paragraphe précédent, sont valables pour les espaces métriques. Dans le cas des espaces métriques la notion de compacité est étroitement liée à la notion d'ensemble totalement borné que nous introduisons ci-après.

Soit M un ensemble quelconque d'un espace métrique R et soit ε un nombre positif quelconque. On dit que l'ensemble $A \subset R$ est un *ε-réseau* de M, si pour tout point $x \in M$ il existe au moins un point $a \in A$ tel que $\rho(x, a) \leqslant \varepsilon$. (L'ensemble A n'est pas forcément inclus dans M et peut même n'avoir aucun point commun avec M ; pourtant, s'il existe un ε-réseau A de M, on peut en construire un 2ε-réseau $B \subset M$.)

Par exemple, les points du plan ayant des coordonnées entières forment un $\frac{1}{\sqrt{2}}$-réseau de ce plan. Un ensemble M est dit *totalement borné*, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ε-réseau fini de M. Il est clair que tout ensemble totalement borné est nécessairement borné (contenu dans une boule), comme une réunion finie d'ensembles bornés. Comme le montre l'exemple 2 ci-dessous, la réciproque n'est pas, en général, vraie.

Il est souvent utile d'avoir en vue la remarque évidente suivante : *si un ensemble M est totalement borné, sa fermeture $[M]$ l'est aussi.*

De la définition d'un ensemble totalement borné il résulte immédiatement que *si l'espace métrique R est lui-même totalement borné, alors il est séparable*. En effet, construisons dans R un $\frac{1}{n}$-réseau pour chaque valeur de n. La réunion de ces $\frac{1}{n}$-réseaux pour toutes les valeurs de n est un ensemble dénombrable, partout dense dans R. Comme tout espace métrique séparable possède une base dénombrable (cf. théorème 4, § 5), on en déduit que *tout espace métrique totalement borné possède une base dénombrable.*

Exemples. 1. Dans un espace euclidien à n dimensions, dire qu'un ensemble est totalement borné équivaut à dire qu'il est tout simplement borné, c.-à-d. qu'il est possible d'enfermer cet ensemble dans un cube suffisamment grand. En effet, si un tel cube est divisé en petits cubes d'arête ε, les sommets de ces derniers formeront un $\frac{\sqrt{n}}{2}$ ε-réseau fini pour le cube initial et, à plus forte raison, pour tout ensemble placé à son intérieur.

2. La sphère S de rayon 1 dans l'espace l_2 nous fournit un exemple d'ensemble borné, mais non totalement borné. En effet, considérons dans S les points:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La distance de n'importe quels deux de ces points e_n et e_m ($n \neq m$) est égale à $\sqrt{2}$. Ceci montre que dans S il n'existe aucun ε-réseau pour $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Considérons dans l_2 l'ensemble Π des points

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

vérifiant les conditions

$$|x_1| \leqslant 1, \quad |x_2| \leqslant \frac{1}{2}, \ \ldots, |x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \ \ldots$$

Cet ensemble s'appelle *parallélépipède fondamental* (ou « pavé hilbertien ») de l'espace l_2. Il sert d'exemple d'ensemble de dimension infinie totalement borné. Pour démontrer qu'il est totalement borné on procède de la manière suivante.

Soit donné $\varepsilon > 0$. Choisissons n de façon que $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. A chaque point

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \tag{1}$$

de Π faisons correspondre le point

$$x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \tag{2}$$

du même ensemble. Il vient

$$\rho(x, x^*) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'ensemble Π^* des points de la forme (2) appartenant à Π est totalement borné (comme ensemble borné dans un espace à n dimensions). Choisissons dans Π^* un $\frac{\varepsilon}{2}$-réseau fini. Il est clair que ce dernier sera en même temps un ε-réseau de l'ensemble Π.

2. Espaces totalement bornés et compacité.

Théorème 1. *Si l'espace métrique R est dénombrablement compact, alors il est totalement borné.*

Démonstration. Supposons que l'espace R ne soit pas totalement borné. Cela signifie que pour un certain $E_0 > 0$, dans R il n'existe pas de ε_0-réseau fini. Soit a_1 un point arbitraire de R. Il existe au moins un point de R soit a_2, tel que $\rho(a_1, a_2) > \varepsilon_0$ (sinon, le point a_1 formerait un ε_0-réseau de R). De la même façon, dans R on peut trouver un point a_3 tel que

$$\rho(a_1, a_3) > \varepsilon_0 \text{ et } \rho(a_2, a_3) > \varepsilon_0;$$

autrement le couple de points a_1, a_2 serait un ε_0-réseau de R. Si les points $a_1, \ldots, a_k$ sont déjà fixés, choisissons un point $a_{k+1} \in R$ tel que

$$\rho(a_i, a_{k+1}) > \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

A l'aide de ce procédé on obtient une suite infinie $a_1, a_2, \ldots$ qui n'a aucun point d'accumulation, étant donné que $\rho(a_i, a_j) > \varepsilon_0$ pour $i \neq j$. Mais alors l'espace R n'est pas dénombrablement compact. Le théorème est démontré.

Ainsi, nous avons démontré que pour les espaces métriques la compacité dénombrable implique la propriété de l'espace d'être totalement borné, qui à son tour implique la présence d'une base dénombrable.

En vertu du théorème 10, § 6, on en déduit le résultat important suivant.

Corollaire. *Tout espace métrique dénombrablement compact est un espace compact.*

Nous avons montré que la propriété d'un espace métrique d'être totalement borné est une condition nécessaire pour qu'il soit compact. Cette condition n'est pas suffisante; par exemple, l'ensemble des points rationnels du segment [0, 1], muni

de la distance habituelle, est un espace totalement borné, mais non compact : la suite de points de cet espace

$$0;\ 0{,}4;\ 0{,}41;\ 0{,}414;\ 0{,}4142;\ \ldots,$$

c.-à-d. la suite des valeurs décimales approchées par défaut du nombre $\sqrt{2}-1$, n'a aucun point d'accumulation dans cet espace. Pourtant, on a le théorème suivant.

Théorème 2. *Pour qu'un espace métrique R soit compact, il faut et il suffit qu'il soit à la fois :*
1) *totalement borné,*
2) *complet.*

Démonstration. La nécessité de la condition 1) a été déjà établie. Quant à la nécessité de la condition 2), elle est évidente ; en effet, si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy non convergente dans R, elle ne peut avoir dans R aucun point d'accumulation.

Montrons maintenant que si l'espace R est totalement borné et complet, alors il est compact. En vertu du corollaire du théorème 1, il suffit pour cela de démontrer que R est dénombrablement compact, c.-à-d. que toute suite $\{x_n\}$ de points de R a au moins un point d'accumulation.

Entourons d'une boule fermée de rayon 1 chaque point qui fait partie d'un 1-réseau de R. Comme ces boules sont en nombre fini et recouvrent tout l'espace R, au moins l'une d'elles, soit B_1, contient une sous-suite infinie $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ de la suite $\{x_n\}$. Choisissons ensuite dans B_1 un $\frac{1}{2}$-réseau et entourons chacun de ses points d'une boule fermée de rayon $\frac{1}{2}$. Au moins l'une de ces boules, désignons-la par B_2, contient une sous-suite infinie $x_1^{(2)}, \ldots, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$ de la suite $\{x_n^{(1)}\}$. De la même façon, on trouvera une boule fermée B_3 de rayon $\frac{1}{4}$ ayant le centre dans B_2 et contenant une sous-suite infinie $x_1^{(3)}, \ldots, x_n^{(3)}, \ldots$ de la suite $\{x_n^{(2)}\}$, etc. Considérons maintenant avec chaque boule B_n une boule fermée A_n ayant le même centre, mais un rayon deux fois plus grand. Il est aisé de voir que les boules A_n sont emboîtées. Comme l'espace R est complet, l'intersection $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ n'est pas vide et contient un seul point x_0. Ce point est un point d'accumulation de la suite initiale $\{x_n\}$, car tout voisinage de x_0 contient une boule B_k, donc, une sous-suite infinie $\{x_n^{(k)}\}$ de la suite $\{x_n\}$.

3. Ensembles précompacts dans un espace métrique. La notion de précompacité, introduite au paragraphe précédent pour les sous-ensembles d'un espace topologique arbitraire, est valable, en parti-

culier, pour les sous-ensembles d'un espace métrique. En outre, il est évident que dans le cas des espaces métriques il y a identité entre la notion de précompacité et celle de précompacité dénombrable. Il convient de mentionner la proposition simple, mais importante, qui suit.

Théorème 3. *Pour qu'un ensemble M, inclus dans un espace métrique complet R, soit précompact, il faut et il suffit que cet ensemble soit totalement borné.*

Ceci découle immédiatement du théorème 2 et du fait évident que tout sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet est lui-même complet.

L'importance de ce théorème réside dans le fait que dans la plupart des cas il est plus facile de démontrer qu'un ensemble est totalement borné que d'établir directement sa précompacité. Tout de même, lorsqu'il s'agit des applications en analyse, c'est la précompacité qui est d'habitude plus importante.

4. Théorème d'Arzelà. Le problème consistant à déterminer, si tel ou tel ensemble est compact dans un espace métrique, est assez fréquent en analyse. Par ailleurs, lorsqu'on essaie d'appliquer directement le théorème 2, on se heurte à des difficultés. C'est pourquoi, pour les ensembles contenus dans des espaces concrets, il est utile d'établir des critères de compacité (ou de précompacité) spéciaux, plus commodes dans la pratique.

Dans un espace euclidien à n dimensions, pour qu'un ensemble soit précompact, il faut et il suffit, comme on l'a vu plus haut, qu'il soit borné. Mais pour des espaces métriques plus généraux ceci n'est plus vrai.

L'un des espaces les plus importants de l'analyse des espaces métriques est l'espace $C[a, b]$. Pour ses sous-ensembles un critère de précompacité important et fréquemment utilisé est fourni par le théorème d'Arzelà.

Pour formuler ce théorème il est indispensable d'introduire les notions suivantes.

Une famille Φ de fonctions φ, définies sur un segment $[a, b]$, est dite *uniformément bornée*, s'il existe un nombre K tel que

$$|\varphi(x)| < K$$

pour tous les $x \in [a, b]$ et toutes les fonctions $\varphi \in \Phi$.

Une famille $\Phi = \{\varphi\}$ est dite *équicontinue*, si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre $\delta > 0$ tel que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

pour tous les x_1 et x_2 appartenant à $[a, b]$ et tels que $\rho(x_1, x_2) < \delta$ et pour toutes les fonctions $\varphi \in \Phi$.

Théorème 4 (d'Arzelà). *Pour qu'une famille Φ de fonctions continues, définies sur le segment $[a, b]$, soit précompacte dans $C[a, b]$, il faut et il suffit que cette famille soit uniformément bornée et équicontinue.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons la famille Φ précompacte dans $C[a, b]$. Alors, selon le théorème précédent, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\frac{\varepsilon}{3}$-réseau fini $\varphi, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ de la famille Φ. Chacune des fonctions φ_i est bornée, comme fonction continue sur le segment $[a, b]$:

$$|\varphi_i(x)| \leqslant K_i.$$

Posons $K = \max K_i + \frac{\varepsilon}{3}$. D'après la définition d'un $\frac{\varepsilon}{3}$-réseau, pour chaque $\varphi \in \Phi$ il existe au moins une fonction φ_i telle que

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_x |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par conséquent,

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K.$$

Donc, la famille Φ est uniformément bornée.

D'autre part, chacune des fonctions φ_i du $\frac{\varepsilon}{3}$-réseau étant continue sur le segment $[a, b]$ est aussi uniformément continue sur ce segment. Donc, à tout $\frac{\varepsilon}{3}$ on peut faire correspondre δ_i tel que

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

si $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

Posons $\delta = \min \delta_i$. Soit φ une fonction arbitraire de la famille Φ. Faisons-lui correspondre une fonction φ_i telle que $\rho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour $|x_1 - x_2| < \delta$ on a

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + \\ + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

D'où l'équicontinuité de la famille Φ.

La condition est suffisante. Soit Φ une famille de fonctions uniformément bornée et équicontinue. Conformément au théorème 3, pour établir la précompacité de cette famille dans $C[a, b]$, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il lui correspond dans $C[a, b]$ un ε-réseau fini. Soit

$$|\varphi(x)| \leqslant K$$

pour toutes les fonctions $\varphi \in \Phi$ et soit $\delta > 0$ tel que si $|x_1 - x_2| < \delta$ on a

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$$

pour toutes les fonctions $\varphi \in \Phi$. Partageons le segment $[a, b]$ de l'axe x par les points $x_0 = a_1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ en intervalles de longueur inférieure à δ et traçons par ces points des droites verticales. Partageons ensuite le segment $[-K, K]$ de l'axe y par les points $y_0 = -K < y_1 < y_2 < \ldots\ y_m = K$ en intervalles de longueur inférieure à $\frac{\varepsilon}{5}$ et traçons par les points de subdivision des droites horizontales. Le rectangle $a \leqslant x \leqslant b$, $-K \leqslant y \leqslant K$ se trouvera alors partagé en petits rectangles ayant le côté horizontal inférieur à δ et le côté vertical inférieur à $\frac{\varepsilon}{5}$. A chaque fonction $\varphi \in \Phi$ faisons correspondre une ligne brisée $\psi(x)$ ayant pour sommets les points (x_k, y_l), c.-à-d. les nœuds du réseau construit, tels que pour $x = x_k$ l'écart de $\varphi(x)$ à $\psi(x)$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{5}$ (l'existence d'une telle ligne brisée est évidente).

Puisque par construction

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5},$$

$$|\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

et

$$|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5},$$

on a

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

La fonction $\psi(x)$ étant linéaire entre les points x_k et x_{k+1}, on a

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

pour tous les $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Soit maintenant x un point quelconque du segment $[a, b]$ et x_k celui des points de subdivision choisis qui est le plus proche de x à sa gauche. Alors on a

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + \\ + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent, les lignes brisées $\psi(x)$ forment un ε-réseau de Φ. Il est évident qu'elles sont en nombre fini. On en conclut que la famille Φ est totalement bornée.

Le théorème est entièrement démontré.

5. Théorème de Péano. Montrons, comment s'applique le théorème d'Arzelà, en prenant pour exemple, le théorème d'existence suivant pour les équations différentielles ordinaires à second membre continu.

Théorème 5 (de Péano). *Soit donnée une équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y). \tag{3}$$

Si la fonction f est continue dans un domaine borné et fermé G, alors quel que soit le point (x_0, y_0), *intérieur à ce domaine, il existe au moins une courbe intégrale de l'équation donnée, passant par ce point.*

Démonstration. Comme la fonction f est continue dans un domaine borné et fermé, elle est aussi bornée:

$$|f(x, y)| < M = \text{const.}$$

Traçons par le point (x_0, y_0) deux droites à coefficients angulaires M et $-M$. Traçons ensuite deux droites verticales $x = a$ et $x = b$ de façon que les deux triangles à sommet commun (x_0, y_0), qu'elles déterminent avec les deux précédentes, soient situés entièrement à l'intérieur du domaine G.

Ce couple de triangles forme un ensemble fermé Δ.

Construisons pour l'équation donnée une ligne brisée dite d'Euler de la manière suivante: par le point (x_0, y_0) traçons une droite de coefficient angulaire $f(x_0, y_0)$; par un point quelconque (x_1, y_1) de cette droite traçons une droite de coefficient angulaire $f(x_1, y_1)$; par un point quelconque (x_2, y_2) de la dernière droite traçons une nouvelle droite ayant pour coefficient angulaire $f(x_2, y_2)$, etc. Considérons maintenant une suite de lignes brisées d'Euler $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ passant par le point (x_0, y_0) et telles que la longueur du plus grand maillon de la ligne L_k tende vers zéro pour $k \to \infty$. Désignons par φ_k la fonction ayant pour graphe la ligne brisée L_k. Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ jouissent des propriétés suivantes:

1) elles sont définies sur le même segment $[a, b]$,
2) elles sont uniformément bornées,
3) elles sont équicontinues.

En vertu du théorème d'Arzelà, de la suite $\{\varphi_k\}$ on peut extraire une suite uniformément convergente, soit $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(k)}, \ldots$

Posons $\varphi(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi^{(k)}(x)$. Il est clair que $\varphi(x_0) = y_0$. Il reste à vérifier si la fonction φ satisfait sur $[a, b]$ à l'équation différentielle donnée. Pour cela il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a ·

$$\left|\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}-f(x', \varphi(x'))\right| < \varepsilon,$$

à condition que la différence $|x'' - x'|$ soit suffisamment petite. Pour la démonstration de ce fait il faut d'abord montrer que pour k assez grand on a

$$\left|\frac{\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')}{x''-x'}-f(x', \varphi^{(k)}(x'))\right| < \varepsilon,$$

pourvu que la différence $|x'' - x'|$ soit suffisamment petite.

Comme la fonction f est continue dans le domaine G, à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\eta > 0$ tel que

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon \ (y' = \varphi(x')),$$

si

$$|x - x'| < 2\eta \ \text{et} \ |y - y'| < 4M\eta.$$

L'ensemble des points $(x, y) \in G$ vérifiant ces deux inéquations représente un rectangle Q. Soit maintenant K tellement grand que pour tout $k > K$ on ait

$$|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)| < 4\eta$$

et tous les maillons de la ligne brisée L_k aient la longueur inférieure à η. Alors pour $|x - x'| < 2\eta$ toutes les lignes brisées d'Euler $\varphi^{(k)}$ avec $k > K$ seront situées entièrement à l'intérieur de Q.

Soient, d'autre part, $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \ldots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ les sommets de la ligne brisée L_k et soit

$$a_0 \leqslant x' < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < x'' \leqslant a_{n+1}$$

(pour fixer les idées on suppose $x'' > x'$; pour $x'' < x'$ toutes les considérations sont analogues). Alors pour les fonctions $\varphi^{(k)}$ correspondantes on a:

$$\varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') = f(a_0, b_0)(a_1 - x'),$$
$$\varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) = f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) = f(a_n, b_n)(x'' - a_n).$$

Pour $|x'' - x'| < \eta$ de ces égalités on obtient:

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_1 - x') < \varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \varepsilon](a_1 - x'),$$
$$[f(x', y') - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) < \varphi^{(k)}(a_{i+1}) -$$
$$- \varphi^{(k)}(a_i) < [f(x', y') + \varepsilon](a_{i+1} - a_i); \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - a_n) < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - a_n).$$

En additionnant ces inégalités membre à membre, on obtient

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x'),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Des sous-suites différentes de lignes brisées d'Euler peuvent converger vers des solutions différentes de l'équation (3). On en conclut que la solution de l'équation $y' = f(x, y)$ passant par le point (x_0, y_0) n'est pas en général unique.

6. Continuité uniforme. Applications continues des compacts métriques. Pour les applications d'un espace métrique dans un autre, en particulier, pour les fonctions numériques définies sur un espace métrique il y a en plus de la notion de continuité une autre notion qui a un sens et présente de l'importance pour l'analyse. C'est la notion de continuité uniforme. Une application F d'un espace métrique X dans un espace métrique Y est dite *uniformément continue*, si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\delta > 0$ tel que si $\rho_1(x_1, x_2) < \delta$, on a $\rho_2(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$ (ici ρ_1 désigne la distance sur X et ρ_2 la distance sur Y), δ étant dépendant seulement de ε et non de x_1 et x_2.

Exercice. Montrer que la fonction numérique $F(x) = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} x(t)$, définie sur l'espace $C[a, b]$, est uniformément continue.

Pour les applications continues des compacts métriques on a le théorème suivant qui généralise le théorème bien connu de l'analyse élémentaire sur les fonctions continues sur un segment.

T h é o r è m e 6. *Toute application continue d'un compact métrique dans un espace métrique est uniformément continue.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit F une application continue, mais non uniformément continue, d'un compact métrique K dans un espace métrique M. Cela signifie que pour un certain $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel n on peut trouver dans K deux points x_n et x'_n tels que

$$\rho_1(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$$

et pourtant

$$\rho_2(F(x_n), F(x'_n)) \geqslant \varepsilon$$

(ρ_1 désigne la distance sur K et ρ_2 la distance sur M). En vertu de la compacité de K, de la suite $\{x_n\}$ on peut extraire une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ convergeant vers un point $x \in K$. Alors la suite $\{x'_{n_k}\}$ converge aussi vers x. D'autre part, pour chaque valeur de k au moins l'une des inégalités

$$\rho_2(F(x), F(x_{n_k})) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho_2(F(x), F(x'_{n_k})) \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

est vérifiée, ce qui contredit l'hypothèse que l'application F est continue au point x.

7. Théorème généralisé d'Arzelà. Soient X et Y deux compacts métriques et C_{XY} l'ensemble des applications continues f de X dans Y. Introduisons dans C_{XY} une distance à l'aide de la formule

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$

On vérifie facilement que C_{XY} devient alors un espace métrique.

T h é o r è m e 7 (t h é o r è m e g é n é r a l i s é d'A r z e l à). *Pour qu'un ensemble $D \subset C_{XY}$ soit précompact, il faut et il suffit que les fonctions f appartenant à D soient équicontinues.*

Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il doit exister un $\delta > 0$ tel que

$$\rho(x', x'') < \delta \tag{4}$$

entraîne

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon \tag{5}$$

quelles que soient les fonctions $f \in D$ et quels que soient les points x' et x'' de X.

D é m o n s t r a t i o n. On démontre que la condition est nécessaire comme dans le théorème 4.

Démontrons que la condition est suffisante. Pour cela, prolongeons C_{XY} dans l'espace M_{XY} de toutes les applications du compact X dans le compact Y, muni de la même métrique que C_{XY}:

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

et démontrons que l'ensemble D est précompact dans M_{XY}. Comme C_{XY} est fermé dans M_{XY} [1]). la précompacité de l'ensemble D dans M_{XY} implique sa précompacité dans C_{XY}.

Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ arbitraire et choisissons δ tel que l'inégalité (4) entraîne (5), quels que soient $f \in D$ et x', $x'' \in X$. Il est aisé de voir que X peut être mis sous la forme d'une réunion finie d'ensembles disjoints E_i tels que si x', $x'' \in E_i$, on a $\rho(x', x'') < \delta$. En effet, pour cela il suffit de choisir les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de façon qu'ils forment un $\frac{\delta}{2}$-réseau de X et de poser, par exemple,

$$E_i = B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right) \setminus \bigcup_{j<i} B\left(x_j, \frac{\delta}{2}\right),$$

où $B(x_i, \delta/2)$ est une boule de rayon $\frac{\delta}{2}$ et de centre x_i.

Considérons maintenant dans le compact Y un ε-réseau fini quelconque $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et soit L l'ensemble des fonctions $g(x)$ prenant sur les ensembles E_i les valeurs y_j. Il est clair que ces fonctions sont en nombre fini. Montrons qu'elles forment un 2ε-réseau de D dans M_{XY}. En effet, soit $f \in D$. A tout point x_i de $\{x_i, \ldots, x_n\}$ on peut faire correspondre un point y_j de $\{y_1, \ldots, y_m\}$ tel que

$$\rho(f(x_i), y_j) < \varepsilon.$$

Soit la fonction $g \in L$ choisie de façon que $g(x_i) = y_j$. Alors, si i est choisi de façon que $x \in E_i$, on a

$$\rho(f(x), g(x)) \leqslant \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), g(x_i)) + \\ + \rho(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon.$$

On en déduit que l'ensemble fini L est bien un 2ε-réseau de l'ensemble D, de sorte que D est précompact dans M_{XY} et, par conséquent, dans C_{XY} également.

§ 8. Courbes continues dans les espaces métriques [2])

Soit une application continue

$$P = f(t)$$

du segment $a \leqslant t \leqslant b$ dans un espace métrique R. Quand t « parcourt » le segment de a à b, le point correspondant P « parcourt » dans l'espace R « une courbe continue ». Nous aurons à donner des définitions rigoureuses concernant l'idée qu'on vient d'exposer en termes grossiers. L'ordre dans lequel un point parcourt la courbe est important. Ainsi, le même ensemble représenté sur la figure 12,

---

[1]) C'est parce que la limite d'une suite uniformément convergente d'applications continues est une application continue. Cette proposition est la généralisation d'un théorème bien connu de l'analyse et se démontre exactement comme ce dernier.

[2]) Ce paragraphe n'est pas nécessaire pour la suite. Le lecteur pourra donc, à volonté, l'omettre.

parcouru dans les deux sens indiqués sur les figures 13 et 14, sera considéré comme deux courbes d i f f é r e n t e s. On obtient un deuxième exemple, en considérant la fonction réelle définie sur le segment [0, 1] qui est représentée sur la figure 15. Elle définit une « courbe » située sur le segment [0, 1] de l'axe y, mais différente de ce segment, parcouru une seule fois du point 0 au point 1, car le segment $[A, B]$ est parcouru trois fois (deux fois du bas en haut et une fois du haut en bas).

Cependant, lorsque l e s e n s d e p a r c o u r s e s t l e m ê m e nous considérerons le choix du « paramètre » t comme n'ayant pas d'importance. Par

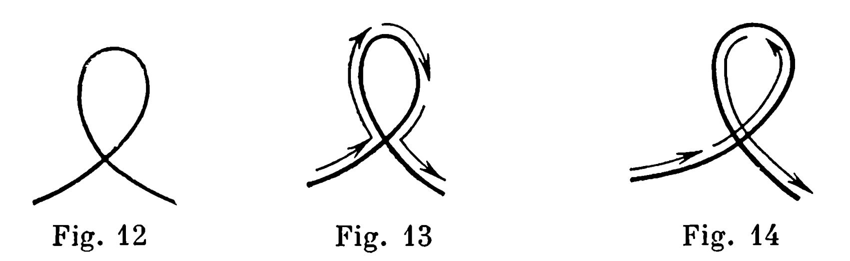


Fig. 12 Fig. 13 Fig. 14

exemple, les fonctions représentées sur les figures 15 et 16 définissent une même « courbe » située sur l'axe y, bien que les valeurs du paramètre t correspondant à un point quelconque de la courbe puissent être différentes dans le cas de la figure 15 et celui de la figure 16. Ainsi, sur la figure 15 au point A correspondent

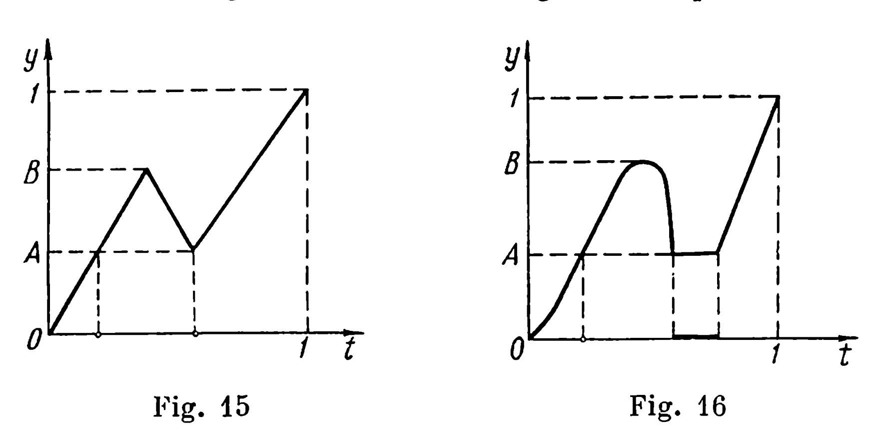


Fig. 15 Fig. 16

sur l'axe t deux points isolés, tandis que sur la figure 16 il lui correspond un point isolé et un segment situé plus à droite (quand t parcourt ce segment, le point de la courbe reste immobile). (L'admission de tels segments de fixité du point $P = f(t)$ sera commode dans la suite pour l'étude de la compacité d'une famille de courbes.)

Passons aux définitions formelles. Deux fonctions continues

$$P = f'(t') \text{ et } P = f''(t''),$$

définies respectivement sur les segments

$$a' \leqslant t' \leqslant b' \text{ et } a'' \leqslant t'' \leqslant b''$$

et prenant des valeurs dans l'espace métrique R, seront dites *équivalentes*, s'il existe deux fonctions continues non décroissantes

$$t' = \varphi'(t) \text{ et } t'' = \varphi''(t),$$

définies sur un segment

$$a \leqslant t \leqslant b$$

et telles que

$$\varphi'(a) = a', \quad \varphi'(b) = b',$$
$$\varphi''(a) = a'', \quad \varphi''(b) = b'',$$
$$f'[\varphi'(t)] = f''[\varphi''(t)],$$

quel que soit $t \in [a, b]$.

Il est aisé de voir que la relation d'équivalence ainsi définie est réflexive (f est équivalent à f), symétrique (si f' est équivalent à f'', alors f'' est équivalent à f') et transitive (équivalence de f' et f'' et celle de f'' et f''' impliquent l'équivalence de f' et f'''). Par conséquent, les fonctions continues du type considéré se trouvent partagées en classes de fonctions équivalentes entre elles. Chacune de ces classes définit dans l'espace R une *courbe continue.*

Quelle que soit la fonction $P = f'(t')$ définie sur un segment quelconque $[a', b']$, on peut lui associer une fonction équivalente définie sur le segment $[a'', b''] = [0, 1]$. En effet, pour cela il suffit de poser [1])

$$t' = \varphi'(t) = (b' - a')\,t + a', \quad t'' = \varphi''(t) = t.$$

Donc, toute courbe peut être représentée paramétriquement à l'aide d'une fonction définie sur le segment $[0, 1]$.

De ce fait, il est utile de considérer l'espace $C_{I,R}$ des applications continues f du segment $I = [0, 1]$ dans R, muni de la métrique

$$\rho(f, g) = \sup_t \rho(f(t), g(t)).$$

Nous dirons que la suite de courbes $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ converge vers la courbe L, si les courbes L_n et L peuvent être représentées paramétriquement par des fonctions

$$P = f_n(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

et

$$P = f(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

telles que $\rho(f, f_n) \to 0$ pour $n \to \infty$.

En appliquant le théorème généralisé d'Arzelà (théorème 7, § 7), on démontrera facilement le théorème suivant.

Théorème 1. *Si la suite de courbes $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ appartenant à un compact K peut être représentée paramétriquement par des fonctions équicontinues sur le segment* $[0, 1]$, *alors de cette suite on peut extraire une sous-suite convergente.*

Définissons maintenant la longueur d'une courbe représentée paramétriquement par la fonction

$$P = f(t), \ a \leqslant t \leqslant b,$$

comme la borne supérieure des sommes

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(f(t_{i-1}), f(t_i)),$$

où les points t_i sont soumis aux seules conditions:

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_i \leqslant \ldots \leqslant t_n = b.$$

---

[1]) Nous supposons $a < b$. Cependant, nous n'excluons pas les «courbes» constituées d'un seul point que l'on obtient, si la fonction $f(t)$ est constante sur $[a, b]$. Ceci est également commode pour la suite.

Il est aisé de voir que la longueur d'une courbe ne dépend pas de sa représentation paramétrique. En se limitant aux représentations paramétriques par des fonctions définies sur le segment [0, 1], on peut démontrer facilement que la longueur d'une courbe est une fonctionnelle semi-continue inférieurement dépendant de f (dans l'espace C_{IR}). En langage géométrique ce résultat peut être exprimé sous la forme du théorème suivant portant sur la semi-continuité.

Théorème 2. *Si la suite de courbes $\{L_n\}$ converge vers une courbe L, alors la longueur de la courbe L est inférieure ou égale à la limite inférieure des longueurs des courbes L_n.*

Considérons maintenant spécialement les courbes de longueur finie. Soit une courbe admettant la représentation paramétrique:

$$P = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

La fonction f, considérée seulement sur le segment $[a, T]$, où $a \leqslant T \leqslant b$, définit le « segment initial » de cette courbe du point

$$Pa = f(a)$$

au point

$$P_T = f(T).$$

Soit

$$s = \varphi(T)$$

sa longueur. On vérifie facilement que

$$P = g(s) = f[\varphi^{-1}(s)]$$

est une autre représentation paramétrique de la même courbe. Le nouveau paramètre s parcourt le segment

$$0 \leqslant s \leqslant S,$$

où S est la longueur de la courbe considérée toute entière. Cette représentation vérifie la condition

$$\rho(g(s_1), g(s_2)) \leqslant |s_2 - s_1|$$

(l'arc n'est pas plus court que la corde).

En passant au segment [0, 1], on obtient la représentation paramétrique

$$P = F(\tau) = g(s), \quad \tau = \frac{s}{S}$$

vérifiant la conditton de Lipschitz:

$$\rho(F(\tau_1), F(\tau_2)) \leqslant S\,|\tau_1 - \tau_2|.$$

On voit donc que *toutes les courbes de longueur*

$$S \leqslant M,$$

où M est une constante, peuvent être représentées paramétriquement par des fonctions équicontinues définies sur le segment [0, 1]. Par conséquent, à ces fonctions on peut appliquer le théorème 1.

Mettons en évidence la puissance des résultats généraux obtenus sur l'exemple de la démonstration du théorème important suivant.

Théorème 3. *Si dans un compact K deux points A et B peuvent être joints par des courbes continues de longueur finie, alors parmi toutes ces courbes il existe une de longueur minimale.*

En effet, soit Y la borne inférieure des longueurs des courbes joignant les points A et B du compact K. Soit $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ une suite de courbes

joignant A et B dont les longueurs tendent vers Y. D'après le théorème 1 de cette suite on peut extraire une sous-suite convergente. En vertu du théorème 2, la courbe limite de cette sous-suite ne peut pas avoir une longueur plus grande que Y.

Notons que même dans le cas où K est une surface fermée lisse (suffisamment de fois différentiable) de l'espace euclidien à trois dimensions, ce théorème ne découle pas immédiatement des résultats établis dans le cours de géométrie différentielle, où l'on se borne habituellement au cas des points A et B suffisamment proches l'un de l'autre.

Tout ce qui vient d'être exposé ici acquerrait plus de clarté si on munissait l'ensemble des courbes de l'espace métrique R d'une structure d'espace métrique. Ceci peut être réalisé, en définissant la distance de deux courbes L_1 et L_2 par la formule

$$\rho(L_1, L_2) = \inf \rho(f_1, f_2),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble de tous les couples possibles de représentations paramétriques des courbes L_1 et L_2 respectivement par les fonctions

$$P = f_1(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

et

$$P = f_2(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

La démonstration du fait que la distance ainsi définie vérifie les axiomes habituels est assez simple, à l'exception du détail suivant : on rencontre certaines difficultés pour démontrer que l'égalité

$$\rho(L_1, L_2) = 0$$

implique l'identité des courbes L_1 et L_2. Ceci s'explique par le fait que dans la formule qui définit la distance $\rho(L_1, L_2)$ la borne inférieure est atteinte pour un choix convenable des représentations paramétriques f_1 et f_2. Mais la démonstration de cette dernière affirmation est à son tour loin d'être simple.

Espaces vectoriels normés et topologiques

§ 1. Espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel est l'une des plus importantes en mathématiques. Elle va jouer un rôle important non seulement dans ce chapitre, mais aussi dans toute la suite.

1. Définition et exemples d'espaces vectoriels.

Définition 1. Un ensemble non vide L d'éléments $x, y, z, \ldots$ est appelé espace *vectoriel* ou *linéaire*, s'il satisfait aux conditions suivantes:

I. Quels que soient les éléments $x, y \in L$, il leur correspond (suivant une loi bien déterminée) un élément et un seul $z \in L$, appelé leur *somme* et noté $x + y$, la correspondance donnée jouissant des propriétés suivantes:

1) $x + y = y + x$ (commutativité),

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité),

3) dans L il existe un élément 0 tel que $x + 0 = x$, quel que soit $x \in L$ (existence d'un élément nul),

4) quel que soit $x \in L$, il existe dans L un élément $-x$ tel que $x + (-x) = 0$ (existence d'un élément opposé).

II. Quels que soient le nombre α et l'élément $x \in L$, il leur correspond (suivant une loi bien déterminée) un élément et un seul $\alpha x \in L$, nommé *produit* de l'élément x par le nombre α, cette correspondance jouissant des propriétés:

1) $$\alpha (\beta x) = (\alpha\beta) x,$$

2) $$1 \cdot x = x,$$

3) $$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x,$$

4) $$\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Suivant que l'ensemble des nombres que l'on utilise renferme tous les nombres complexes ou seulement les nombres réels, l'espace vectoriel considéré est dit complexe ou réel [1]. Sauf indication du contraire, nos considérations seront valables aussi bien pour les espaces réels que pour les espaces complexes.

[1] On peut même considérer des espaces vectoriels sur un corps commutatif arbitraire.

Notons que tout espace vectoriel complexe se réduit à un espace réel, si l'on se limite à la multiplication d'un vecteur par des nombres réels.

Considérons quelques exemples d'espaces vectoriels, en laissant au lecteur le souci de vérifier que chacun d'eux satisfait aux axiomes formulés ci-dessus.

1. La droite numérique $\mathbf{R}^1$, c.-à-d. l'ensemble des nombres réels avec les opérations arithmétiques d'addition et de multiplication habituelles constitue un espace vectoriel.

2. L'ensemble des systèmes ordonnés de n nombres réels $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dans lequel l'addition et la multiplication par un nombre réel sont définies par les formules

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

est aussi un espace vectoriel. On l'appelle *espace arithmétique réel à n dimensions* [1]) et on le note par le symbole $\mathbf{R}^n$. De manière analogue, on définit l'espace arithmétique complexe à n dimensions $\mathbf{C}^n$, en considérant cette fois l'ensemble des systèmes ordonnés de n nombres complexes (avec la multiplication par n'importe quel nombre complexe).

3. Les fonctions (réelles ou complexes) continues sur un segment $[a, b]$, avec les opérations habituelles donnant la somme de deux fonctions et le produit d'une fonction par un nombre, constituent un espace vectoriel (l'un des plus importants en analyse) que l'on désigne par $C[a, b]$.

4. L'espace l_2 ayant pour éléments les suites infinies de nombres (réels ou complexes)

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \tag{1}$$

avec les opérations

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots),$$
$$\alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots),$$

est un espace vectoriel. Le fait que la somme de deux suites vérifiant la condition (1) est une suite qui vérifie aussi cette condition résulte de l'inégalité évidente

$$(a_1 + a_2)^2 \leqslant 2a_1^2 + 2a_2^2.$$

---

[1]) Ce terme sera expliqué dans la suite.

5. L'ensemble des suites convergentes $x = (x_1, x_2, \ldots)$, dans lequel l'addition et la multiplication par un nombre sont définies comme dans l'exemple précédent, est un espace vectoriel. On le désigne par c.

6. Les suites convergeant vers 0, avec les mêmes opérations d'addition et de multiplication par un nombre, forment aussi un espace vectoriel que l'on désigne par c_0.

7. L'ensemble m des suites numériques bornées, avec les mêmes opérations d'addition et de multiplication par un nombre que dans les exemples 4-6, constitue également un espace vectoriel.

8. Enfin, l'ensemble $\mathbf{R}^\infty$ de toutes les suites numériques, avec les mêmes opérations d'addition et de multiplication par un nombre que dans les exemples 4-7, est aussi un espace vectoriel.

Comme les propriétés d'un espace vectoriel se traduisent par les propriétés de l'addition de ses éléments et de leur multiplication par un nombre, il est naturel de donner la définition suivante.

Définition 2. Deux espaces vectoriels L et L^* sont dits *isomorphes*, s'il est possible d'établir entre leurs éléments une correspondance biunivoque, compatible avec les opérations définies dans L et L^*. Cela signifie que si

$$x \leftrightarrow x^*$$

et

$$y \leftrightarrow y^*$$

$(x, y, \in L, x^*, y^* \in L^*)$, on a aussi

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$$

et

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

(où α est un nombre arbitraire).

Deux espaces isomorphes peuvent être considérés comme réalisant un seul et même espace. Comme exemples d'espaces vectoriels isomorphes on peut considérer l'espace arithmétique à n dimensions (réel ou complexe) et l'espace des polynômes de degré $\leqslant n - 1$ (à coefficients respectivement réels ou complexes) avec les opérations habituelles donnant la somme de deux polynômes et le produit d'un polynôme par un nombre (démontrez l'isomorphisme !).

2. Dépendance linéaire. Les éléments $x, y, \ldots, w$ d'un espace vectoriel L sont dits *linéairement dépendants*, s'il existe des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, non tous nuls, tels que

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = 0. \qquad (2)$$

Dans le cas contraire ces éléments sont dits *linéairement indépendants*. Autrement dit, les éléments $x, y, \ldots, w$ sont linéairement

indépendants, si l'égalité (2) implique les égalités

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0.$$

Un système infini d'éléments x, y, ... de l'espace vectoriel L est dit *linéairement indépendant*, si tout sous-système fini de ce système est linéairement indépendant.

Si dans l'espace vectoriel L on peut trouver n éléments linéairement indépendants mais on ne peut pas trouver $n + 1$ éléments linéairement indépendants, on dit que l'espace L est *de dimension n* (ou *à n dimensions*). Si, par contre, dans L on peut trouver un système comportant un nombre fini arbitraire d'éléments linéairement indépendants, on dit que l'espace L est de *dimension infinie*. On appelle *base* d'un espace vectoriel L de dimension n tout système comportant n éléments linéairement indépendants de cet espace. Il est aisé de vérifier que les espaces $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ sont de dimension n, ce qui justifie leur dénomination.

Dans le cours d'algèbre linéaire on n'étudie que des espaces vectoriels de dimension finie. Dans cet ouvrage au contraire, nous étudierons principalement des espaces de dimension infinie qui présentent le plus d'intérêt du point de vue de l'analyse. On propose au lecteur de vérifier que chacun des espaces vectoriels, indiqués aux exemples 3-8, est de dimension infinie.

3. Sous-espaces vectoriels. Un sous-ensemble non vide L' de l'espace vectoriel L est appelé *sous-espace vectoriel* de L, s'il est lui-même un espace vectoriel par rapport aux opérations d'addition et de multiplication par un nombre, définies dans L.

Autrement dit, l'ensemble $L' \subset L$ est un sous-espace vectoriel, si de $x \in L'$ et $y \in L'$ il résulte que $\alpha x + \beta y \in L'$, quels que soient les nombres α et β.

Tout espace vectoriel L admet un sous-espace particulier dont le seul élément est l'élément nul de L. D'autre part, l'espace L lui-même peut être considéré comme son sous-espace. Un sous-espace vectoriel, différent de L et contenant au moins un élément non nul, est dit *sous-espace propre* de L.

Considérons quelques exemples de sous-espaces vectoriels propres.

1. Soit L un espace vectoriel quelconque et soit x un élément non nul de L. L'ensemble des produits $\{\lambda x\}$, où λ parcourt l'ensemble de tous les nombres (réels ou complexes) constitue, évidemment, un sous-espace vectoriel de dimension 1. C'est un sous-espace propre de L, si la dimension de L est supérieure à 1.

2. Considérons l'espace vectoriel des fonctions continues $C[a, b]$ (cf. exemple 3, n° 1), et dans cet espace l'ensemble des polynômes $P[a, b]$. Il est clair que $P[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de $C[a, b]$ (dont la dimension est, comme celle de $C[a, b]$, infinie). Par ailleurs, l'espace $C[a, b]$ peut être considéré à son tour comme un sous-

espace de l'espace vectoriel plus vaste comportant toutes les fonctions (continues et non continues) définies sur $[a, b]$.

3. Considérons, enfin, les espaces l_2, c_0, c, m et $\mathbf{R}^\infty$ (exemples 4-8, nº 1). Il est aisé de voir que chacun d'eux est un sous-espace propre de son suivant.

Soit $\{x_\alpha\}$ un ensemble non vide quelconque d'éléments de l'espace vectoriel L. Alors, dans L il existe un sous-espace minimal (qui peut d'ailleurs coïncider avec L) contenant l'ensemble $\{x_\alpha\}$. En effet, il existe au moins un sous-espace vectoriel de L contenant $\{x_\alpha\}$, par exemple, l'espace L lui-même. D'autre part, l'*intersection de toute famille* $\{L_\gamma\}$ *de sous-espaces* de L *est un sous-espace de* L. En effet, si $L^* = \bigcap\limits_{\gamma} L_\gamma$ et $x, y \in L^*$, on a aussi $\alpha x + \beta y \in L^*$ quels que soient α et β. Considérons maintenant tous les sous-espaces de L contenant le système $\{x_\alpha\}$. Leur intersection sera précisément le sous-espace minimal de L contenant $\{x_\alpha\}$. Nous dirons que ce sous-espace est *engendré par l'ensemble* $\{x_\alpha\}$ ou qu'il est l'*enveloppe linéaire* de $\{x_\alpha\}$. Nous désignerons ce sous-espace par $L(\{x_\alpha\})$.

Exercices. Un système linéairement indépendant $\{x_\alpha\}$ d'éléments de l'espace vectoriel L est dit *base de Hamel*, si son enveloppe linéaire coïncide avec L. Démontrer les assertions suivantes:

1) dans tout espace vectoriel il existe une base de Hamel.

Indication. Utiliser le lemme de Zorn;

2) si $\{x_\alpha\}$ est une base de Hamel dans L, tout vecteur $x \in L$ peut être représenté de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire finie de vecteurs du système $\{x_\alpha\}$;

3) deux bases de Hamel quelconques d'un espace vectoriel sont équipotentes; la puissance d'une base de Hamel d'un espace vectoriel est appelée parfois *dimension algébrique* de cet espace;

4) pour que deux espaces vectoriels soient isomorphes il faut et il suffit qu'ils aient la même dimension algébrique.

4. Espaces quotients. Soient L un espace vectoriel et L' un sous-espace quelconque de L. Nous dirons que deux éléments x et y de L sont *équivalents*, si leur différence $x - y$ appartient à L'. Cette relation est réflexive, symétrique et transitive, de sorte qu'elle définit une partition de L en classes d'équivalence que l'on appelle encore *classes de contiguïté* (suivant L'). L'ensemble de toutes ces classes s'appele *espace quotient* de L par L' et se note L/L'.

Dans tout espace quotient on introduit de façon naturelle les opérations d'addition et de multiplication par un nombre. Plus précisément, soient ξ et η deux classes, c.-à-d. deux éléments de L/L'. Choisissons dans chacune de ces classes un représentant quelconque: soient x un représentant de ξ et y un représentant de η. Appelons somme des classes ξ et η la classe ζ qui contient l'élément $x + y$ et produit de la classe ξ par le nombre α la classe qui contient l'élément αx. Il est aisé de vérifier que le résultat ne change pas, si l'on remplace les représentants x et y des classes ξ et η par deux

autres représentants x' et y' de ces mêmes classes. Ainsi, nous avons bien défini deux opérations linéaires sur les éléments de l'espace quotient L/L'. On vérifie aussitôt que ces opérations satisfont à toutes les conditions énumérées dans la définition de l'espace vectoriel (faites cette vérification !). En d'autres termes, *tout espace quotient* L/L' (avec les opérations d'addition et de multiplication par un nombre définies ci-dessus) *constitue un espace vectoriel.*

Si L est un espace vectoriel de dimension n et L' est un sous-espace de L de dimension k, alors l'espace quotient L/L' est de dimension $n - k$ (démontrer !).

Soient L un espace vectoriel arbitraire et L' un sous-espace quelconque de L. La dimension de l'espace quotient L/L' s'appelle *codimension* du sous-espace L' par rapport à l'espace L.

Si le sous-espace $L' \subset L$ est de codimension finie n, alors dans L on peut trouver n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que tout élément $x \in L$ puisse être mis (de façon unique) sous la forme

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + y,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres et $y \in L'$. En effet, supposons que l'espace quotient L/L' soit de dimension n. Considérons dans cet espace quotient une base

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

et choisissons dans chaque classe ξ_k un représentant x_k. Soient maintenant x un élément arbitraire de L et ξ la classe de L/L' qui le contient. On a alors

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n.$$

Cela signifie, par définition, que tout élément de ξ, en particulier x, ne diffère de la même combinaison linéaire des éléments $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ que par un élément de L', c.-à-d.

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + y, \; y \in L'$$

La démonstration de l'unicité de cette représentation est laissée au lecteur.

5. Fonctionnelles linéaires. Nous appellerons *fonctionnelle* toute fonction numérique f définie sur un espace vectoriel L. Une fonctionnelle f est dite *additive*, si

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

quels que soient $x, y \in L$; elle est dite *homogène*, si pour tout $x \in L$ et pour tout nombre α on a

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Une fonctionnelle f, définie sur un espace vectoriel complexe, est dite *semi-homogène*, si $f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$, où $\bar{\alpha}$ désigne le nombre complexe conjugué de α.

Une fonctionnelle additive et homogène s'appelle *fonctionnelle linéaire*. Une fonctionnelle additive et semi-homogène est dite *semi-linéaire*.

Considérons quelques exemples de fonctionnelles linéaires.

1. Soit $\mathbf{R}^n$ l'espace arithmétique à n dimensions d'éléments $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un système de n nombres fixés arbitrairement. Alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

est une fonctionnelle linéaire sur $\mathbf{R}^n$. De même,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{x}_i$$

est une fonctionnelle semi-linéaire sur $\mathbf{C}^n$.

2. Les intégrales

$$I[x] = \int_a^b x(t)\,dt \quad \text{et} \quad \overline{I}[x] = \int_a^b \overline{x(t)}\,dt$$

représentent respectivement une fonctionnelle linéaire et une fonctionnelle semi-linéaire sur l'espace $C\,[a, b]$.

3. Considérons un exemple plus général. Soit y_0 une fonction continue sur $[a, b]$ bien déterminée. Pour toute fonction $x \in C\,[a, b]$ posons

$$F(x) = \int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt.$$

La linéarité de cette fonctionnelle découle des propriétés fondamentales de l'intégration. La fonctionnelle

$$\overline{F}(x) = \int_a^b \overline{x(t)}\,y_0(t)\,dt$$

sera semi-linéaire (sur l'espace complexe $C\,[a, b]$).

4. Considérons sur le même espace $C\,[a, b]$ une fonctionnelle linéaire d'un autre type. Plus précisément, posons pour toute fonction $x \in C\,[a, b]$

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0),$$

de sorte que la valeur de la fonctionnelle δ_{t_0} correspondant à la fonction x coïncide avec la valeur de cette fonction en un point fixé t_0.

Cette fonctionnelle s'écrit d'habitude sous la forme

$$\delta_{t_0}(x) = \int_a^b x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt,$$

où δ désigne une « fonction », nulle partout, sauf pour $t = 0$, dont l'intégrale est égale à 1 (δ-fonction de Dirac). Les « fonctions » de cette espèce sont définies rigoureusement dans le cadre de la théorie des distributions dont certains éléments seront exposés au § 4 du chapitre suivant.

5. Considérons un exemple de fonctionnelle linéaire sur l'espace l_2. Soit k un entier positif fixé quelconque. Pour tout élément

$$x = (x_1, \ldots, x_n \ldots)$$

de l'espace l_2 posons

$$f_k(x) = x_k.$$

La linéarité de cette fonctionnelle est évidente. Ces fonctionnelles peuvent être « étendues » à d'autres espaces de suites numériques, par exemple, à c_0, c, m, $\mathbf{R}^\infty$ (exemples 5-8, n° 1).

6. Interprétation géométrique des fonctionnelles linéaires. Soit f une fonctionnelle linéaire quelconque, non identiquement nulle, définie sur un espace vectoriel L. L'ensemble des éléments $x \in L$ vérifiant la condition

$$f(x) = 0$$

constitue un sous-espace vectoriel de L que l'on appelle *sous-espace des zéros* ou *noyau* de la fonctionnelle f. En effet, si $f(x) = f(y) = 0$, on a

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0.$$

On désigne ce sous-espace par Ker f [1]).

Le sous-espace Ker f est de codimension 1. En effet, considérons un élément quelconque x_0 n'appartenant pas à Ker f, c.-à-d. tel que $f(x_0) \neq 0$. Un tel élément existe, étant donné que $f(x) \not\equiv 0$. Sans restreindre la généralité on peut supposer $f(x_0) = 1$, car dans le cas contraire on pourrait remplacer x_0 par $\frac{x_0}{f(x_0)}$. (Il est clair que $f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right) = 1$.) Pour tout élément x posons $y = x - f(x)\, x_0$; alors $f(y) = f(x - f(x)\, x_0) = 0$. c.-à-d. $y \in \operatorname{Ker} f$. La représentation de x sous la forme

$$x = \alpha\, x_0 + y,\ y \in \operatorname{Ker} f,$$

pour x_0 fixé est unique. En effet, soit

$$x = \alpha x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f,$$
$$x = \alpha' x_0 + y', \ y' \in \operatorname{Ker} f.$$

Alors

$$(\alpha - \alpha')\, x_0 = y' - y.$$

[1]) Du mot anglais *kernel* qui signifie *noyau*.

Il est clair que pour $\alpha = \alpha'$ cette égalité donne $y' = y$. Si, par contre, $\alpha \neq \alpha'$, on a $x_0 = \frac{y'-y}{\alpha-\alpha'} \in \operatorname{Ker} f$, ce qui est en contradiction avec le choix de x_0.

On en déduit que deux éléments x_1 et x_2 appartiennent à la même classe de contiguïté suivant le sous-espace Ker f, si et seulement si $f(x_1) = f(x_2)$. En effet, de

$$x_1 = f(x_1) \cdot x_0 + y_1,$$
$$x_2 = f(x_2) \cdot x_0 + y_2$$

il résulte que

$$x_1 - x_2 = (f(x_1) - f(x_2)) \cdot x_0 + (y_1 - y_2),$$

d'où l'on voit que $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} F$ si et seulement si le coefficient de x_0, c.-à-d. $f(x_1) - f(x_2)$, est égal à 0.

Chaque classe ξ suivant le sous-espace Ker f est définie par un quelconque de ses représentants. Un tel représentant peut être choisi de la forme αx_0. On voit alors que le sous-espace $L/\operatorname{Ker} f$ est bien de dimension 1, c.-à-d. que Ker f est de codimension 1.

La fonctionnelle linéaire s'annulant sur le sous-espace Ker f est déterminée par ce sous-espace à un facteur constant près.

En effet, supposons que les fonctionnelles linéaires f et g aient le même noyau : Ker f = Ker g. Choisissons un élément x_0 de façon que $f(x_0) = 1$. Il est aisé de voir que $g(x_0) \neq 0$. Pour cela remarquons que pour tout $x \in L$ on a

$$x = f(x)\, x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$$

et

$$g(x) = f(x)\, g(x_0) + g(y) = f(x)\, g(x_0).$$

Donc, si la valeur de $g(x_0)$ était nulle, la fonctionnelle g serait identiquement nulle. L'égalité $g(x) = g(x_0) f(x)$ exprime la proportionnalité des fonctionnelles g et f.

Pour tout sous-espace L' de codimension 1 on peut trouver une fonctionnelle f telle que Ker $f = L'$. Il suffit de choisir un élément quelconque $x_0 \notin L'$ et de représenter chaque élément $x \in L$ sous la forme $x = \alpha\, x_0 + y$. Une telle représentation est unique. En posant $f(x) = \alpha$ nous obtiendrons une fonctionnelle linéaire f telle que Ker $f = L'$ (vérifier !).

Soit L' un sous-espace quelconque de codimension 1 de l'espace vectoriel L ; alors toute classe de contiguïté de l'espace L suivant le sous-espace L' est appelée *hyperplan* parallèle au sous-espace L' (en particulier, le sous-espace L' lui-même est un hyperplan contenant 0, c.-à-d. « passant par l'origine »). Autrement dit, un hyperplan M' parallèle au sous-espace L' est un ensemble qui peut être obtenu de L' par une translation de vecteur $x_0 \in L$:

$$M' = L' + x_0 = \{y : y = x + x_0,\ x \in L'\}.$$

Il est clair que si $x_0 \in L'$, on a $M' = L'$; par contre, si $x_0 \notin L'$, alors $M' \neq L'$. Si f est une fonctionnelle linéaire non triviale sur L, alors l'ensemble $M_f = \{x : f(x) = 1\}$ est un hyperplan parallèle au sous-espace Ker f (en effet, lorsqu'un élément x_0 est choisi de façon que $f(x_0) = 1$, on peut représenter tout vecteur $x \in M_f$ sous la forme $x = x_0 + y$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$). D'autre part, M' étant un hyperplan quelconque parallèle au sous-espace L' (de codimension 1) et ne passant pas par l'origine, il existe une fonctionnelle linéaire u n i q u e f telle que $M' = \{x : f(x) = 1\}$. En effet, soit $M' = L' + x_0$, $x_0 \in L$; alors tout élément $x \in L$ peut être représenté de façon unique sous la forme $x = \alpha x_0 + y$, où $y \in L'$. En posant, comme plus haut, $f(x) = \alpha$, on obtient la fonctionnelle linéaire cherchée ; l'unicité résulte du fait que si $g(x) \equiv 1$ pour $x \in M'$, alors $g(y) \equiv 0$ pour $y \in L'$, de sorte que

$$g(\alpha x_0 + y) = \alpha = f(\alpha x_0 + y).$$

Ainsi, *nous avons établi une correspondance biunivoque entre toutes les fonctionnelles linéaires non triviales, définies sur l'espace vectoriel L, et tous les hyperplans de L ne passant pas par l'origine.*

E x e r c i c e. Soit $f, f_1, \ldots, f_n$ des fonctionnelles linéaires sur l'espace vectoriel L telles que $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ implique $f(x) = 0$. Alors il existe des constantes $a_1, \ldots, a_n$ telles que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$$

pour tous les $x \in L$.

§ 2. Ensembles convexes et fonctionnelles convexes Théorème de Hahn-Banach

1. Ensembles convexes et corps convexes. La notion de *convexité* est à la base de nombreuses questions de la théorie des espaces vectoriels. Elle est fondée sur des considérations géométriques intuitives, mais peut être formulée aussi en termes purement analytiques.

Soit L un espace vectoriel r é e l et soient x, y deux points de cet espace. On appelle *segment fermé* joignant les points x et y dans L l'ensemble de tous les éléments de la forme

$$\alpha x + \beta y, \ \alpha, \ \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1.$$

Un segment privé de ses extrémités x et y s'appelle *segment ouvert.*

Un ensemble $M \subset L$ est dit *convexe*, si pour tout couple de points $x, y \in M$, le segment joignant ces points est contenu dans M.

On appelle *noyau* $J(E)$ d'un ensemble $E \subset L$ l'ensemble des points $x \in E$ possédant la propriété suivante : pour tout point $y \in L$, il existe un nombre $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tel que $x + ty \in E$ pour $|t| < \varepsilon$.

Un ensemble convexe dont le noyau n'est pas vide s'appelle *corps convexe.*

Exemples. 1. Dans l'espace euclidien à trois dimensions le cube, la boule, le tétraèdre, le demi-espace sont des corps convexes. Dans le même espace le segment, le plan, le triangle sont des ensembles convexes, mais non des corps convexes.

2. Considérons dans l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ l'ensemble des fonctions vérifiant la condition

$$|f(t)| \leqslant 1.$$

Cet ensemble est convexe; en effet, si

$$|f(t)| \leqslant 1 \text{ et } |g(t)| \leqslant 1,$$

alors, pour $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, on a

$$|\alpha f(t) + \beta g(t)| \leqslant \alpha + \beta = 1.$$

Exercice. Vérifier, si cet ensemble est un corps convexe.

3. La boule unité dans l_2, c.-à-d. l'ensemble des points $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ tels que $\sum x_n^2 \leqslant 1$, est un corps convexe. Son noyau est constitué par les points x vérifiant la condition $\sum x_n^2 < 1$.

4. Le parallélépipède fondamental Π dans l_2 est un ensemble convexe, mais non un corps convexe. En effet, soit $x \in \Pi$; cela signifie que $|x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tous les $n = 1, 2, \ldots$ Posons $y_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$. Soit $x + ty_0 \in \Pi$, c.-à-d. $|x_n + \frac{t}{n}| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$; alors

$$\left|\frac{t}{n}\right| \leqslant \left|x_n + \frac{t}{n}\right| + |x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

d'où $t = 0$ et, donc, le noyau de l'ensemble Π est vide.

Exercice. Soit Φ l'ensemble des points $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ de l'espace l_2 vérifiant la condition $\sum n^2 x_n^2 \leqslant 1$. Démontrer que Φ est un ensemble convexe, mais n'est pas un corps convexe.

Si M est un ensemble convexe, son noyau $J(M)$ est aussi convexe. En effet, soient $x, y \in J(M)$ et $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Alors pour $a \in L$ donné on peut trouver deux nombres $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ tels que pour $|t_1| < \varepsilon_1$ et $|t_2| < \varepsilon_2$ les points $x + t_1 a$ et $y + t_2 a$ appartiennent à l'ensemble M; par conséquent, si $|t| < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; le point $\alpha(x + ta) + \beta(y + ta) = z + ta$ appartient aussi à M, c.-à-d. $z \in J(M)$.

Nous allons établir maintenant une propriété importante des ensembles convexes.

Théorème 1. *L'intersection de toute famille d'ensembles convexes est un ensemble convexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $M = \bigcap_{\alpha} M_{\alpha}$, tous les ensembles M_{α} étant convexes. Soient, d'autre part, x et y deux points quelconques de M. Le segment joignant ces points appartient à chacun des ensembles M_{α}, donc à M. Par conséquent, M est bien un ensemble convexe.

Remarquons que l'intersection des corps convexes (qui constitue un ensemble convexe) n'est pas nécessairement un c o r p s convexe (donner un exemple).

Pour tout ensemble A d'un espace vectoriel L il existe un plus petit ensemble convexe qui le contient, c'est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A (il existe toujours au moins un ensemble convexe contenant A ; par exemple, l'espace L tout entier). Le plus petit ensemble convexe contenant A s'appelle *enveloppe convexe* de l'ensemble A.

Considérons un exemple important d'enveloppe convexe. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ des points d'un espace vectoriel quelconque. Nous dirons que ces points sont *indépendants*, si les vecteurs $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$ sont linéairement indépendants. (Cela équivaut à dire que les relations

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$$

impliquent

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0.)$$

L'enveloppe convexe des points indépendants $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ s'appelle *simplexe* de dimension n ; les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont appelés sommets du simplexe. Un simplexe de dimension 0 est un point. Un simplexe de dimension 1 est un segment, un simplexe de dimension 2 est un triangle, un simplexe de dimension 3 est un tétraèdre.

Si les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont indépendants, il en est de même pour n'importe quels $k + 1$ d'eux ($k < n$) ; ces derniers engendrent donc un simplexe de dimension k que l'on appelle *face de dimension k* du simplexe engendré par les n points donnés. Par exemple, un tétraèdre de sommets e_1, e_2, e_3, e_4 a quatre faces de dimension 2, définies respectivement par les triplets de sommets (e_2, e_3, e_4), (e_1, e_3, e_4), (e_1, e_2, e_4), (e_1, e_2, e_3) ; il a six faces de dimension 1 (arêtes) et quatre faces de dimension 0 (sommets).

T h é o r è m e 2. *Le simplexe de sommets $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ est l'ensemble de tous les points qui peuvent être mis sous la forme*

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1. \tag{1}$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est aisé de vérifier que l'ensemble S des points de la forme (1) constitue un ensemble convexe contenant les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. D'autre part, tout ensemble convexe contenant ces points, contient nécessairement les points de la forme (1). Par conséquent, S est le plus petit ensemble convexe contenant les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

2. Fonctionnelles convexes. La notion d'ensemble convexe est étroitement liée avec la notion importante de f o n c t i o n n e l l e c o n v e x e.

D é f i n i t i o n. Une fonctionnelle non négative p, définie sur un espace vectoriel réel L, est dite *convexe*, si

1) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, quels que soient $x, y \in L$;
2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, quels que soient $x \in L$ et $\alpha > 0$.

Nous n'exigeons pas que la valeur de $p(x)$ soit finie pour tous les $x \in L$; autrement dit, nous admettons que pour certains $x \in L$ on peut avoir $p(x) = +\infty$.

Considérons quelques exemples de fonctionnelles convexes.

1. La longueur d'un vecteur dans l'espace euclidien à n dimensions $\mathbf{R}^n$. Ici la première condition signifie que la longueur de la somme de deux vecteurs est inférieure ou égale à la somme de leurs longueurs (inégalité triangulaire); quant à la seconde, elle résulte immédiatement de la définition de la longueur d'un vecteur dans $\mathbf{R}^n$.

2. Soit M l'espace des fonctions bornées x sur un ensemble quelconque S et soit s_0 un point fixe de S. Alors

$$p_{s_0}(x) = |x(s_0)|$$

est une fonctionnelle convexe.

3. Soit m l'espace des suites numériques bornées $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. La fonctionnelle

$$p(x) = \sup_n |x_n|$$

est convexe.

3. Fonctionnelle de Minkowski. Etudions la liaison existant entre les fonctionnelles convexes et les ensembles convexes.

T h é o r è m e 3. *Si p est une fonctionnelle convexe sur l'espace vectoriel L et k est un nombre positif, l'ensemble*

$$E = \{x : p(x) \leqslant k\}$$

est convexe. Si la fonctionnelle p est partout finie, alors E est un corps convexe ayant pour noyau l'ensemble

$$\{x : p(x) < k\}$$

(*contenant nécessairement le point* 0).

D é m o n s t r a t i o n. Si $x, y \in E$ et $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, alors

$$p(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha p(x) + \beta p(y) \leqslant k,$$

c.-à-d. E est un ensemble convexe. Supposons maintenant la fonctionnelle p finie, $p(x) < k$; alors pour $t > 0$ et $y \in L$ on a

$$p(x \pm ty) \leqslant p(x) + tp(\pm y).$$

Si $p(-y) = p(y) = 0$, on a $x \pm ty \in E$ pour tous les t; si, par contre, au moins l'un des nombres non négatifs $p(y)$, $p(-y)$ est différent de 0, on a $x \pm ty \in E$ pour

$$t < \frac{k - p(x)}{\max(p(y),\ p(-y))}.$$

Choisissons une valeur bien déterminée de k, par exemple, $k = 1$. Alors toute fonctionnelle convexe finie p définit de façon unique dans L un corps convexe $E = \{x : p(x) \leqslant 1\}$ tel que $0 \in J(E)$. Inversement, soit E un corps convexe dont le noyau contient le point 0. Alors

$$p_E(x) = \inf\left\{r : \frac{x}{r} \in E,\ r > 0\right\} \tag{2}$$

est une fonctionnelle convexe finie. On l'appelle *fonctionnelle de Minkowski* pour le corps convexe E.

Montrons que la fonctionnelle de Minkowski (2) est convexe. Pour tout $x \in L$ l'élément $\frac{x}{r}$ appartient à E, si r est assez grand ; donc, la valeur de $p_E(x)$, définie par l'égalité (2), est non négative et finie. Si $t > 0$ et $y = tx$, on a

$$p_E(y) = \inf\left\{r > 0 : \frac{y}{r} \in E\right\} = \inf\left\{r > 0 : \frac{tx}{r} \in E\right\} =$$
$$= \inf\left\{tr' > 0 : \frac{x}{r'} \in E\right\} = t \inf\left\{r' > 0 : \frac{x}{r'} \in E\right\} = tp_E(x). \tag{3}$$

Soient maintenant $x_1, x_2 \in L$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Choisissons les nombres r_i $(i = 1, 2)$ de façon que $p_E(x_i) < r_i < p_E(x_i) + \varepsilon$; alors $\frac{x_i}{r_i} \in E$. Posons $r = r_1 + r_2$; alors le point $\frac{x_1 + x_2}{r} = \frac{r_1 x_1}{r r_1} + \frac{r_2 x_2}{r r_2}$ appartient au segment d'extrémités $\frac{x_1}{r_1}$ et $\frac{x_2}{r_2}$. En vertu de la convexité de E, ce segment est contenu dans E ; en particulier, son point $\frac{x_1 + x_2}{r}$ appartient à E. Par conséquent,

$$p_E(x_1 + x_2) \leqslant r = r_1 + r_2 < p_E(x_1) + p_E(x_2) + 2\varepsilon.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a

$$p_E(x_1 + x_2) \leqslant p_E(x_1) + p_E(x_2). \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) signifient précisément que la fonctionnelle $p_E(x)$ est convexe.

Si E est un ensemble convexe contenant le point 0, alors l'égalité (2) définit une fonctionnelle $p_E(x)$ convexe, mais non nécessairement finie.

Exercice. Un ensemble A de l'espace vectoriel L est dit *absorbant*, si pour tout $x \in L$ il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $x \in \lambda A$ pour tous les $\lambda \geqslant \alpha$. Démontrer qu'un ensemble convexe A est absorbant si et seulement si la fonctionnelle de Minkowski pour cet ensemble est finie.

4. Théorème de Hahn-Banach. Soient L un espace vectoriel réel et L_0 un sous-espace quelconque de L. Soit, en outre, f_0 une fonctionnelle linéaire définie sur le sous-espace L_0. Une fonctionnelle f, définie sur l'espace L tout entier, est appelée *prolongement* de la fonctionnelle f_0, si

$$f(x) = f_0(x) \text{ pour tous les } x \in L_0.$$

Le problème du prolongement d'une fonctionnelle se présente fréquemment en analyse. Le rôle fondamental dans toutes ces questions appartient au théorème suivant.

Théorème 4 (de Hahn-Banach). *Soit p une fonctionnelle convexe finie, définie sur l'espace vectoriel réel L, et soit L_0 un sous-espace vectoriel de L. Si f_0 est une fonctionnelle linéaire sur L_0, majorée (sur L_0) par la fonctionnelle $p(x)$,* c.-à-d. *si pour tout $x \in L_0$ on a*

$$f_0(x) \leqslant p(x), \tag{5}$$

alors f_0 peut être prolongée de façon à obtenir une fonctionnelle linéaire f sur L, majorée par $p(x)$ partout sur L.

Démonstration. Montrons que si $L_0 \neq L$, la fonctionnelle f_0 peut être prolongée à un sous-espace L', plus vaste que L_0, tout en respectant la condition (5). En effet, soit z un élément quelconque de L n'appartenant pas à L_0 et soit L' le sous-espace engendré par L_0 et z. Chaque élément de L' est de la forme

$$tz + x, \text{ où } x \in L_0.$$

Si f' est le prolongement cherché de la fonctionnelle f_0 à L', on a

$$f'(tz + x) = tf'(z) + f_0(x)$$

ou, si l'on pose $f'(z) = c$,

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

Choisissons maintenant c de façon que la condition de majoration (5) soit conservée sur L', c.-à-d. de façon que pour tous les $x \in L_0$ et tous les t réels on ait l'inégalité

$$f_0(x) + tc \leqslant p(x + tz).$$

Pour $t > 0$ cette inégalité équivaut à la condition

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c \leqslant p\left(\frac{x}{t}+z\right) \text{ ou } c \leqslant p\left(\frac{x}{t}+z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right), \qquad (6)$$

pout $t < 0$ elle est équivalente à la condition

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)$$

ou

$$c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right). \qquad (7)$$

Montrons qu'il existe toujours un nombre c satisfaisant à ces deux conditions. Soient y' et y'' deux éléments arbitraires de L_0. Alors

$$-f_0(y'')+p(y''+z) \geqslant -f_0(y')-p(-y'-z). \qquad (8)$$

Ceci résulte de l'inégalité

$$f_0(y'')-f_0(y') \leqslant p(y''-y') =$$
$$= p((y''+z)-(y'+z)) \leqslant p(y''+z)+p(-y'-z).$$

Posons

$$c'' = \inf_{y''}(-f_0(y'')+p(y''+z)),$$
$$c' = \sup_{y'}(-f_0(y')-p(-y'-z)).$$

Comme les éléments y' et y'' sont arbitraires, de (8) il résulte que $c'' \geqslant c'$. En choisissant c de façon que

$$c' \leqslant c \leqslant c'',$$

définissons la fonctionnelle f' sur L' par la formule

$$f'(tz+x) = tc+f_0(x).$$

Cette fonctionnelle satisfait à la condition de majoration (5).

Ainsi, nous avons montré que si une fonctionnelle f_0 est définie sur un sous-espace $L_0 \subset L$ et vérifie sur L_0 la condition (5), elle peut être prolongée à un sous-espace plus grand L' de façon que la condition (5) soit conservée.

Si dans L on peut choisir un système dénombrable d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ engendrant l'espace L tout entier, on construit la fonctionnelle sur L par récurrence, en considérant la suite de sous-espaces

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, \; L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\}, \; \ldots$$

(ici $\{L^{(k)}, x_{k+1}\}$ désigne le plus petit sous-espace vectoriel de L contenant $L^{(k)}$ et x_{k+1}). Comme tout élément $x \in L$ se trouve alors dans un sous-espace $L^{(k)}$, la fonctionnelle f_0 sera prolongée à l'espace L tout entier.

Dans le cas général (c.-à-d. lorsqu'il est impossible de trouver un ensemble dénombrable d'éléments engendrant l'espace L) la démonstration fait appel au lemme de Zorn. L'ensemble $\mathfrak{F}$ de tous les prolongements de la fonctionnelle f_0, vérifiant la condition (5), est ordonné, et tout sous-ensemble totalement ordonné $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ possède une borne supérieure. Cette borne supérieure n'est autre chose que la fonctionnelle définie sur la réunion des domaines de définition des fonctionnelles $f' \in \mathfrak{F}_0$ et coïncidant avec chacune de ces fonctionnelles f' sur son domaine de définition. En vertu du lemme de Zorn, l'ensemble $\mathfrak{F}$ possède un élément maximal f. Cet élément maximal f est précisément la fonctionnelle cherchée. En effet, elle est un prolongement de la fonctionnelle initiale f_0, vérifie la condition (5) et est définie sur tout l'espace L, car sinon nous l'aurions prolongée de la manière indiquée ci-dessus à un sous-espace plus grand que le sous-espace propre sur lequel elle est définie, de sorte que f ne serait pas un élément maximal de $\mathfrak{F}$.

Le théorème est démontré.

Considérons maintenant le théorème de Hahn-Banach pour le cas d'un espace vectoriel complexe.

Une fonctionnelle non négative p, définie sur l'espace vectoriel complexe L, est appelée *convexe*, si pour tous les $x, y \in L$ et tous les nombres complexes λ on a

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x).$$

Théorème 4a. *Soit p une fonctionnelle convexe finie sur l'espace vectoriel complexe L et soit f_0 une fonctionnelle linéaire, définie sur un sous-espace vectoriel quelconque $L_0 \subset L$ et vérifiant sur ce sous-espace la condition*

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad x \in L_0.$$

Alors il existe une fonctionnelle linéaire f, définie sur tout l'espace L et vérifiant les conditions

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in L,$$
$$f(x) = f_0(x), \quad x \in L_0.$$

Démonstration. Désignons par L_R et L_{0R} les espaces L et L_0 considérés comme espaces vectoriels réels. Il est clair que p est une fonctionnelle convexe finie sur L_R et $f_{0R}(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ est une fonctionnelle linéaire réelle sur L_{0R} vérifiant la condition

$$|f_{0R}(x)| \leqslant p(x)$$

et, à plus forte raison, la condition

$$f_{0R}(x) \leqslant p(x).$$

D'après le théorème 4, il existe une fonctionnelle linéaire réelle f_R, définie sur tout l'espace L_R et satisfaisant aux conditions

$$f_R(x) \leqslant p(x), \quad x \in L_R (= L),$$
$$f_R(x) = f_{0R}(x), \quad x \in L_{0R} (= L_0).$$

Il est clair que $-f_R(x) = f_R(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$, si bien que

$$|f_R(x)| \leqslant p(x), \; x \in L_R (= L). \tag{9}$$

Définissons une fonctionnelle f sur L, en posant

$$f(x) = f_R(x) - if_R(ix)$$

(ici nous utilisons le fait que L est un espace vectoriel c o m p l e x e et donc dans cet espace la multiplication par un nombre complexe est définie). On vérifie aussitôt que f est une fonctionnelle linéaire complexe sur L telle que

$$f(x) = f_0(x) \text{ pour } x_0 \in L_0,$$
$$\operatorname{Re} f(x) = f_R(x) \text{ pour } x \in L.$$

Il reste à montrer que $|f(x)| \leqslant p(x)$ pour tous les $x \in L$. Supposons le contraire; alors pour un certain $x_0 \in L$ on a $|f(x_0)| > p(x_0)$. Mettons le nombre complexe $f(x_0)$ sous la forme $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et posons $y_0 = e^{-i\varphi}x_0$. Alors on a

$$f_R(y_0) = \operatorname{Re} f(y_0) = \operatorname{Re}[e^{-i\varphi}f(x_0)] = \rho > p(x_0) = p(y_0),$$

ce qui contredit la condition (9).

Le théorème est démontré.

E x e r c i c e. Montrer que dans le théorème de Hahn-Banach on peut omettre la condition que la fonctionnelle p soit finie.

5. Séparation des ensembles convexes dans un espace vectoriel. Soient L un espace vectoriel réel et M, N deux sous-ensembles de L. On dit qu'une fonctionnelle linéaire f, définie sur L, *sépare* ces deux ensembles, s'il existe un nombre C tel que

$$f(x) \geqslant C \text{ pour } x \in M \text{ et } f(x) \leqslant C \text{ pour } x \in N.$$

Les deux assertions qui suivent sont des conséquences immédiates de cette définition.

1) La fonctionnelle linéaire f sépare les ensembles M et N si et seulement si elle sépare les ensembles $M - N$ et $\{0\}$ (c.-à-d. l'ensemble de tous les éléments de la forme $x - y$ avec $x \in M$, $y \in M$ et le point 0).

2) La fonctionnelle linéaire f sépare les ensembles M et N si et seulement si pour tout $x \in L$ elle sépare les ensembles $M - x$ et $N - x$.

Du théorème de Hahn-Banach on obtient facilement le théorème suivant sur la séparation des ensembles convexes dans un espace vectoriel qui admet de nombreuses applications.

Théorème 5. *Soient M et N deux ensembles convexes disjoints dans un espace vectoriel réel L. Si au moins l'un d'eux, par exemple M, possède un noyau non vide (c.-à-d. est un corps convexe), il existe une fonctionnelle linéaire non nulle f définie sur L qui sépare M et N.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité on peut supposer que le point 0 appartient au noyau de l'ensemble M. (Dans le cas contraire on aurait considéré les ensembles $M - x_0$ et $N - x_0$, où x_0 est un point quelconque du noyau de M.) Soit y_0 un point quelconque de l'ensemble N; alors le point $-y_0$ appartient au noyau de l'ensemble $M - N$ et 0 appartient au noyau de l'ensemble $K = M - N + y_0$. Les ensembles M et N étant disjoints, on a $0 \notin M - N$ et $y_0 \notin K$. Soit p la fonctionnelle de Minkowski pour l'ensemble K. Alors $p(y_0) \geqslant 1$ (car $y_0 \notin K$). Introduisons la fonctionnelle linéaire

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha p(y_0).$$

Elle est définie sur le sous-espace de dimension 1, constitué des éléments de la forme αy_0, et vérifie la condition

$$f_0(\alpha y_0) \leqslant p(\alpha y_0),$$

car $p(\alpha y_0) = \alpha p(y_0)$ pour $\alpha \geqslant 0$ et $f_0(\alpha y_0) = \alpha f_0(y_0) < 0 < p(\alpha y_0)$ pour $\alpha < 0$. D'après le théorème de Hahn-Banach, la fonctionnelle f_0 peut être prolongée de façon à obtenir une fonctionnelle linéaire f, définie sur tout l'espace L et vérifiant sur L la condition $f(y) \leqslant p(y)$. On en déduit que $f(y) \leqslant 1$ pour $y \in K$ et, en même temps, $f(y_0) \geqslant 1$. Ainsi, la fonctionnelle f sépare les ensembles K et $\{y_0\}$ et donc les ensembles $M - N$ et $\{0\}$; par conséquent, f sépare les ensembles M et N.

Le théorème est démontré.

§ 3. Espaces normés

Au chapitre II nous nous sommes occupés de l'étude des espaces topologiques et, en particulier, des espaces métriques, c.-à-d. des ensembles pour les éléments desquels, est définie d'une façon ou d'une autre la notion de proximité. Ensuite, dans les premiers paragraphes de ce chapitre, nous avons abordé l'étude des espaces vectoriels. Jusqu'ici ces notions étaient considérées séparément. Cependant, en analyse on est souvent amené à considérer des espaces munis non seulement des opérations d'addition et de multiplication par un nombre, mais en même temps d'une topologie, c.-à-d. des espaces vectoriels topologiques. Parmi ces derniers

une classe importante est constituée par les espaces normés. La théorie de ces espaces a été développée dans les travaux de S. Banach et de nombreux autres auteurs.

1. Définition et exemples d'espaces normés.

Définition 1. Soit L un espace vectoriel. La fonctionnelle convexe finie p, définie sur L, s'appelle *norme*, si (en dehors de la convexité) elle satisfait aux conditions supplémentaires suivantes:

1) $p(x) = 0$ seulement pour $x = 0$,

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pour tout α.

Ainsi, donc, en se rappelant la définition de la convexité, on peut dire qu'on appelle norme sur L une fonctionnelle finie qui satisfait aux trois conditions suivantes:

1) $p(x) \geqslant 0$, l'égalité $p(x) = 0$ ayant lieu seulement pour $x = 0$,

2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, $x, y \in L$,

3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, quel que soit le nombre α.

Définition 2. L'espace vectoriel L muni d'une norme s'appelle *espace normé*. On note la norme d'un élément $x \in L$ par le symbole $\|x\|$.

Tout espace normé peut être considéré comme un espace métrique muni de la distance

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

La vérité des axiomes de l'espace métrique résulte aussitôt des propriétés 1)-3) de la norme. Ainsi, toutes les notions et tous les résultats, exposés au chap. II pour les espaces métriques, s'étendent aux espaces normés.

Un espace normé complet s'appelle *espace de Banach* ou, plus brièvement, *B-espace*.

Exemples d'espaces normés. Beaucoup d'espaces considérés au chap. II comme exemples d'espaces métriques (et au § 1 de ce chapitre comme exemples d'espaces vectoriels) peuvent être en fait munis d'une structure naturelle d'espace normé.

1. La droite $\mathbf{R}^1$ devient un espace normé, si pour tout $x \in \mathbf{R}^1$ on pose $\|x\| = |x|$.

2. Si dans l'espace réel à n dimensions $\mathbf{R}^n$ d'éléments

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

on pose

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \tag{1}$$

tous les axiomes de la norme sont satisfaits. La formule

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

définit sur $\mathbf{R}^n$ la même métrique que nous avons déjà considérée sur cet espace.

Dans ce même espace vectoriel on peut introduire la norme

$$\| x_1 \|_1 = \sum_{k=1}^{n} | x_k | \tag{2}$$

ou encore la norme

$$\| x \|_0 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} | x_k |. \tag{3}$$

Ces normes définissent sur $\mathbf{R}^n$ des métriques que nous avons déjà considérées dans les exemples 4 et 5, n° 1, § 1, chap. II. La vérification du fait que dans chacun de ces cas les axiomes de la norme sont vérifiés ne présente aucune difficulté.

Dans l'espace complexe à n dimensions $\mathbf{C}^n$ on peut introduire la norme

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2}$$

ou l'une quelconque des normes (2) et (3).

3. Dans l'espace $C\,[a, b]$ des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ introduisons une norme par la formule

$$\| f \| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} | f(t) |. \tag{4}$$

La distance correspondante a été déjà considérée dans l'exemple 6, n° 1, § 1, chap. II.

4. Soit m l'espace des suites numériques bornées

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Posons

$$\| x \| = \sup_n | x_n |. \tag{5}$$

Les conditions 1)-3) figurant dans la définition de la norme sont évidemment vérifiées ici. La métrique induite dans m par cette norme coïncide avec celle que nous avons déjà considérée (chap. II, § 1, n° 1, exemple 9).

2. Sous-espaces d'un espace normé. Nous avons appelé sous-espace d'un espace vectoriel L (non muni de topologie) tout sous-ensemble non vide $L_0 \subset L$ tel que si $x, y \in L_0$, on a $\alpha x + \beta y \in L_0$. Dans le cas d'un espace normé le plus d'intérêt présentent les sous-espaces vectoriels *fermés*, c.-à-d. les sous-espaces contenant tous leurs points d'accumulation. Dans un espace normé de dimension finie tout sous-espace est nécessairement fermé (démontrer !). Dans le cas d'un espace de dimension infinie il n'en est pas de même. Par exemple, dans l'espace $C\,[a, b]$ des fonctions continues sur $[a, b]$,

muni de la norme (4), les polynômes forment un sous-espace qui n'est pas fermé [1]).

Un autre exemple: dans l'espace m des suites numériques bornées, les suites ne contenant qu'un nombre fini de termes non nuls forment un sous-espace. Pourtant, ce sous-espace n'est pas fermé pour la norme (5), car sa fermeture contient, par exemple, la suite $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$.

Dans la plupart des cas nous allons nous borner aux sous-espaces fermés; c'est pourquoi il est naturel de changer la terminologie que nous avons adoptée au § 1. Désormais nous appellerons *sous-espaces* d'un espace normé seulement ses sous-espaces fermés; en particulier, nous appellerons sous-espace engendré par un système donné d'éléments $\{x_\alpha\}$ le plus petit des sous-espaces *fermés* contenant $\{x_\alpha\}$. Nous dirons aussi que ce sous-espace est la *fermeture linéaire* du système $\{x_\alpha\}$. L'ensemble (non fermé) d'éléments, qui possède la propriété de contenir en même temps que deux éléments x et y toute combinaison linéaire $\alpha x + \beta y$ de ces éléments, sera appelé *variété linéaire*.

Nous dirons qu'un système d'éléments appartenant à un espace normé E est *complet*, si le sous-espace (fermé!) qu'il engendre coïncide avec E. Par exemple, en vertu du théorème de Weierstrass, le système des fonctions $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ est complet dans l'espace des fonctions continues $C[a, b]$.

Exercices. 1. Soient R un espace de Banach et $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ une suite de boules fermées emboîtées dans R. Démontrer que cette suite a une intersection non vide (on n'exige pas que les rayons de ces boules tendent vers 0; cf. exercice 3, page 64). Donner un exemple de suite d'ensembles non vides emboîtés qui soient tous convexes, fermés et bornés et dont l'intersection soit vide.

2. Soit R un B-espace de dimension infinie. Montrer que sa dimension algébrique (cf. exercice 3, page 119) est non dénombrable.

3. Soient R un espace de Banach et M un sous-espace fermé de R. Considérons l'espace quotient $P = R/M$ et introduisons dans cet espace une norme, en posant pour chaque classe de contiguïté ξ

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\|.$$

Démontrer que la fonctionnelle ainsi définie est bien une norme sur P et que l'espace P est complet pour cette norme.

4. Soit R un espace vectoriel normé; démontrer les assertions suivantes:

1) toute variété linéaire de dimension finie dans R est fermée;

2) M et N étant respectivement un sous-espace quelconque et un sous-espace de dimension finie dans R, leur somme

$$M + N = \{x : x = y + z,\ y \in M,\ z \in N\}$$

---

[1]) En vertu du théorème de Weierstrass qui dit que toute fonction continue sur un segment est la limite d'une suite uniformément convergente de polynômes, la fermeture du sous-espace des polynômes dans $C[a, b]$ coïncide avec $C[a, b]$.

est un sous-espace vectoriel (donc, $M + N$ est fermé !) ; donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels dans l_2 dont la somme ne soit pas fermée ;

3) soit Q un ensemble convexe ouvert dans R et soit $x_0 \notin Q$; alors il existe un hyperplan fermé passant par le point x_0 et n'ayant avec Q aucun point commun.

5. Deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$, définies sur l'espace vectoriel R, sont dites *équivalentes*, s'il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que $a \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant b \| x \|_1$ pour tous les $x \in R$. Démontrer que si l'espace R est de dimension finie, n'importe quelles deux normes sur R sont équivalentes.

§ 4. Espaces euclidiens

1. Définition d'un espace euclidien. Une méthode bien connue de définition de la norme sur un espace vectoriel consiste à définir sur cet espace un produit scalaire. Rappelons qu'on appelle *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel R une fonction réelle (x, y), définie pour tout couple d'éléments $x, y \in R$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$,
4) $(x, x) \geqslant 0$, l'égalité $(x, x) = 0$ ayant lieu seulement pour $x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle *espace euclidien*. Dans un espace euclidien R on introduit une norme par la formule

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$$

Des propriétés 1)-4) du produit scalaire il résulte que tous les axiomes de la norme sont vérifiés.

En effet, les axiomes 1) et 3) de la norme (n° 1, § 3) sont évidents ; en ce qui concerne l'axiome 2) (inégalité triangulaire), il résulte de l'*inégalité de Cauchy-Bouniakovsky*

$$| (x, y) | \leqslant \| x \| \cdot \| y \| \tag{1}$$

que nous nous proposons de démontrer.

Soit λ un nombre réel arbitraire. Posons

$$\varphi (\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) =$$
$$= \| x \|^2 \lambda^2 + 2 (x, y) \lambda + \| y \|^2.$$

Remarquons que cette expression est un trinôme du second degré en λ. Comme elle représente en même temps le carré scalaire d'un vecteur, on a toujours $f(\lambda) \geqslant 0$. Par conséquent, le discriminant de ce trinôme ne peut être que négatif ou nul. C'est précisément ce fait qu'exprime l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky (1).

Notons que dans un espace euclidien l'addition, la multiplication par un nombre et la multiplication scalaire sont des opérations

continues; plus précisément, si $x_n \to x$, $y_n \to y$ (au sens de la convergence en norme) et $\lambda_n \to \lambda$ (comme une suite numérique), alors

$$x_n + y_n \to x + y,$$
$$\lambda_n x_n \to \lambda x,$$
$$(x_n, y_n) \to (x, y).$$

La démonstration de ces faits est basée sur l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky (1); on la laisse au lecteur à titre d'exercice.

La présence du produit scalaire dans R permet de définir non seulement la norme (c.-à-d. la longueur) d'un vecteur, mais aussi l'angle de deux vecteurs; plus précisément, l'angle φ de deux vecteurs x et y est défini par la formule

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \qquad (2)$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky (1) le second membre de l'égalité (2) a la valeur absolue inférieure ou égale à 1, de sorte que la formule (2) définit bien un angle φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, quels que soient les vecteurs non nuls x et y.

Si $(x, y) = 0$, de la formule (2) on obtient $\varphi = \frac{\pi}{2}$; dans ce cas les vecteurs x et y sont dits *orthogonaux*.

Un système de vecteurs non nuls $\{x_\alpha\}$ de R est dit *orthogonal*, si

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta.$$

Si les vecteurs du système $\{x_\alpha\}$ sont orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants. En effet, soit

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \ldots + a_n x_{\alpha_n} = 0;$$

comme le système $\{x_\alpha\}$ est orthogonal, on a

$$(x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + \ldots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) = 0;$$

or, $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$, d'où $a_i = 0$ pour tous les $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si un système orthogonal $\{x_\alpha\}$ est *complet* (c.-à-d. si le plus petit sous-espace fermé qui le contient coïncide avec R), on l'appelle *base orthogonale*. Si, en outre, la norme de chaque élément est égale à 1, le système $\{x_\alpha\}$ est appelé *base orthonormée*. En général, tout système $\{x_\alpha\}$ (complet ou non) tel que

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{pour } \alpha = \beta \end{cases}$$

s'appelle *système orthonormé*. Il est clair que si $\{x_\alpha\}$ est un système orthogonal, alors $\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ est un système orthonormé.

2. Exemples. Considérons quelques exemples d'espaces euclidiens et de bases orthogonales dans ces espaces.

1. L'espace artihmétique à n dimensions $\mathbf{R}^n$ dont les éléments sont des systèmes de nombres réels

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

muni des opérations habituelles d'addition et multiplication par un nombre et du produit scalaire

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{3}$$

représente un exemple bien connu d'espace euclidien. Dans cet espace les vecteurs

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

forment une base orthonormée (l'une d'une infinité possible).

2. L'espace l_2 d'éléments

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

muni du produit scalaire

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{4}$$

est un espace euclidien. En effet, la convergence de la série figurant au second membre de (4) résulte de l'inégalité (4), chap. II, § 1. Les propriétés 1)-4) du produit scalaire sont immédiates. La base orthonormée la plus simple dans l_2 est formée par les vecteurs

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$
$$\ldots$$

L'orthonormalité de ce système est évidente. De plus, le système (5) est complet. En effet, soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ un vecteur arbitraire de l_2 et $x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Alors $x^{(n)}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ et

$$\| x^{(n)} - x \| \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

3. L'espace $C^2[a, b]$ des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt, \tag{6}$$

est aussi un espace euclidien. Parmi les différentes bases orthogonales que l'on peut indiquer dans cet espace, la plus importante est fournie par le système trigonométrique des fonctions

$$\frac{1}{2}, \quad \cos n\,\frac{2\pi t}{b-a}, \quad \sin n\,\frac{2\pi t}{b-a} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7}$$

On vérifie aussitôt que ce système est orthogonal.

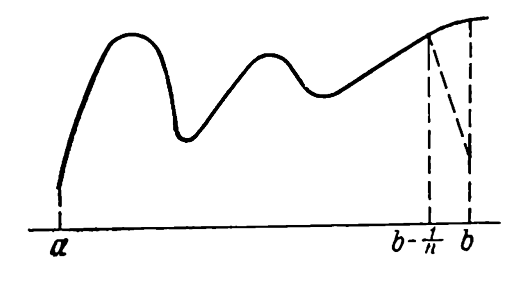


Fig. 17

Si l'on considère des fonctions continues sur un segment de longueur 2π, par exemple, sur $[-\pi, \pi]$, le système trigonométrique correspondant est formé par les fonctions

$$\frac{1}{2}, \quad \cos nt, \quad \sin nt \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Le système (7) est complet. En effet, d'après le théorème de Weierstrass, toute fonction φ, continue sur le segment $[a, b]$ et prenant en a et b la même valeur, peut être considérée comme la limite d'une suite uniformément convergente de polynômes trigonométriques, c.-à-d. de combinaisons linéaires des éléments du système (7). Une telle suite est à plus forte raison convergente en norme vers φ dans l'espace $C^2[a, b]$. Si f est une fonction *arbitraire* de $C^2[a, b]$, elle peut être considérée comme la limite (selon la norme de l'espace $C^2[a, b]$) d'une suite de fonctions φ_n, dont chacune coïncide avec f sur le segment $\left[a, b-\frac{1}{n}\right]$, est linéaire sur $\left[b-\frac{1}{n}, b\right]$ et prend au point b la même valeur qu'au point a (fig. 17). Par conséquent, tout élément de $C^2[a, b]$ peut être approché avec la précision voulue (pour la métrique de cet espace) par une combinaison linéaire des éléments du système (7), d'où la complétude de ce dernier.

3. Existence de bases orthogonales, orthogonalisation. Dans toute la suite de ce paragraphe nous nous bornerons aux espaces euclidiens séparables (c.-à-d. contenant un ensemble partout dense et dénombrable). Chacun des espaces cités au numéro précédent est séparable (démontrer !). On peut construire un exemple d'espace euclidien non séparable de la manière suivante. Considérons sur la droite numérique toutes les fonctions x telles que pour chacune d'elles l'ensemble

des points $t_1, t_2, \ldots$, où elle n'est pas nulle, est au plus dénombrable et la somme $\sum x^2(t)$, étendue à tous ces points, est finie. Définissons dans cet espace les opérations d'addition et de multiplication par un nombre comme l'addition et la multiplication habituelles des fonctions et le produit scalaire par la formule

$$(x, y) = \sum x(t)\, y(t),$$

où la somme s'étend à tous les points t tels que $x(t)\, y(t) \neq 0$. La démonstration du fait que dans cet espace il n'existe aucun sous-ensemble partout dense et dénombrable est laissée au lecteur. Notons que cet espace est complet.

Ainsi, soit R un espace euclidien séparable. Montrons que *dans un tel espace tout système orthogonal est au plus dénombrable.*

En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer que le système en question $\{\varphi_\alpha\}$ est non seulement orthogonal, mais même orthonormé $\left(\text{sinon, on le remplacerait par le système } \left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}\right)$. Alors

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2} \text{ pour } \alpha \neq \beta.$$

Considérons l'ensemble des boules $B\left(\varphi_\alpha, \frac{1}{2}\right)$. Ces boules sont disjointes. Si l'ensemble dénombrable $\{\psi_n\}$ est partout dense dans R, chacune de ces boules renferme au moins un élément de $\{\psi_n\}$. Par conséquent, l'ensemble de ces boules (et donc, l'ensemble des éléments φ_α) est au plus dénombrable.

Dans chacun des espaces euclidiens, considérés à titre d'exemple dans le numéro précédent, nous avons indiqué une base orthogonale. Démontrons maintenant le théorème général suivant, analogue au théorème d'existence d'une base othogonale dans un espace euclidien à n dimensions.

Théorème 1 (de l'orthogonalisation). *Soit*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{8}$$

un système linéairement indépendant d'éléments d'un espace euclidien R. Alors dans R il existe un système d'éléments

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{9}$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1) *le système* (9) *est orthonormé;*

2) *chaque élément φ_n est une combinaison linéaire des éléments $f_1, f_2, \ldots, f_n$:*

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \ldots + a_{nn} f_n,$$

où $a_{nn} \neq 0$;

3) *chaque élément* f_n *peut être mis sous la forme*

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n$$

avec $b_{nn} \neq 0$.

Chaque élément du système (9) *est défini par les conditions* 1)-3) *de façon unique au facteur* ± 1 *près.*

Démonstration. On cherche l'élément φ_1 sous la forme

$$\varphi_1 = a_{11} f_1 ;$$

le coefficient a_{11} est déterminé ici par la condition

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1$$

qui donne

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} .$$

Il est clair que φ_1 est défini ainsi de façon unique (au signe près). Supposons qu'on ait déjà construit les éléments φ_k ($k < n$) vérifiant les conditions 1)-3). Alors f_n peut être mis sous la forme

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{n, n-1}\varphi_{n-1} + h_n,$$

où

$$(h_n, \varphi_k) = 0 \quad \text{pour} \quad k < n.$$

En effet, les coefficients correspondants b_{nk} (et donc, l'élément h_n aussi) sont déterminés de façon unique par les conditions

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \ldots - b_{n, n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) =$$
$$= (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0.$$

Il est évident que $(h_n, h_n) > 0$ (la supposition que $(h_n, h_n) = 0$ serait en contradiction avec l'hypothèse que le système (8) est linéairement indépendant). Posons

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}} .$$

D'après la construction inductive ci-dessus, il est clair que h_n, et donc φ_n aussi, est une combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_n$, c.-à-d.

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \ldots + a_{nn} f_n, \text{ où } a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0.$$

De plus,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, \ (\varphi_n, \varphi_k) = 0 \ (k < n)$$

et

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n \quad (b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0),$$

c.-à-d. φ_n vérifie les conditions du théorème.

Le passage du système (8) au système (9) vérifiant les conditions 1)-3) s'appelle *procédé d'orthogonalisation.*

Il est clair que les sous-espaces engendrés par les systèmes (8) et (9) coïncident. Par conséquent, ces systèmes sont ou tous les deux complets, ou tous les deux non complets.

C o r o l l a i r e. *Dans tout espace euclidien séparable R il existe une base orthonormée.*

En effet, soit $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ un ensemble dénombrable. partout dense dans R. Choisissons dans cet ensemble un système complet d'éléments linéairement indépendants $\{f_n\}$. Pour cela il suffit d'exclure de la suite $\{\psi_n\}$ tout élément ψ_k qui peut être représenté par une combinaison linéaire de ψ_i avec $i < k$. En appliquant au système complet d'éléments linéairement indépendants ainsi obtenu le procédé d'orthogonalisation, nous obtiendrons bien une base orthonormée.

E x e r c i c e s. 1. Donner un exemple d'espace euclidien (non séparable) ne possédant aucune base orthogonale. Démontrer que dans tout espace euclidien c o m p l e t (non nécessairement séparable) il existe une base orthonormée.

2. Démontrer que dans un espace euclidien complet (non nécessairement séparable) toute suite d'ensembles non vides emboîtés, dont chacun est convexe, fermé et borné, a une intersection non vide (cf. exercices pages 64 et 136).

4. Inégalité de Bessel. Systèmes orthogonaux fermés. En choisissant dans l'espace euclidien à n dimensions $\mathbf{R}^n$ une base orthonormée $e_1, e_2, \ldots, e_n$ on peut écrire tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ sous la forme

$$x \in \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \tag{10}$$

où

$$c_k = (x, e_k). \tag{11}$$

Proposons-nous de généraliser la décomposition (10) au cas d'un espace euclidien de dimension infinie. Soit

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{12}$$

un système orthonormé de l'espace euclidien R et soit f un élément arbitraire de R. Faisons correspondre à l'élément $f \in R$ la suite des nombres

$$c_k = (f, \varphi_k), \; k = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

que nous appellerons *coordonnées* ou *coefficients de Fourier* de l'élément f par rapport au système $\{\varphi_k\}$, ainsi que la série (formelle pour le moment)

$$\sum_k c_k \varphi_k \tag{14}$$

que nous appellerons *série de Fourier* de l'élément f par rapport au système $\{\varphi_n\}$.

Une question naturelle se pose: la série (14) est-elle convergente, c.-à-d. la suite des sommes partielles de cette série converge-t-elle (au sens de la métrique de l'espace R) vers une limite, et si elle est convergente, alors sa somme coïncide-t-elle avec l'élément initial f?

Pour répondre à ces questions considérons préalablement le problème suivant: pour n donné choisir les coefficients α_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) de façon que la distance entre f et la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{15}$$

soit minimale. Calculons cette distance. Comme le système (12) est orthonormé, on a

$$\| f - S_n \|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) =$$

$$= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j\right) =$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2.$$

Il est clair que cette expression atteint sa valeur minimale dans le cas où son dernier terme est nul, c.-à-d. pour

$$\alpha_k = c_k \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Dans ce cas on a

$$\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2, \tag{17}$$

Nous avons montré que, pour n donné, parmi toutes les sommes (15) celle qui s'écarte le moins de f est la somme partielle de la série de Fourier de l'élément f. Ce résultat peut être expliqué géométriquement de la manière suivante. L'élément

$$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

est orthogonal à toutes les combinaisons linéaires de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k,$$

c.-à-d. il est orthogonal au sous-espace engendré par les éléments $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ si et seulement si la condition (16) est remplie (vérifier!). Ainsi donc, le résultat obtenu est une généralisation du théorème bien connu en géométrie élémentaire disant que la

perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une droite ou sur un plan est plus courte que toute oblique menée du même point.

Comme on a toujours $\| f - S_n \|^2 \geqslant 0$, de l'égalité (17) il suit que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \| f \|^2.$$

Ici n est arbitraire et le second membre ne dépend pas de n; par conséquent, la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ est convergente et on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \| f \|^2. \tag{18}$$

Cette inégalité s'appelle *inégalité de Bessel*. Elle signifie géométriquement que la somme des carrés des projections du vecteur f sur des directions deux à deux orthogonales est inférieure ou égale au carré de la longueur de ce vecteur f.

Introduisons la notion importante suivante.

D é f i n i t i o n 1. Le système orthonormé (12) est dit *fermé*, si pour tout $f \in R$ on a l'égalité suivante

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|^2, \tag{19}$$

appelée *relation de Parseval*.

De l'identité (17) il résulte que le système (12) est fermé si et seulement si pour tout $f \in R$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ converge vers f.

La notion de système orthonormé fermé est étroitement liée à la notion de système complet, introduite plus haut.

T h é o r è m e 2. *Dans un espace euclidien séparable R tout système orthornormé complet est fermé et réciproquement.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{\varphi_n\}$ un système orthonormé fermé; alors, quel que soit l'élément $f \in R$, la suite des sommes partielles de sa série de Fourier converge vers f. Cela signifie que l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments du système $\{\varphi_n\}$ est partout dense dans R, c.-à-d. que le système $\{\varphi_n\}$ est complet. Réciproquement, si le système $\{\varphi_n\}$ est complet, tout élément $f \in R$ peut être approché avec n'importe quelle précision par une combinaison linéaire

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

des éléments du système $\{\varphi_n\}$; la somme partielle

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

de la série de Fourier de f fournit une approximation non moins exacte. Par conséquent, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

converge vers f, de sorte que la relation de Parseval est vraie.

Au numéro précédent nous avons démontré que dans un espace euclidien séparable il existe des systèmes orthonormés complets. Etant donné que pour les systèmes orthonormés la notion de fermeture et celle de complétude coïncident, l'existence de systèmes orthogonaux fermés dans R ne nécessite pas une nouvelle démonstration et les exemples de systèmes orthonormés complets, considérés au numéro précédent, servent en même temps d'exemples de systèmes fermés.

Jusqu'ici nous supposions toujours que tous les systèmes orthogonaux considérés étaient normés. Pourtant les notions de coefficients de Fourier, de série de Fourier, etc. peuvent être formulées aussi pour des systèmes orthogonaux arbitraires. Soit $\{\varphi_n\}$ un système orthogonal arbitraire. A partir de ce système on peut construire un système orthonormé formé par les éléments $\psi_n = \frac{\varphi_n}{\| \varphi_n \|}$. Pour tout $f \in R$ on a

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\| \varphi_n \|} (f, \varphi_n)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\| \varphi_n \|} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n,$$

où

$$a_n = \frac{c_n}{\| \varphi_n \|} = \frac{(f, \varphi_n)}{\| \varphi_n \|^2} . \tag{20}$$

Les coefficients a_n définis par la formule (20) s'appellent *coefficients de Fourier* de l'élément f par rapport au système orthogonal (non normé) $\{\varphi_n\}$. En remplaçant dans l'inégalité (18) les coefficients c_n par leurs valeurs $c_n = a_n \| \varphi_n \|$ tirées de l'égalité (20), on obtient la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \varphi_n \|^2 a_n^2 \leqslant \| f \|^2 \tag{21}$$

qui représente l'inégalité de Bessel pour un système orthogonal arbitraire.

5. Espaces euclidiens complets. Théorème de Riesz-Fischer. A partir du n° 3 nous n'avons considéré que des espaces euclidiens séparables; dès maintenant nous allons supposer, en outre, que tous les espaces considérés sont complets.

Ainsi, soient R un espace euclidien séparable et complet et $\{\varphi_n\}$ un système orthonormé quelconque (non nécessairement complet) dans R. De l'inégalité de Bessel il résulte que pour que les nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ servent de coefficients de Fourier pour un élément $f \in R$, il faut que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

soit convergente. Il se trouve que dans le cas d'un espace complet cette condition est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 3 (de Riesz-Fischer). *Soit* $\{\varphi_n\}$ *un système orthonormé quelconque dans un espace euclidien complet* R *et soient*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

des nombres, tels que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{22}$$

soit convergente. Alors il existe un élément $f \in R$ *tel que*

$$c_k = (f, \varphi_k)$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Démonstration. Posons

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Alors

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

La série (22) étant convergente, on en déduit, compte tenu de la complétude de R, que la suite $\{f_n\}$ converge vers un élément $f \in R$.

D'autre part, on a

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i). \tag{23}$$

Le premier terme de la somme figurant au second membre de cette égalité est égal à c_i pour $n \geqslant i$, tandis que son deuxième terme tend vers zéro quand $n \to \infty$, car

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leqslant \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|.$$

Le premier membre de l'égalité (23) ne dépend pas de n; donc, en passant à la limite pour $n \to \infty$ dans cette égalité, on obtient

$$(f, \varphi_i) = c_i.$$

Comme, d'après la définition de f,

$$\|f - f_n\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f).$$

En effet,

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0$$

quand $n \to \infty$.

Le théorème est démontré.

Démontrons enfin le théorème utile suivant.

Théorème 4. *Pour qu'un système orthonormé $\{\varphi_n\}$ d'éléments d'un espace euclidien séparable et complet R soit complet, il faut et il suffit que dans R il n'existe aucun élément non nul, orthogonal à tous les éléments du système $\{\varphi_n\}$.*

Démonstration. Supposons que le système $\{\varphi_n\}$ soit complet et, donc, fermé. Si f est orthogonal à tous les éléments du système $\{\varphi_n\}$, alors tous ses coefficients de Fourier sont nuls. Dans ce cas la relation de Parseval donne

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

d'où $f = 0$.

Réciproquement, supposons que le système $\{\varphi_n\}$ ne soit pas complet. Alors dans R il existe un élément $g \neq 0$ tel que

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \quad (\text{où} \quad c_k = (g, \varphi_k)).$$

D'après le théorème de Riesz-Fischer il existe un élément $f \in R$ tel que

$$(f, \varphi_k) = c_k \quad \text{et} \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

L'élément $f - g$ est orthogonal à tous les φ_i. L'inégalité

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

implique que $f - g \neq 0$.

Le théorème est démontré.

Exercices. 1. Soit H un espace euclidien complet (non nécessairement séparable); alors dans H il existe un système orthonormé complet $\{\varphi_\alpha\}$ (cf. exercice 1, page 143). Démontrer que pour tout vecteur $f \in H$ on a les décompositions

$$f = \sum_\alpha (f, \varphi_\alpha) \varphi_\alpha, \quad \| f \|^2 = \sum_\alpha (f, \varphi_\alpha)^2,$$

où chacune des sommes figurant aux seconds membres contient un nombre fini ou dénombrable de termes non nuls.

2. Un système de vecteurs $\{\varphi_\alpha\}$ d'un espace euclidien R est dit *total*, si dans R il n'existe pas de vecteurs non nuls orthogonaux à tous les φ_α. Le théorème 4 montre que dans un espace euclidien complet la totalité d'un système de vecteurs est équivalente à sa complétude. Montrer que dans un espace non complet il peut y avoir des systèmes totaux non complets.

6. Espace de Hilbert. Théorème de l'isomorphisme. Continuons l'étude des espaces euclidiens complets. Comme plus haut, nous nous intéresserons aux espaces de dimension infinie et non à ceux de dimension finie dont une étude exhaustive est donnée dans les cours d'algèbre linéaire. Comme auparavant, nous supposerons habituellement que chacun des espaces considérés contient un ensemble partout dense et dénombrable. Introduisons la définition suivante

Définition 2. Un espace euclidien complet de dimension infinie s'appelle *espace de Hilbert* [1]).

Autrement dit, on appelle espace de Hiblert un ensemble H d'éléments $f, g, \ldots$ de nature arbitraire vérifiant les conditions (axiomes) suivantes

I. H est un espace euclidien (c.-à-d. un espace vectoriel muni de produit scalaire).

II. L'espace H est complet au sens de la métrique $\rho(f, g) = \| f - g \|$.

III. L'espace H est de dimension infinie, c.-à-d. pour tout n dans H ou peut trouver n éléments linéairement indépendants.

---

[1]) En l'honneur du célèbre mathématicien allemand D. Hilbert (1862-1943) qui a introduit cette notion.

Le plus souvent on considère des espaces de Hilbert séparables, c.-à-d. des espaces vérifiant encore un axiome.

IV. H est séparable, c.-à-.d. dans H il existe un ensemble partout dense et dénombrable.

Comme exemple d'espace de Hilbert séparable on peut considérer l'espace l_2.

Par la suite nous nous bornerons aux espaces de Hilbert séparables.

Rappelons que deux espaces euclidiens R et R^* sont dits isomorphes, s'il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre leurs éléments, telle que si

$$x \leftrightarrow x^*,$$
$$y \leftrightarrow y^*$$
$$(x, y \in R;\ x^*, y^* \in R^*),$$

on a

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*,$$
$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

et

$$(x, y) \leftrightarrow (x^*, y^*).$$

Autrement dit, l'isomorphisme des espaces euclidiens est une correspondance biunivoque conservant aussi bien les opérations linéaires définies dans ces espaces que le produit scalaire.

Comme on le sait, n'importe quels deux espaces euclidiens à n dimensions sont isomorphes entre eux et, donc, chacun est isomorphe à l'espace arithmétique $\mathbf{R}^n$ (exemple 1, nº 2). Deux espaces euclidiens de dimension infinie ne sont pas nécessairement isomorphes. Par exemple, les espaces l_2 et $C^2[a, b]$ ne le sont pas. Cela résulte, par exemple, du fait que le premier est complet, tandis que le deuxième ne l'est pas.

Pourtant, on a le théorème suivant.

Théorème 5. *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

Démonstration. Montrons que tout espace de Hilbert H est isomorphe à l'espace l_2. Par cela même l'affirmation du théorème sera démontrée. Choisissons dans H un système orthonormé complet arbitraire $\{\varphi_n\}$ et faisons correspondre à chaque élément $f \in H$ la suite $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ de ses coefficients de Fourier par rapport à ce système. Puisque $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, la suite $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ est un élément de l_2. Réciproquement, d'après le théorème de Riesz-Fischer, pour tout élément $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ de l_2 il existe un élément $f \in H$ ayant pour coefficients de Fourier les

nombres $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ La correspondance entre H et l_2 ainsi définie est biunivoque. D'autre part, si

$$f \leftrightarrow (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$$

et

$$g \leftrightarrow (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots),$$

on a

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n, \ldots)$$

et

$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, \ldots, \alpha c_n, \ldots),$$

c.-à-d. à la somme de deux éléments correspond la somme des éléments correspondants et au produit d'un élément par un nombre correspond le produit de l'élément correspondant par le même nombre. Enfin, de la relation de Parseval il résulte que

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n. \tag{24}$$

En effet,

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

et

$$(f+g, f+g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2,$$

d'où l'égalité (24). Ainsi donc, la correspondance que nous venons d'établir entre les éléments des espaces H et l_2 est bien un isomorphisme.

Le théorème établi ici montre qu'à un isomorphisme près, il existe un seul espace de Hilbert séparable (c.-à-d. le système d'axiomes I-IV est complet) et que l'espace l_2 peut être considéré comme une «réalisation en coordonnées» de cet espace, de même que l'espace arithmétique à n dimensions, muni du produit scalaire $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, est une réalisation en coordonnées de l'espace euclidien à n dimensions, défini axiomatiquement.

Une autre réalisation de l'espace de Hilbert est fournie par le complété de l'espace fonctionnel $C^2[a, b]$. En effet, il est aisé de vérifier que le complété R^* d'un espace euclidien quelconque R (au sens de la définition du complété d'un espace métrique, donnée au § 3, chap. II) acquiert la structure d'espace vectoriel euclidien, si l'on prolonge par continuité à R^* les opérations linéaires et la

multiplication scalaire définies dans R, c.-à-d. si l'on pose

$$x+y=\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n),\quad \alpha x=\lim_{n\to\infty}\alpha x_n$$

et

$$(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,\ y_n),$$

où $x_n \to x$ et $y_n \to y$, x_n, $y_n \in R$. (L'existence de ces limites et leur indépendance du choix des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$sont faciles à démontrer.) Le complété de l'espace $C^2\ [a,b]$ est donc un espace euclidien complet ; il est évidemment de dimension infinie et séparable, donc un espace de Hilbert. Au chapitre VI nous reviendrons sur cette question et montrerons que les éléments qu'on doit adjoindre à $C^2\ [a,\ b]$ pour obtenir un espace complet peuvent être aussi considérés comme des fonctions, mais seulement comme des fonctions non continues (plus précisément, comme des fonctions à carré sommable au sens de Lebesgue).

7. Sous-espaces, orthogonalité, somme directe. Conformément aux définitions générales du § 3, on appelle *variété linéaire* dans un espace de Hilbert H un ensemble L d'éléments de H tels que si f, $g \in L$, on a $\alpha f + \beta g \in L$, quels que soient les nombres α et β. Une variété linéaire f e r m é e s'appelle *sous-espace*. Considérons quelques exemples de sous-espaces d'un espace de Hilbert.

1. Soit h un élément quelconque de H. L'ensemble de tous les éléments $f \in H$ orthogonaux à h forme un sous-espace de H.

2. Supposons H réalisé par l_2, c.-à-d. ayant comme éléments les suites numériques $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ telles que $\sum_k x_k^2 < \infty$. Les éléments soumis à la condition $x_1 = x_2$ forment un sous-espace de H.

3. Supposons de nouveau H réalisé par l_2. Les éléments $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ avec $x_n = 0$ pour $n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$ (et x_n quelconque pour $n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$) constituent un sous-espace de H.

Il est recommandé au lecteur de vérifier que tous les ensembles de vecteurs, indiqués dans les exemples 1-3, sont bien des sous-espaces.

Tout sous-espace d'un ensemble de Hilbert représente soit un espace euclidien de dimension finie, soit même un espace de Hilbert. En effet, pour un tel espace les axiomes I-III sont évidents, l'axiome IV étant une conséquence du lemme suivant.

L e m m e. *Tout sous-espace R' d'un espace métrique séparable R est lui-même séparable.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$$

un ensemble dénombrable et partout dense dans R. Posons

$$a_n = \inf_{\eta \in R'} \rho(\xi_n, \eta).$$

Alors, quels que soient les entiers naturels n et m, il existe un point $\eta_{n,m} \in R'$ tel que

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$; pour tout $\eta \in R'$ il existe n tel que

$$\rho(\xi_n, \eta) < \frac{\varepsilon}{3}$$

et, par conséquent,

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Mais alors $\rho(\eta, \eta_{n,m}) < \varepsilon$, c.-à-d. l'ensemble fini ou dénombrable $\{\eta_{n,m}\}$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$ est partout dense dans R'.

Les sous-espaces d'un espace de Hilbert jouissent de certaines propriétés spécifiques (qui n'ont pas lieu dans le cas des sous-espaces d'un espace normé arbitraire). Ces propriétés sont liées à la présence dans un espace de Hilbert du produit scalaire et de la notion d'orthogonalité, basée sur ce dernier.

En appliquant le procédé d'orthogonalisation à une suite dénombrable et partout dense d'éléments d'un sous-espace arbitraire d'un espace de Hilbert, on obtient le théorème suivant.

Théorème 6. *Dans tout sous-espace M d'un espace de Hilbert H il existe un système orthonormé $\{\varphi_n\}$ dont la fermeture linéaire coïncide avec M.*

Soit M un sous-espace de l'espace de Hilbert H. Désignons par

$$M^{\perp} = H \ominus M$$

l'ensemble des éléments $g \in H$ orthogonaux à tous les éléments $f \in M$ et démontrons que $M^{\perp}$ est aussi un sous-espace de H. La linéarité de $M^{\perp}$ est évidente, car de $(g_1, f) = (g_2, f) = 0$ il suit que $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = 0$. Pour démontrer que $M^{\perp}$ est fermé considérons une suite d'éléments $g_n \in M^{\perp}$ convergeant vers g. Comme pour tout $f \in M$ on a

$$(g, f) = \lim_{n \to \infty} (g_n, f) = 0,$$

g est aussi un élément de $M^{\perp}$.

Le sous-espace $M^{\perp}$ est dit *supplémentaire orthogonal* du sous-espace M.

Du théorème 6 on obtient facilement le théorème suivant.

Théorème 7. *Si M est un sous-espace vectoriel (fermé!) de l'espace H, tout élément $f \in H$ peut être mis de façon unique sous la forme $f = h + h'$ avec $h \in M$ et $h' \in M^{\perp}$.*

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'existence d'une telle décomposition. Pour cela, choisissons dans M un système orthonormé complet $\{\varphi_n\}$ et posons

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad c_n = (f, \varphi_n).$$

Puisque (d'après l'inégalité de Bessel) la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ est convergente, l'élément h existe et appartient à M. Posons

$$h' = f - h.$$

Il est évident que pour tous les n on a

$$(h', \varphi_n) = 0$$

et, comme tout élément ζ de M peut être mis sous la forme

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n,$$

on en déduit que

$$(h', \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \varphi_n) = 0,$$

ce qui signifie que $h' \in M^{\perp}$.

Supposons maintenant que, outre la décomposition que l'on vient de construire $f = h + h'$, il existe une seconde décomposition

$$f = h_1 + h_1', \quad h_1 \in M, \quad h_1' \in M^{\perp}.$$

Alors, pour tous les n on a

$$(h_1, \varphi_n) = (f, \varphi_n) = c_n,$$

d'où

$$h_1 = h, \quad h_1' = h'.$$

Le théorème 7 admet quelques corollaires utiles.

Corollaire 1. *Le supplémentaire orthogonal du supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel M de H coïncide avec M.*

Ainsi, on peut parler des sous-espaces réciproquement supplémentaires de l'espace H. Si M et $M^{\perp}$ sont deux sous-espaces réciproquement supplémentaires de H et $\{\varphi_n\}$, $\{\varphi_n'\}$ sont deux systèmes orthogonaux complets (dans M et $M^{\perp}$ respectivement), la réunion de $\{\varphi_n\}$ et $\{\varphi_n'\}$ donne un système orthogonal complet dans l'espace H tout entier. On a donc le corollaire suivant.

C o r o l l a i r e 2. *Tout système orthonormé d'éléments de H peut être élargi de façon à obtenir un système complet dans H.*

Si le système $\{\varphi_n\}$ est fini, le nombre de ses éléments est égal à la dimension du sous-espace M engendré par $\{\varphi_n\}$ et à la codimension du sous-espace $M^\perp$. Ainsi, on obtient encore un corollaire.

C o r o l l a i r e 3. *Le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie n est de codimension n, et réciproquement.*

Si tout vecteur $f \in H$ peut être mis sous la forme $f = h + h'$ avec $h \in M$ et $h' \in M^\perp$ (où $M^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de M), on dit que H est *somme directe* des sous-espaces orthogonaux M et $M^\perp$ et on écrit

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Il est clair que la notion de somme directe peut être généralisée au cas d'un nombre fini quelconque et même d'une infinité dénombrable de sous-espaces; plus précisément, on dit que H est somme directe de ses sous-espaces $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus \ldots,$$

si

1) les sous-espaces M_i sont deux à deux orthogonaux, c.-à-d. tout vecteur de M_i est orthogonal à tout vecteur de M_k pour $i \neq k$;

2) tout élément $f \in H$ peut être mis sous la forme

$$f = h_1 + h_2 + \ldots + h_n + \ldots, \quad h_n \in M_n$$

et si les sous-espaces M_n sont en nombre infini, la série $\sum_n \| h_n \|^2$ est convergente. On vérifie facilement que si une telle décomposition de l'élément f existe, elle est unique et

$$\| f \|^2 = \sum_n \| h_n \|^2.$$

A côté de la somme directe de sous-espaces on peut parler de la somme directe d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'espaces de Hilbert. Plus précisément, si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert, on définit leur somme directe H de la manière suivante: les éléments de l'espace H sont tous les couples (h_1, h_2) tels que $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$, le produit scalaire de deux couples étant défini par la formule

$$((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = (h_1, h_1') + (h_2, h_2').$$

Il est évident que l'espace H possède deux sous-espaces orthogonaux dont les éléments sont respectivement les couples de la forme $(h_1, 0)$ et $(0, h_2)$; on peut identifier de façon naturelle le premier de ces sous-espaces à H_1 et le second à H_2.

De manière analogue, on définit la somme directe d'un nombre fini arbitraire d'espaces de Hilbert. La somme $H = \sum \oplus H_n$ d'une

infinité dénombrable d'espaces $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ est définie comme suit; les éléments de l'espace H sont toutes les suites de la forme

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots)\ (h_n \in H_n)$$

telles que

$$\sum_n \| h_n \|^2 < \infty;$$

le produit scalaire (h, g) de deux éléments $h, g \in H$ est égal à

$$\sum_n (h_n, g_n).$$

8. Propriété caractéristique des espaces euclidiens. Examinons la question suivante. Soit R un espace normé. A quelles conditions supplémentaires doit satisfaire la norme définie sur R, pour que l'espace R soit euclidien, c.-à-d. pour que la norme sur R puisse être définie au moyen d'un produit scalaire? En d'autres termes, comment caractériser les espaces euclidiens parmi tous les espaces normés? Une telle caractérisation est donnée par le théorème suivant.

Théorème 8. *Pour qu'un espace normé R soit euclidien, il faut et il suffit que, quels que soient les deux éléments f et g de R, on ait*

$$\| f + g \|^2 + \| f - g \|^2 = 2 (\| f \|^2 + \| g \|^2). \tag{25}$$

Dans un espace euclidien cette égalité exprime une propriété bien connue du parallélogramme: *la somme des carrés des diagonales du parallélogramme est égale à la somme des carrés de tous ses côtés.* Sa vérification est immédiate:

$$\begin{aligned} \| f + g \|^2 + \| f - g \|^2 = \\ (f + g, f + g) + (f - g, f - g) = \\ = 2 (f, f) + 2 (g, g) = 2 (\| f \|^2 + \| g \|^2). \end{aligned}$$

Ainsi, il est évident que la condition (25) est nécessaire. Démontrons qu'elle est suffisante. Posons

$$(f, g) = \frac{1}{4} (\| f + g \|^2 - \| f - g \|^2) \tag{26}$$

et montrons que si l'égalité (25) est vérifiée, la fonction (26) satisfait à tous les axiomes du produit scalaire. Etant donné que pour $f = g$ on a

$$(f, f) = \frac{1}{4} (\| 2f \|^2 - \| f - f \|^2) = \| f \|^2, \tag{27}$$

c'est précisément le produit scalaire qui engendre la norme définie sur l'espace R.

Tout d'abord, d'après (26) il est immédiat que

$$(f, g) = (g, f),$$

ce qui signifie que la propriété 1) du produit scalaire est vérifiée. D'autre part, en vertu de (27), la propriété 4) est aussi vérifiée. Pour établir la propriété 2) considérons la fonction de trois vecteurs

$$\Phi(f, g, h) = 4[(f+g, h) - (f, h) - (g, h)],$$

c.-à-d.

$$\Phi(f, g, h) = \|f+g+h\|^2 - \|f+g-h\|^2 - \|f+h\|^2 + \|f-h\|^2 - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2, \quad (28)$$

et montrons qu'elle est identiquement nulle. D'après (25) on a

$$\|f+g \pm h\|^2 = 2\|f \pm h\|^2 + 2\|g\|^2 - \|f \pm h - g\|^2.$$

En portant les expressions correspondantes dans (28), on obtient

$$\Phi(f, g, h) = -\|f+h-g\|^2 + \|f-h-g\|^2 + \|f+h\|^2 - \|f-h\|^2 - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2. \quad (29)$$

La demi-somme de (28) et (29) donne

$$\Phi(f, g, h) = \frac{1}{2}(\|g+h+f\|^2 + \|g+h-f\|^2) - \frac{1}{2}(\|g-h+f\|^2 + \|g-h-f\|^2) - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2.$$

En vertu de (25), le premier terme est égal à

$$\|g+h\|^2 + \|f\|^2,$$

et le second à

$$-\|g-h\|^2 - \|f\|^2.$$

Finalement, on a

$$\Phi(f, g, h) \equiv 0.$$

Démontrons, enfin, la propriété 3) qui exprime l'homogénéité du produit scalaire. Pour cela, fixons arbitrairement f et g et considérons la fonction

$$\varphi(c) = (cf, g) - c(f, g).$$

D'après (26) on a immédiatement

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}(\|g\|^2 - \|g\|^2) = 0$$

et $\varphi(-1) = 0$, puisque $(-f, g) = -(f, g)$. C'est pourquoi pour tout entier n on a

$$(nf, g) = (\operatorname{sgn} n\,(f + \ldots + f), g) = \\ = \operatorname{sgn} n\,[(f, g) + \ldots + (f, g)] = \\ = |n| \operatorname{sgn} n\,(f, g) = n\,(f, g),$$

c.-à-d. $\varphi(n) = 0$. Pour p, q entiers et $q \neq 0$ on a

$$\left(\frac{p}{q} f, g\right) = p\left(\frac{1}{q} f, g\right) = \frac{p}{q} q\left(\frac{1}{q} f, g\right) = \frac{p}{q}(f, g),$$

c.-à-d. $\varphi(c) = 0$ pour tout c rationnel; la fonction φ étant continue, on en déduit que

$$\varphi(c) \equiv 0.$$

Nous avons donc montré que la fonction (f, g) jouit de toutes les propriétés du produit scalaire.

E x e m p l e s. 1. Considérons l'espace à n dimensions $\mathbf{R}_p^n$ dont la norme est définie par la formule

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Pour $p \geqslant 1$ tous les axiomes de la norme sont vérifiés, pourtant $\mathbf{R}_p^n$ est un espace euclidien seulement pour $p = 2$. En effet, considérons dans $\mathbf{R}_p^n$ deux vecteurs:

$$f = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0);$$
$$g = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0);$$

on a

$$f + g = (2, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$f - g = (0, 2, 0, \ldots, 0),$$

d'où

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2,$$

de sorte que pour $p \neq 2$ l'identité du parallélogramme (25) n'est pas vérifiée.

2. Considérons l'espace des fonctions continues sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Posons

$$f(t) = \cos t, \; g(t) = \sin t.$$

On a

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

et

$$\|f+g\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi/2} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2},$$
$$\|f-g\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1.$$

On voit donc que

$$\| f+g \|^2 + \| f-g \|^2 \neq 2\,(\| f \|^2 + \| g \|^2).$$

Par conséquent, il est impossible de définir la norme de l'espace $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à l'aide d'un produit scalaire. Il est aisé de voir que l'espace des fonctions continues $C\,[a, b]$ n'est pas un espace euclidien, quel que soit le segment $[a, b]$.

9. Espaces euclidiens complexes. A côté des espaces euclidiens réels on peut envisager des espaces euclidiens complexes (c.-à-d. des espaces vectoriels complexes munis de produit scalaire). Mais dans le cas d'un espace complexe les axiomes 1)-4) formulés au début de ce paragraphe ne peuvent pas être vérifiés tous à la fois. En effet, de 1) et 3) il résulte que

$$(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2\,(x, x),$$

d'où, pour $\lambda = i$, on a

$$(ix, ix) = -\,(x, x),$$

ce qui veut dire que les carrés scalaires des vecteurs x et ix ne peuvent pas être tous les deux positifs. En d'autres termes, les axiomes 1) et 3) sont incompatibles avec l'axiome 4). C'est pourquoi dans le cas d'un espace complexe les axiomes servant à définir le produit scalaire doivent être quelque peu modifiés. Nous définirons le produit scalaire dans un espace complexe comme une fonction numérique (à valeurs complexes) de deux vecteurs satisfaisant aux conditions suivantes:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2) $(\lambda x, y) = \lambda\,(x, y)$,
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
4) $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) > 0$, si $x \neq 0$.

(Ainsi, nous avons modifié le premier axiome, en laissant inchangés les trois autres.) Des conditions 1) et 2) il suit que $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\,(x, y)$. En effet,

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda\,(y, x)} = \overline{\lambda}\,(x, y).$$

Un exemple bien connu d'espace euclidien complexe à n dimensions est fourni par l'espace $\mathbf{C}^n$ (§ 1, exemple 2), dans lequel le produit scalaire de deux éléments

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

est défini par la formule

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k.$$

Comme on le sait, tout espace euclidien complexe de dimension n est isomorphe à cet espace.

Comme exemples d'espaces euclidiens complexes de dimension infinie on peut considérer:

1) l'espace complexe l_2 dont les éléments sont des suites de nombres complexes

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

vérifiant la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

et le produit scalaire est défini par la formule

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n ;$$

2) l'espace $C^2 [a, b]$ des fonctions à valeurs complexes, continues sur le segment $[a, b]$ avec le produit scalaire

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(\bar{t})\, dt.$$

Dans un espace euclidien complexe la longueur (la norme) d'un vecteur est définie, comme dans le cas d'un espace réel, par la formule

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$$

Généralement, dans un espace euclidien complexe on n'introduit pas la notion d'angle de deux vecteurs $\left(\text{car l'expression } \frac{x, y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right.$, étant en général complexe, peut ne pas être le cosinus d'un angle $\left.\text{réel}\right)$; tout de même, la notion d'orthogonalité est conservée: on dit que les éléments x et y sont *orthogonaux*, si $(x, y) = 0$.

Si $\{\varphi_n\}$ est un système orthogonal quelconque d'éléments d'un espace euclidien complexe R et f est un élément arbitraire de R, comme dans le cas d'un espace euclidien réel, les nombres

$$a_n = \frac{1}{\| \varphi_n \|^2} (f, \varphi_n)$$

s'appellent *coefficients de Fourier* et la série

$$\sum_n a_n \varphi_n$$

s'appelle *série de Fourier* de l'élément f par rapport au système orthogonal $\{\varphi_n\}$. On a l'inégalité de Bessel:

$$\sum_n \|\varphi_n\|^2 |a_n|^2 \leqslant (f, f).$$

En particulier, si le système $\{\varphi_n\}$ est orthonormé, les coefficients de Fourier pour un tel système sont définis par les formules

$$c_n = (f, \varphi_n),$$

et l'inégalité de Bessel prend la forme

$$\sum_n |c_n|^2 \leqslant (f, f).$$

Un espace euclidien complexe complet et séparable de dimension infinie s'appelle *espace de Hilbert complexe*. Le théorème de l'isomorphisme s'étend aux espaces de Hilbert complexes.

Théorème 9. *Tous les espaces de Hilbert complexes séparables sont isomorphes entre eux.*

La réalisation la plus simple d'un espace de Hilbert complexe est fournie par l'espace complexe l_2. Une autre réalisation, fonctionnelle, d'un tel espace sera donnée au chap. VI.

On propose au lecteur de vérifier que tous les théorèmes démontrés plus haut pour les espaces euclidiens, et en particulier pour les espaces de Hilbert réels sont vrais aussi pour les espaces complexes (avec des modifications insignifiantes tenant compte de la complexité du produit scalaire).

§ 5. Espaces vectoriels topologiques

1. Définition et exemples. La donnée d'une norme n'est que l'une des méthodes possibles d'introduction d'une topologie dans un espace vectoriel. Le développement de certaines branches de l'analyse fonctionnelle, telles que la théorie des distributions (il en sera question au chapitre suivant), a montré que dans beaucoup de cas il est utile d'envisager des espaces vectoriels munis d'une topologie, définie non à l'aide d'une norme, mais d'une autre façon.

Définition 1. On dit qu'un ensemble E est un *espace vectoriel topologique*, si

I. E est un espace vectoriel (avec la multiplication de ses éléments par des nombres réels ou par des nombres complexes).

II. E est un espace topologique.

III. Les opérations d'addition et de multiplication par un nombre dans E sont continues par rapport à la topologie de E.

D'une manière plus détaillée, la dernière condition signifie ceci :

1) si $z_0 = x_0 + y_0$, pour chaque voisinage U du point z_0 on peut indiquer un voisinage V du point x_0 et un voisinage W du point y_0 tels que $x + y \in U$, si $x \in V$ et $y \in W$;

2) si $\alpha_0 x_0 = y_0$ pour tout voisinage U du point y_0 il existe un voisinage V du point x_0 et un réel $\varepsilon > 0$ tels que $\alpha x \in U$ dès que $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ et $x \in V$.

La liaison existant dans un espace vectoriel topologique entre les opérations algébriques et la topologie entraîne que la topologie sur un tel espace est parfaitement définie par la donnée de la *famille des voisinages de zéro*. En effet, soient x un point de l'espace vectoriel topologique E et U un voisinage de zéro dans E. Alors $U + x$, c.-à-d. le transformé de ce voisinage par une translation de vecteur x, est un voisinage de x; il est évident que tout voisinage d'un point quelconque $x \in E$ peut être obtenu de cette façon.

De la continuité des opérations d'addition et de multiplication par un nombre dans un espace vectoriel topologique E on déduit immédiatement les propositions suivantes.

1. *Si U et V sont des ensembles ouverts dans E, alors l'ensemble $U + V$* (c.-à-d. l'ensemble de tous les éléments de la forme $x + y$, $x \in U$, $y \in V$) *est aussi ouvert.*

2. *Si U est un ensemble ouvert, alors l'ensemble λU* (c.-à-d. l'ensemble de tous les éléments de la forme λx, $x \in U$) *est aussi ouvert, quel que soit $\lambda \neq 0$.*

3. *Si F est un ensemble fermé dans E, alors λF l'est aussi, quel que soit λ.*

E x e m p l e s. 1. Parmi les exemples d'espaces vectoriels topologiques il faut citer tout d'abord les espaces normés. En effet, des propriétés de la norme il suit immédiatement que dans un espace normé l'addition des vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre sont des opérations continues par rapport à la topologie définie par la norme.

2. Dans l'espace $\mathbf{R}^\infty$ des suites numériques arbitraires $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ définissons un système fondamental de voisinages de zéro de la manière suivante. Chaque voisinage $U(k_1, \ldots, k_r; \varepsilon)$ est défini par les entiers $k_1, \ldots, k_r$ et le réel $\varepsilon > 0$ et contient tous les $x \in \mathbf{R}^\infty$ tels que

$$|x_{k_i}| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

On vérifie sans peine que la donnée de ce système de voisinages fait de $\mathbf{R}^\infty$ un espace vectoriel topologique. (A côté de $\mathbf{R}^\infty$ on peut considérer l'espace $\mathbf{C}^\infty$ de toutes les suites de nombres c o m p l e x e s.)

3. Soit $K[a, b]$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables [1]) sur le segment $[a, b]$. Définissons sur $K[a, b]$ une topologie à l'aide du système fondamental de voisinages de zéro suivant. Tout voisinage $U_{m,\varepsilon}$ appartenant à ce système est défini par son numéro m et le réel $\varepsilon > 0$ et renferme toutes les fonctions φ vérifiant les inégalités

$$|\varphi^{(k)}(x)| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

où $\varphi^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction φ.

Le fait que dans un espace vectoriel topologique la topologie se trouve liée aux opérations linéaires soumet cette topologie à des conditions assez restrictives. Plus précisément, *dans un espace vectoriel topologique E tout point x et tout ensemble fermé qui ne le contient pas possèdent des voisinages disjoints.*

Pour la démonstration de cette proposition il suffit de considérer le point $x = 0$ et un ensemble fermé quelconque F ne contenant pas ce point. Posons $U = E \setminus F$. En vertu de la continuité de la soustraction dans E, il existe un voisinage de zéro W tel que $W - W \subset U$. En qualité de W on peut prendre l'intersection de deux voisinages de zéro W_1 et W_2 tels que $x - y \in U$, si $x \in W_1$ et $y \in W_2$. Montrons que la fermeture du voisinage W est contenue dans U. Soit $y \in [W]$. Alors, tout voisinage du point y, y compris $y + W$, contient un point $z \in W$. Par conséquent, il existe un point $z \in W$ tel que $y + z \in W$, donc $y \in W - W \subset U$, d'où l'affirmation annoncée. Les voisinages cherchés du point 0 et de l'ensemble F sont respectivement W et $E \setminus [W]$.

Un espace topologique est dit *T_1-espace*, s'il satisfait au premier axiome de séparation T_1, c.-à-d. si dans cet espace tout sous-ensemble comportant un seul point est fermé; il est évident qu'un espace vectoriel topologique est un T_1-espace si et seulement si l'intersection de tous les voisinages de zéro ne contient pas d'éléments non nuls. Les espaces topologiques satisfaisant aux axiomes de séparation T_1 et T_3 ont été appelés au chap. II *espaces réguliers*; d'après ce qu'on vient de démontrer dans l'alinéa précédent, *tout espace vectoriel topologique du type T_1 est régulier.*

Dans les espaces normés un rôle important joue la notion d'ensemble borné. Bien que cette notion y soit introduite à l'aide de la norme, elle peut être formulée de façon naturelle pour des espaces vectoriels topologiques quelconques.

Un ensemble M, contenu dans un espace vectoriel topologique E, est dit *borné*, si à tout voisinage de zéro U on peut associer un entier naturel n tel que $\lambda U \supset M$ pour tous les λ qui vérifient la condition $|\lambda| \geqslant n$.

---

[1]) C.-à-d. admettant des dérivées de tout ordre.

Il est clair que dans le cas d'un espace normé cette notion d'ensemble borné coïncide avec celle d'ensemble borné en norme (c.-à-d. avec la possibilité de placer l'ensemble donné à l'intérieur d'une boule $\| x \| \leqslant R$). L'espace E est dit *localement borné*, s'il contient au moins un ensemble non vide ouvert et borné. Tout espace normé est localement borné. Un exemple d'espace non localement borné est donné par l'espace $\mathbf{R}^\infty$ de l'exemple 2 (démontrer!).

Exercices. 1. Soit E un espace vectoriel topologique; démontrer les propositions suivantes:

(a) un ensemble $M \subset E$ est borné si et seulement si pour toute suite $\{x_n\} \subset M$ et toute suite de nombres positifs $\{\varepsilon_n\}$ convergeant vers zéro, la suite $\{\varepsilon_n x_n\}$ converge vers zéro;

(b) si $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ et $x_n \to x$, alors $\{x_n\}$ est un ensemble borné;

(c) si l'espace E est localement borné, il satisfait au premier axiome de dénombrabilité.

Le premier axiome de dénombrabilité est-il satisfait dans l'espace $\mathbf{R}^\infty$?

2. Nous dirons que dans un espace vectoriel topologique H un ensemble M *est absorbé* par le voisinage de zéro U, s'il existe un entier naturel n tel que $nU \supset \supset M$. Démontrer que dans tout espace localement borné il existe un système fondamental de voisinages de zéro s'absorbant mutuellement. Que peut-on prendre pour un tel système dans un espace normé?

2. Convexité locale. Les propriétés dont jouissent les espaces vectoriels topologiques arbitraires peuvent être très différentes des propriétés habituelles des espaces euclidiens ou normés. Une classe importante d'espaces, plus généraux que les espaces normés, mais conservant beaucoup de propriétés de ces derniers, est formée par les espaces dits *localement convexes*.

Définition 2. Un espace vectoriel topologique est dit *localement convexe*, si tout ensemble ouvert non vide de cet espace contient un sous-ensemble non vide ouvert et convexe.

Notons que si l'espace E est localement convexe, pour tout point $x \in E$ et tout voisinage U de x il existe un voisinage convexe V de ce point, tel que $x \in V \subset U$. En effet, il suffit d'établir la vérité de cette affirmation pour le point $x = 0$. Soit U un voisinage quelconque de zéro. Alors il existe un voisinage V de zéro tel que $V - V \subset U$. Comme l'espace E est localement convexe, il existe un ensemble non vide ouvert et convexe $V' \subset V$. Soit $y \in V'$; alors $V' - y$ est un voisinage convexe de zéro, contenu dans U.

Tout espace normé est localement convexe. En effet, dans un tel espace tout ensemble ouvert non vide contient une boule. Ainsi, *tout espace normé est localement borné et localement convexe*. On peut démontrer qu'au fond les espaces normés sont les seuls à posséder ces deux propriétés à la fois. Plus précisément, convenons de dire qu'un espace vectoriel topologique E est *normable*, si la topologie donnée dans E peut être définie à l'aide d'une norme. Alors on a le théorème suivant: *tout espace vectoriel topologique séparé, localement convexe et localement borné, est normable.*

Exercices. 1. Démontrer que dans un espace vectoriel topologique un ensemble ouvert U est convexe si et seulement si $U + U = 2U$.

2. Soit E un espace vectoriel; un ensemble $U \in E$ est dit *symétrique*, si $x \in U$ implique $-x \in U$. Soit $\mathscr{B}$ la famille des sous-ensembles symétriques et convexes de l'espace E dont chacun coïncide avec son noyau (cf. § 2). Etablir la vérité des propositions suivantes.

(a) La famille $\mathscr{B}$ représente le système fondamental de voisinages de zéro pour une topologie séparée et localement convexe de l'espace E (nous dirons que cette topologie est *nucléaire convexe*).

(b) La topologie nucléaire convexe est la plus forte parmi les topologies localement convexes, par rapport auxquelles les opérations linéaires définies dans E sont continues.

(c) Toute fonctionnelle linéaire sur E est continue par rapport à la topologie nucléaire convexe.

3. Espaces dénombrablement normés. Une classe d'espaces vectoriels topologiques, importante pour l'analyse, est constituée par les espaces dits *dénombrablement normés*. Pour formuler la définition correspondante nous aurons besoin d'une notion auxiliaire.

Soient $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. On dit qu'elles sont *concordantes*, si toute suite $\{x_n\}$ de E, qui est une suite de Cauchy pour chacune de ces normes et converge vers une limite $x \in E$ par rapport à l'une d'elles, converge vers la même limite x par rapport à l'autre.

On dit que la norme $\|\cdot\|_1$ est *non moins faible* que la norme $\|\cdot\|_2$, s'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|x\|_1 \geqslant c \; \|x\|_2$ pour tous les $x \in E$.

Si la première norme est non moins faible que la seconde et la seconde est non moins faible que la première, on dit que ces deux normes sont *équivalentes*. Deux normes sont dites *comparables*, si l'une d'elles est non moins faible que l'autre.

Définition 3. On appelle *espace dénombrablement normé* un espace vectoriel E muni d'une famille dénombrable de normes $\| \cdot \|_n$ deux à deux concordantes. Tout espace dénombrablement normé devient vectoriel topologique, si l'on prend pour système fondamental de voisinages de zéro la famille d'ensembles $U_{r,\,\varepsilon}$ dont chacun est défini par son numéro r et le réel positif ε et contient tous les éléments $x \in E$ vérifiant les conditions

$$\| x \|_1 < \varepsilon, \; \ldots, \; \| x \|_r < \varepsilon.$$

Nous proposons au lecteur de vérifier qu'un tel sytème de voisinages de zéro définit bien sur E une topologie, par rapport à laquelle les opérations linéaires définies dans E sont continues.

Notons que tout espace dénombrablement normé satisfait au premier axiome de dénombrabilité, car le système de voisinages de zéro $U_{r,\,\varepsilon}$ peut être remplacé (sans changer la topologie) par un sous-système dénombrable tel que ε ne prend que les valeurs 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ De plus, la topologie sur un espace dénombrablement normé peut être définie au moyen d'une métrique, par

exemple

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\| x - y \|_n}{1 + \| x - y \|_n}, \quad x, y \in E. \tag{1}$$

On propose au lecteur de vérifier que la fonction $\rho(x, y)$ vérifie tous les axiomes de la distance, qu'elle est invariante par rapport aux translations (c.-à-d. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$, $x, y, z \in E$) et que la topologie qu'elle engendre coïncide avec la topologie initiale. Ainsi, nous pouvons parler de la complétude d'un espace dénombrablement normé, en sous-entendant par là la complétude relativement à la métrique introduite ci-dessus. Notons encore qu'une suite donnée $\{x_k\}$ est une suite de Cauchy pour la métrique (1) si et seulement si elle est une suite de Cauchy pour chacune des normes $\| \cdot \|_n$ et qu'elle converge (pour cette métrique) vers un élément $x \in E$ si et seulement si elle converge vers cet élément x selon chacune des normes $\| \cdot \|_n$. Autrement dit, la complétude d'un espace dénombrablement normé signifie que dans un tel espace toute suite de Cauchy pour chacune des normes $\| \cdot \|_n$ est nécessairement convergente.

E x e m p l e s. 1. Un exemple important d'espace dénombrablement normé est fourni par l'espace $K[a, b]$ des fonctions indéfiniment dérivables sur un segment (cf. exemple 3, nº 1), si la norme $\| \cdot \|_m$ sur cet espace est définie par la formule

$$\| f \|_m = \sup_{\substack{a \leq t \leq b \\ 0 \leq k \leq m}} | f^{(k)}(t) |.$$

Il est évident que toutes ces normes sont concordantes entre elles et qu'elles définissent sur $K[a, b]$ justement la topologie introduite plus haut.

2. Soit S l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur la droite numérique qui tendent, à l'infini, vers zéro avec toutes leurs dérivées plus rapidement que $\frac{1}{|t|}$ à n'importe quelle puissance (c.-à-d. qui vérifient la condition: $t^k f^{(q)}(t) \to 0$ pour $|t| \to \infty$, quels que soient k et q fixés). Définissons sur cet espace une famille dénombrable de normes, en posant

$$\| f \|_m = \sup_{\substack{k, q \leq m \\ -\infty < t < \infty}} | t^k f^{(q)}(t) |, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

On vérifie sans peine que ces normes sont concordantes entre elles. Donc, S est bien un espace dénombrablement normé.

3. Un cas particulier important des espaces dénombrablement normés est constitué par les espaces dits dénombrablement hilbertiens. Soit H un espace vectoriel muni d'une famille dénombrable de produits scalaires $(\varphi, \psi)_n$ tels que les normes $\| \varphi \|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$ cor-

respondant à ces produits scalaires soient concordantes entre elles. Un tel espace, s'il est complet, s'appelle espace *dénombrablement hilbertien.*

4. Un exemple concret d'espace dénombrablement hilbertien est donné par l'espace suivant. Soit Φ l'ensemble de toutes les suites numériques $\{x_n\}$ telles que pour chaque entier $k \geqslant 0$ la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2$$

est convergente. Définissons sur cet espace une famille dénombrable de normes, en posant

$$\| x \|_k = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2}.$$

Il est aisé de vérifier que ces normes sont concordantes entre elles et que l'espace Φ est complet au sens indiqué ci-dessus. Il est clair que chacune des normes $\| \cdot \|_k$ peut être donnée à l'aide du produit scalaire

$$(x, y_k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n y_n,$$

ce qui signifie que Φ est un espace dénombrablement hilbertien. On l'appelle *espace des suites rapidement décroissantes.*

Si E est un espace dénombrablement normé, on peut supposer que les normes $\| \cdot \|_k$ dont il est muni satisfont à la condition

$$\| x \|_k \leqslant \| x \|_l \quad \text{pour } k < l, \tag{2}$$

car dans le cas contraire on pourrait remplacer les normes $\| x \|_k$ par les normes

$$\| x \|_k' = \sup \{ \| x \|_1, \| x \|_2, \ldots \| x \|_k \}$$

qui définissent sur E la même topologie que la famille de normes initiale. En complétant l'espace E selon chacune des normes $\| \cdot \|_k$ nous obtiendrons une famille d'espaces normés complets E_k. Grâce à la relation (2) et à la concordance des normes, on a les inclusions naturelles

$$E_k \supset E_l \quad \text{pour } k < l.$$

Ainsi, à tout espace dénombrablement normé on peut associer une suite décroissante d'espaces normés complets

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k \supset ; \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \supset E.$$

On peut démontrer que l'espace E est complet si et seulement si $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ (démontrer !). Ainsi, par exemple, l'espace $K[a, b]$

des fonctions indéfiniment dérivables sur le segment $[a, b]$ constitue l'intersection des espaces normés complets D^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) où D^n désigne l'espace des fonctions admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n inclusivement, sus lequel la norme est définie par la formule

$$\|f\| = \sup_{\substack{a \leq t \leq b \\ 0 \leq k \leq n}} |f^{(k)}(t)|.$$

Dans les années trente, au moment où, grâce aux travaux de Banach, la théorie des espaces vectoriels normés était déjà construite, l'impression s'était faite que cette classe d'espaces était suffisamment vaste pour satisfaire tous les besoins concrets de l'analyse. Mais plus tard il est apparu qu'il n'en était pas ainsi. Il s'est avéré que dans beaucoup de questions on a affaire à des espaces, tels que l'espace des fonctions indéfiniment dérivables, l'espace $\mathbf{R}^\infty$ de toutes les suites numériques, etc., dont la topologie naturelle ne peut pas être définie à l'aide d'une norme. Par conséquent, les espaces vectoriels topologiques non normés ne présentent rien d'« exotique » ou de « pathologique ». Bien au contraire, certains de ces espaces représentent des généralisations de l'espace euclidien de dimension finie, non moins naturelles et importantes que, par exemple, l'espace de Hilbert.

Fonctionnelles linéaires et opérateurs linéaires

§ 1. Fonctionnelles linéaires continues

1. Fonctionnelles linéaires continues sur un espace vectoriel topologique. Nous avons déjà considéré des fonctionnelles définies sur un espace vectoriel au §1, chap. III. Lorsqu'il s'agit des fonctionnelles sur un espace vectoriel topologique, ce sont les fonctionnelles continues qui présentent l'intérêt principal. Comme d'habitude, une fonctionnelle f définie sur l'espace E s'appelle *continue*, si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x_0 \in E$ il existe un voisinage U de l'élément x_0 tel que

$$|f(x)-f(x_0)<\varepsilon \text{ pour } x \in U. \qquad (1)$$

Cette définition est valable, en particulier, pour les fonctionnelles linéaires.

Si E est un espace vectoriel topologique de dimension finie, toute fonctionnelle linéaire sur E est automatiquement continue. Dans le cas général, la linéarité d'une fonctionnelle n'implique pas sa continuité.

La proposition qui suit, bien que presque évidente, est importante pour la suite.

Si une fonctionnelle linéaire f est continue en un point $x \in E$, elle est continue partout sur E.

En effet, soit y un point quelconque de E et soit $\varepsilon > 0$. Choisissons un voisinage U du point x de façon que la condition (1) soit remplie. Alors la translation de ce voisinage

$$V = U + (y - x)$$

nous donnera le voisinage cherché du point y, car si $z \in V$, on a $z + x - y \in U$ et, par conséquent,

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y + x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Donc, pour établir la continuité d'une fonctionnelle linéaire, il suffit de vérifier si elle est continue en un point au moins, par exemple, au point 0.

Si l'espace E satisfait au premier axiome de dénombrabilité, la continuité d'une fonctionnelle linéaire peut être exprimée en termes de suites: une fonctionnelle f est dite continue au point $x \in E$, si $x_n \to x$ implique $f(x_n) \to f(x)$. La vérification du fait

que cette définition de la continuité est équivalente à la précédente (à condition que le premier axiome de dénombrabilité soit satisfait) est laissée au lecteur.

Théorème 1. *Pour qu'une fonctionnelle linéaire f soit continue sur E, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de zéro dans E, sur lequel la fonctionnelle f soit bornée.*

Démonstration. Si la fonctionnelle f est continue au point 0, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de zéro, sur lequel

$$| f(x) | < \varepsilon.$$

Inversement, soit U un voisinage de zéro tel que

$$| f(x) | \leqslant C \text{ pour } x \in U$$

et soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{C} U$ est précisément le voisinage de zéro, sur lequel $| f(x) | < \varepsilon$. On en déduit que la fonctionnelle f est continue au point 0 et donc, partout.

Exercice. Soit E un espace vectoriel topologique; démontrer les propositions suivantes.

(a) Une fonctionnelle linéaire f sur E est continue si et seulement s'il existe un ensemble ouvert $U \subset E$ et un nombre t tels que $t \notin f(U)$, où $f(U)$ désigne l'ensemble des valeurs de f sur U.

(b) Une fonctionnelle linéaire f sur E est continue si et seulement si son ensemble des zéros $\{x/f(x) = 0\}$ est fermé dans E.

(c) Si toute fonctionnelle linéaire sur E est continue, la topologie de E coïncide avec la topologie nucléaire convexe (cf. exercice 2, page 165).

(d) Si l'espace E est de dimension infinie et normable, il existe une fonctionnelle linéaire non continue sur E (utiliser l'existence dans E d'une base de Hamel; cf. exercices, page 119).

(e) Supposons que dans E il existe un système fondamental de voisinages de zéro dont la puissance est inférieure ou égale à la dimension algébrique de l'espace E (c.-à-d. à la puissance de la base de Hamel dans E; cf. exercices, page 119). Alors il existe une fonctionnelle linéaire non continue sur E.

(f) Pour qu'une fonctionnelle linéaire f soit continue sur E, il faut et, si E satisfait au premier axiome de dénombrabilité, il suffit que cette fonctionnelle soit bornée sur tout ensemble borné.

2. Fonctionnelles linéaires sur un espace normé. Supposons l'espace considéré E normé. D'après le théorème 1, toute fonctionnelle linéaire continue f est bornée dans un voisinage de zéro. Mais dans un espace normé tout voisinage de zéro contient une boule; donc, f est bornée dans une boule. En vertu de la linéarité de la fonctionnelle f, cela équivaut à ce qu'elle soit bornée dans toute boule, en particulier, dans la boule unité $\| x \| \leqslant 1$. Réciproquement, si la fonctionnelle f est bornée dans la boule unité, d'après le théorème 1 elle est continue (car l'intérieur de cette boule est un voisinage de zéro).

Ainsi, *une fonctionnelle linéaire est continue sur un espace normé si et seulement si les valeurs prises par cette fonctionnelle sur la boule unité forment un ensemble borné.*

Soit f une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace normé E. Le nombre

$$\| f \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} | f(x) |, \tag{2}$$

c'est-à-dire la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de $| f(x) |$ sur la boule unité de l'espace E, s'appelle *norme* de la fonctionnelle f. Notons que $\| f \|$ jouit des propriétés presque évidentes suivantes:

1) $$\| f \| \sup_{x \neq 0} \frac{f(x)}{\| x \|};$$

ceci résulte immédiatement du fait que pour tout $x \neq 0$ on a

$$\frac{| f(x) |}{\| x \|} = \left| f\left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right|.$$

2) Pour tout $x \in E$ on a

$$| f(x) | \leqslant \| f \| \cdot \| x \|. \tag{3}$$

En effet, si $x \neq 0$, l'élément $\frac{x}{\| x \|}$ appartient à la boule unité; donc, selon la définition de la norme d'une fonctionnelle, on a

$$\left| f\left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right| = \frac{| f(x) |}{\| x \|} \leqslant \| f \|,$$

d'où l'on obtient (3). Si $x = 0$, les deux membres de l'inégalité (3) s'annulent.

Exercice. Soit $C \geqslant 0$ un nombre vérifiant l'inégalité

$$\| f(x) \| \leqslant C \| x \| \tag{4}$$

pour tout x. Démontrer que $\| f \| = \inf C$, où la borne inférieure est étendue à tous les nombres C vérifiant l'inégalité (4).

Considérons quelques exemples de fonctionnelles linéaires sur des espaces normés.

1. Soit $\mathbf{R}^n$ l'espace euclidien à n dimensions et soit a un vecteur quelconque choisi dans cet espace. Le produit scalaire

$$f(x) = (x, a),$$

où x parcourt tout l'espace $\mathbf{R}^n$, est évidemment une fonctionnelle linéaire sur $\mathbf{R}^n$. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky, on a

$$| f(x) | = | (x, a) | \leqslant \| x \| \cdot \| a \|; \tag{5}$$

par conséquent, cette fonctionnelle est bornée, et donc continue, sur $\mathbf{R}^n$. De l'inégalité (5) on obtient

$$\frac{| f(x) |}{\| x \|} \leqslant \| a \|.$$

Comme le second membre de cette inégalité ne dépend pas de x, on a

$$\sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|a\|,$$

c'est-à-dire $\|f\| \leqslant \|a\|$. Mais, en posant $x = a$, on obtient

$$|f(a)| = (a, a) = \|a\|^2, \text{ c.-à-d. } \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Donc,

$$\|f\| = \|a\|.$$

2. L'intégrale

$$I(x) = \int_a^b x(t)\,dt,$$

où $x(t)$ est une fonction continue sur $[a, b]$, représente une fonctionnelle linéaire sur l'espace $C[a, b]$. Cette fonctionnelle est bornée et sa norme est égale à $b - a$. En effet,

$$|I(x)| = \left| \int_a^b x(t)\,dt \right| \leqslant \max |x(t)|\,(b-a) = \|x\|\,(b-a),$$

l'égalité ayant lieu pour $x \equiv$ const.

3. Considérons un exemple plus général. Soit $y_0(t)$ une fonction continue sur $[a, b]$, arbitrairement choisie. Posons pour toute fonction $x(t) \in C[a, b]$

$$F(x) = \int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt.$$

C'est une fonctionnelle linéaire. Elle est bornée, car

$$|F(x)| = \left| \int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt \right| \leqslant \|x\| \int_a^b |y_0(t)|\,dt. \tag{6}$$

Du fait qu'elle est linéaire et bornée on conclut qu'elle est continue. De l'inégalité (6) on obtient l'estimation de sa norme :

$$\|F\| \leqslant \int_a^b |y_0(t)|\,dt.$$

(Démontrer qu'en réalité ici il y a égalité !)

4. Considérons dans l'espace $C[a, b]$ la fonctionnelle linéaire

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0),$$

déjà mentionnée au nº 5, § 1, chap. III. Sa valeur en $x(t)$ coïncide avec la valeur de la fonction $x(t)$ au point donné t_0. Il est clair que

$$|x(t_0)| \leqslant \|x\|$$

et pour $x \equiv$ const il y a égalité. On en déduit aussitôt que la norme de la fonctionnelle δ_{t_0} est égale à 1.

5. Sur tout espace euclidien X on peut définir une fonctionnelle linéaire de la même façon que sur $\mathbf{R}^n$, en choisissant un élément fixe $a \in X$ et en posant pour tout $x \in X$

$$F(x) = (x, a).$$

Comme dans le cas de l'espace $\mathbf{R}^n$, on vérifie facilement que

$$\|F\| = \|a\|.$$

Dans ce qui suit nous ne considérerons que des fonctionelles linéaires continues; c'est pourquoi, par abus de langage, le mot « continu » sera omis.

La notion de norme d'une fonctionnelle linéaire admet l'interprétation géométrique suivante. Nous avons vu (chap. III, § 1) qu'à toute fonctionnelle linéaire on peut associer un hyperplan L défini par l'équation

$$f(x) = 1.$$

Cherchons la distance d de cet hyperplan au point 0. Par définition, $d = \inf\limits_{f(x)=1} \|x\|$. En vertu de l'estimation

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|,$$

sur l'hyperplan $f(x) = 1$ on a $\|x\| \geqslant \frac{1}{\|f\|}$ et donc, $d \geqslant \frac{1}{\|f\|}$. D'autre part, selon la définition de la norme de f, à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un élément x_ε vérifiant la condition $f(x_\varepsilon) = 1$ et tel que

$$1 > (\|f\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|;$$

par conséquent,

$$d = \inf_{f(x)=1} \|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on en déduit que

$$d = \frac{1}{\|f\|};$$

donc, *la norme d'une fonctionnelle linéaire f est l'inverse de la distance du point 0 à l'hyperplan $f(x) = 1$.*

3. Théorème de Hahn-Banach dans un espace normé. Au § 2, chap. III, nous avons démontré le théorème général de Hahn-Banach

qui affirme que toute fonctionnelle linéaire f_0, définie sur un sous-espace L d'un espace vectoriel E et satisfaisant à la condition

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \tag{7}$$

(où p est une fonctionnelle convexe fixée sur E), peut être prolongée à l'espace E tout entier sans violer la condition (7). Pour le cas d'un espace normé ce théorème peut être énoncé de la manière suivante :

Soient E un espace normé réel, L un sous-espace de E et f_0 une fonctionnelle linéaire bornée sur L. Cette fonctionnelle peut être prolongée de façon à obtenir une fonctionnelle linéaire f sur l'espace E tout entier sans augmenter la norme, c'est-à-dire de façon que

$$\| f_0 \|_{\text{sur } L} = \| f \|_{\text{sur } E}.$$

En effet, soit

$$\| f_0 \|_{\text{sur } L} = k.$$

Il est clair que $k\| x \|$ est une fonctionnelle convexe. En prenant cette fonctionnelle pour p et en appliquant le théorème général de Hahn-Banach, on obtient le résultat voulu.

Le théorème de Hahn-Banach sous cette forme admet l'interprétation géométrique suivante. L'équation

$$f_0(x) = 1 \tag{8}$$

définit dans le sous-espace L un hyperplan situé à la distance $\frac{1}{\| f_0 \|}$ de zéro. En prolongeant la fonctionnelle f_0 à l'espace E tout entier, sans augmenter sa norme, nous traçons par cet hyperplan « partiel » un hyperplan « plus grand » dans l'espace E tout entier, sans lui « permettre » de s'approcher de zéro.

La version complexe du théorème de Hahn-Banach (théorème 4a, § 2, chap. III) nous fournit l'analogue complexe du théorème précédent :

Soit E un espace normé complexe et soit f_0 une fonctionnelle linéaire bornée, définie sur un sous-espace $L \subset E$ Alors il existe une fonctionnelle linéaire bornée f, définie sur tout l'espace E et vérifiant les conditions

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in L,$$
$$\| f \|_{\text{sur } E} = \| f_0 \|_{\text{sur } L}.$$

Du théorème de Hahn-Banach pour un espace normé on déduit le résultat important qui suit.

C o r o l l a i r e. *Soit E un espace normé. Quels que soient x_1, $x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$, il existe une fonctionnelle linéaire continue f qui sépare ces points, c'est-à-dire telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

En effet, ceci équivaut à l'existence, pour tout $x_0 \neq 0$, d'une fonctionnelle f séparant x_0 de 0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) \neq 0$. Pour construire une telle fonctionnelle, considérons d'abord les éléments de la forme λx_0 et définissons sur le sous-espace formé par ces éléments une fonctionnelle f_0, en posant $f(\lambda x_0) = \lambda$; ensuite, prolongeons cette fonctionnelle (en utilisant le théorème de Hahn-Banach) à l'espace E tout entier. En définitive, nous obtiendrons une fonctionnelle linéaire continue f vérifiant la condition $f(x_0) = 1 \neq 0$.

4. Fonctionnelles linéaires sur un espace dénombrablement normé. Soit E un espace dénombrablement normé avec les normes $\|\cdot\|_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) ; sans restreindre la généralité, on peut supposer (cf. page 167) que pour tout $x \in E$ on a

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \ldots \leqslant \|x\|_n \leqslant \ldots \tag{9}$$

Soit f une fonctionnelle linéaire continue sur E ; il existe alors dans E un voisinage de zéro U, dans lequel la fonctionnelle f est bornée. D'après la définition de la topologie sur un espace dénombrablement normé, il existe un entier naturel k et un réel $\varepsilon > 0$, tels que la boule $B_{k,\varepsilon} = \{x: \|x\|_k < \varepsilon\}$ soit située entièrement dans U. Par conséquent, la fonctionnelle f est bornée dans cette boule et donc, bornée et continue par rapport à la norme $\|\cdot\|_k$, c'est-à-dire il existe une constante C telle que

$$|f(x)| \leqslant C\|x\|_k, \quad x \in E.$$

D'autre part, il est évident que si une fonctionnelle linéaire est bornée par rapport à l'une des normes $\|\cdot\|_n$, elle est alors continue sur E. Donc, si E_n^* est l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires sur E, continues par rapport à la norme $\|\cdot\|_n$, et E^* est l'ensemble de *toutes* les fonctionnelles linéaires continues sur E, on a

$$E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^*. \tag{10}$$

De la condition (9) il résulte, en outre, que

$$E_1^* \subset E_2^* \subset \ldots \subset E_n^* \subset \ldots$$

Si f est une fonctionnelle linéaire continue sur E, c'est-à-dire si $f \in E^*$, on appelle *ordre* de f le plus petit nombre n tel que $f \in E_n^*$; en vertu de l'égalité (10), *toute fonctionnelle linéaire continue sur E est d'ordre fini.*

Exercice. 1. Démontrer que dans un espace dénombrablement normé, quels que soient deux éléments $x_1 \neq x_2$, il existe une fonctionnelle linéaire continue qui les sépare.

2. Démontrer la même proposition pour un espace localement convexe quelconque.

§ 2. Espace dual

1. Définition de l'espace dual. Pour les fonctionnelles linéaires on peut définir les opérations d'addition et de multiplication par un nombre. Soient f_1 et f_2 deux fonctionnelles linéaires sur un espace vectoriel E. Leur *somme* $f_1 + f_2$ est, par définition, la fonctionnelle

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in E.$$

On appelle *produit* αf_1 de la fonctionnelle linéaire f_1 par le nombre α la fonctionnelle

$$f(x) = \alpha f_1(x), \quad x \in E.$$

Les égalités qui définissent $f_1 + f_2$ et αf_1 peuvent s'écrire encore ainsi :

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x).$$

Il est clair que la somme $f_1 + f_2$ et le produit αf_1 sont des fonctionnelles linéaires. Si, en outre, l'espace E est topologique et les fonctionnelles f_1 et f_2 sont continues sur E, alors $f_1 + f_2$ et αf_1 le sont également.

Il est aisé de vérifier que les opérations sur les fonctionnelles linéaires, définies ci-dessus, satisfont à tous les axiomes de l'espace vectoriel. Autrement dit, l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues, définies sur un espace vectoriel topologique, constitue un espace vectoriel. On l'appelle *dual* de l'espace E et on le note E^*.

Exercice. L'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires sur E, non nécessairement continues, est appelé *dual algébrique* de l'espace E et noté $E^{\#}$ Donner un exemple d'espace vectoriel topologique E tel que

$$E^* \neq E^{\#}.$$

Dans l'espace dual E^* on peut introduire une topologie de différentes façons. Parmi toutes les topologies de E^* les plus importantes sont la topologie *forte* et la topologie *faible*.

2. Topologie forte sur l'espace dual. Commençons par le cas le plus simple, où l'espace initial E est normé. Pour les fonctionnelles linéaires continues, définies sur un espace normé, nous avons introduit la notion de norme, en posant

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Il est aisé de voir que $\|f\|$ vérifie toutes les conditions contenues dans la définition de la norme. En effet,

1) $\|f\| > 0$ pour toute fonctionnelle linéaire non nulle f,
2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$,

3) $$\|f_1+f_2\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f_1(x)+f_2(x)|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x\neq 0} \frac{|f_2(x)|}{\|x\|} = \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Par conséquent, le dual E^* d'un espace normé peut être muni de façon naturelle d'une structure d'espace normé. La topologie de E^* qui correspond à la norme introduite ci-dessus s'appelle *topologie forte* de E^*. S'il faut souligner que l'espace E^* est considéré comme un espace normé, nous écrirons $(E^*, \|\cdot\|)$ au lieu de E^*.

Démontrons la proposition suivante qui exprime une propriété importante du dual d'un espace normé.

Théorème 1. *L'espace dual* $(E^*, \|\cdot\|)$ *est complet.*

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy de fonctionnelles linéaires. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ pour tous les $n, m \leqslant N$. On en déduit que pour tout $x \in E$ on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

ce qui signifie que pour tout $x \in E$ la suite numérique $\{f_n(x)\}$ est convergente.

Posons

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

et montrons que f est une fonctionnelle linéaire continue. La linéarité est immédiate:

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Pour démontrer la continuité de la fonctionnelle f reprenons l'inégalité $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\|$ et passons à la limite pour $m \to \infty$; il vient

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

On en déduit que la fonctionnelle $f - f_n$ est bornée. Mais alors la fonctionnelle $f = f_n + (f - f_n)$ est aussi bornée et donc continue. Du même fait il résulte encore que $\|f - f_n\| \leqslant \varepsilon$ pour tous les $n \geqslant N$, c'est-à-dire que $\{f_n\}$ converge vers f.

Le théorème est démontré.

Soulignons encore une fois que ce théorème est vrai indépendamment du fait que l'espace initial est complet ou non.

Remarque. *Si l'espace* E *n'est pas complet et* $\bar{E}$ *est son complété, alors les espaces* E^* *et* $(\bar{E})^*$ sont isomorphes.

En effet, l'espace E étant inclus dans $\bar{E}$ comme un sous-ensemble partout dense, toute fonctionnelle linéaire f, continue sur E, peut

être prolongée par continuité de $\overline{E}$ à l'espace E tout entier. Désignons ce prolongement (unique!) par $\overline{f}$. Il est clair que $\overline{f} \in (\overline{E})^*$, $\|\overline{f}\| = \|f\|$ et que toute fonctionnelle de $(\overline{E})^*$ est le prolongement d'une fonctionnelle de E^* (plus précisément, de sa restriction à E). Par conséquent, l'application $f \to \overline{f}$ est un isomorphisme de l'espace E^* sur l'espace $(\overline{E})^*$.

Définissons maintenant la *topologie forte* sur le dual d'un espace vectoriel topologique arbitraire. Dans le dual d'un espace normé, nous avons appelé voisinage de zéro un ensemble de fonctionnelles vérifiant la condition

$$\|f\| < \varepsilon.$$

Autrement dit, dans l'espace E^*, dual d'un espace normé, on prend pour voisinages de zéro les ensembles de fonctionnelles f telles que $|f(x)| < \varepsilon$, lorsque x parcourt dans E la boule unité $\|x\| \leqslant 1$. Si ε varie, ces ensembles forment un système fondamental de voisinages de zéro. Dans le cas où E est un espace vectoriel topologique non normé, il est naturel de prendre au lieu de la boule unité un ensemble borné arbitraire $A \subset E$.

Un voisinage de zéro $U_{\varepsilon, A}$ dans E^* est, par définition, l'ensemble des fonctionnelles linéaires vérifiant la condition

$$|f(x)| < \varepsilon \text{ pour tous les } x \in A.$$

En faisant varier ε et A, on obtient un système fondamental de voisinages de zéro dans E^*.

Ainsi, la *topologie forte* de E^* est donnée par un système de voisinages de zéro qui dépendent du réel positif ε et de l'ensemble borné $A \subset E$. Nous n'allons pas vérifier ici, bien que cela ne soit pas difficile (cf., par exemple, [9]), qu'un tel système de voisinages confère bien à E^* une structure d'espace vectoriel topologique.

Il est clair que dans le cas d'un espace normé E la topologie forte de E^*, définie ci-dessus, coïncide avec celle qui est définie par la norme.

Notons que la topologie forte de E^* est nécessairement séparée et localement convexe (indépendamment de la topologie de E). En effet, si $f_0 \in E^*$ et $f_0 \neq 0$, il existe un élément $x_0 \in E$ tel que $f_0(x_0) \neq 0$; posons $\varepsilon = \frac{1}{2}|f_0(x_0)|$ et $A = \{x_0\}$; alors $f_0 \notin U_{\varepsilon, A}$, c'est-à-dire E^* est séparé. Pour démontrer que la topologie forte de E^* est localement convexe, il suffit de remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble borné $A \subset E$ le voisinage $U_{\varepsilon, A}$ est convexe dans E. Nous désignerons la topologie forte de E^* par le symbole b. Lorsqu'il faudra préciser que l'espace E est considéré avec sa topologie forte, nous écrirons (E^*, b) au lieu de E^*.

3. Exemples d'espaces duals.

1. Soit E un espace vectoriel à n dimensions (réel ou complexe). Une base quelconque $e_1, \ldots, e_n$ de cet espace étant choisie, tout vecteur $x \in E$ peut être representé de façon unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Si f est une fonctionnelle linéaire sur E, il est clair que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i. \tag{1}$$

Donc, une fonctionnelle linéaire est définie de façon unique par ses valeurs pour les vecteurs de la base $e_1, \ldots, e_n$, ces valeurs pouvant être données arbitrairement. Introduisons les fonctionnelles linéaires $g_1, \ldots, g_n$, en posant

$$g_j(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Il est évident que ces fonctionnelles sont linéairement indépendantes. Il est clair, d'autre part, que $g_j(x) = x_j$, de sorte que la formule (1) peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, g_i(x).$$

On en conclut que les fonctionnelles $g_1, \ldots, g_n$ forment une base de l'espace E^* ; donc, E^* est un espace vectoriel de dimension n. La base $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de E^* s'appelle base *duale* de la base $e_1, \ldots, e_n$ de E.

Des normes différentes définies sur l'espace E induisent des normes différentes sur E^*. Voici quelques exemples de couples de normes sur E et sur E^* qui se correspondent (on recommande au lecteur d'effectuer soigneusement les démonstrations nécessaires):

(a) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}, \quad \|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{1/2};$

(b) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{1/q};$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty;$$

(c) $\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \quad \|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|;$

(d) $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|f\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i|.$

Dans ces formules $x_1, \ldots, x_n$ désignent les coordonnées du vecteur $x \in E$ par rapport à la base $e_1, \ldots, e_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ désignent les coordonnées de la fonctionnelle $f \in E^*$ par rapport à la base duale $g_1, \ldots, g_n$.

E x e r c i c e. Démontrer que toutes les normes énumérées ici définissent sur un espace à n dimensions la même topologie.

2. Considérons l'espace c_0 des suites $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ convergeant vers zéro, muni de la norme $\| x \| = \sup_n | x_n |$, et montrons que *son dual* $(c_0^*, \|\cdot\|)$ *est isomorphe à l'espace* l_1 *des suites* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ *absolument sommables, muni de la norme* $\| f \| = \sum_{n=1}^{\infty} | f_n |$. Toute suite $f \in l_1$ définit sur l'espace c_0 une fonctionnelle linéaire bornée selon la formule

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n ; \tag{2}$$

il est clair que $| \tilde{f}(x) | \leqslant \| x \| \sum_{n=1}^{\infty} | f_n |$, de sorte que

$$\| \tilde{f} \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} | f_n | \leqslant \| f \|.$$

Considérons dans c_0 les vecteurs

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et posons $x^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{|f_n|} e_n$ $\left(\text{si } f_n = 0, \text{ on pose } \frac{f_n}{|f_n|} = 0\right)$. Alors $x^{(N)} \in c_0$, $\| x^{(N)} \| \leqslant 1$ et

$$\tilde{f}(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{|f_n|} \tilde{f}(e_n) = \sum_{n=1}^{N} | f_n |,$$

de sorte que $\lim_{n \to \infty} \tilde{f}(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^{\infty} | f_n | = \| f \|$. Par conséquent, $\| \tilde{f} \| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} | f_n |$; compte tenu de l'inégalité de sens contraire, démon-

trée plus haut, on en déduit que

$$\|\tilde{f}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|.$$

Ainsi, nous avons construit une *application linéaire isométrique* $f \to \tilde{f}$ de l'espace l_1 dans l'espace c_0^*; il reste à démontrer que l'image de l'espace l_1 par cette application coïncide avec l'espace c_0^* tout entier, c'est-à-dire que toute fonctionnelle $\tilde{f} \in c_0^*$ peut s'écrire sous la forme (2) avec $f = \{f_n\} \in l_1$. Pour tout $x = \{x_n\} \in c_0$ on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, où la série figurant au second membre converge dans c_0 vers l'élément x, car

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n \right\| = \sup_{n>N} |x_n| \to 0 \text{ pour } N \to \infty.$$

Comme la fonctionnelle $\tilde{f} \in c_0^*$ est continue, on a $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \tilde{f}(e_n)$; donc, il suffit de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f} | (e_n) | < \infty$. En posant

$$x^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\tilde{f}(e_n)}{\tilde{f}(e_n)} e_n$$

et en remarquant que $x^{(N)} \in c_0$ et $\|x^{(N)}\| \leqslant 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}(e_n)| = \sum_{n=1}^{N} \frac{\tilde{f}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|} \tilde{f}(e_n) = \tilde{f}(x^{(N)}) \leqslant \|\tilde{f}\|,$$

d'où, puisque N est arbitraire, on conclut que $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}(e_n)| < \infty$.

3. Il est facile de démontrer que l'espace l_1^*, dual de l_1, est isomorphe à l'espace m, formé par les suites bornées $x = \{x_n\}$ et muni de la norme $\|x\| = \sup_n |x_n|$.

4. Soit $p > 1$ et l_p l'espace des suites $x = \{x_n\}$ telles que

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty;$$

on peut démontrer que l'espace dual l_p^* est isomorphe à l'espace l_q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Les fonctionnelles linéaires continues sur l_p ont la forme générale suivante:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n; \quad x = \{x_n\} \in l_p, \ f = \{f_n\} \in l_q.$$

La démonstration est fondée sur l'application de l'inégalité de Hölder.

5. Etudions la structure du dual d'un espace de Hilbert.

Théorème 2. *Soit H un espace de Hilbert réel. Pour toute fonctionnelle linéaire continue f, définie sur H, il existe un élément unique $x_0 \in H$ tel que*

$$f(x) = (x, x_0), \quad x \in H, \tag{3}$$

et $\|f\| = \|x_0\|$. *Réciproquement, si $x_0 \in H$, la formule* (3) *définit une fonctionnelle linéaire continue f telle que $\|f\| = \|x_0\|$. L'égalité* (3) *définit donc un isomorphisme $f \to x_0$ entre les espaces H^* et H.*

Démonstration. Il est évident que pout tout $x_0 \in H$ la formule (3) définit une fonctionnelle linéaire sur H. Comme $|f(x)| = |(x, x_0)| \leqslant \|x\| \cdot \|x_0\|$, cette fonctionnelle est continue, et comme $f(x_0) = \|x_0\|^2$, on a $\|f\| = \|x_0\|$. Montrons que toute fonctionnelle linéaire continue f, définie sur H, peut être représentée sous la forme (3). Si $f = 0$, on pose $x_0 = 0$. Soit donc $f \neq 0$ et soit $H_i = \{x: f(x) = 0\}$ le noyau de la fonctionnelle f; en vertu de la continuité de f, H_0 est un sous-espace vectoriel fermé de H. Au n° 6, §1, chap. III, nous avons montré que le noyau de toute fonctionnelle linéaire est de codimension 1. Compte tenu du corollaire 3 du théorème 7, §4, chap. III, on en conclut que le supplémentaire orthogonal $H_0^{\perp}$ du sous-espace H_0 est de dimension 1; donc, il existe un vecteur (non nul) y_0 orthogonal à H_0 tel que tout vecteur $x \in H$ peut être mis de façon unique sous la forme $x = y + \lambda y_0$ avec $y_0 \in H_0$. Evidemment, on peut supposer $\|y_0\| = 1$. Posons $x_0 = f(y_0)\, y_0$. Alors pour tout $x \in H$ on a

$$x = y + \lambda y_0, \quad y \in H_0,$$
$$f(x) = \lambda f(y_0),$$
$$(x, x_0) = \lambda (y_0, x_0) = \lambda f(y_0)(y_0, y_0) = \lambda f(y_0).$$

Ainsi, $f(x) = (x, x_0)$ pour tous les $x \in H$. Si $f(x) = (x, x_0')$, $x \in H$, alors $(x, x_0 - x_0') = 0$, d'où, en posant $x = x_0 - x_0'$, on obtient que $x_0 = x_0'$.

Le théorème est démontré.

Remarques. 1. Soit E un espace euclidien non complet et soit H un espace de Hilbert lui servant de complété. Comme les espaces E^* et H^* sont isomorphes (cf. remarque, page 177) et l'espace H^* est isomorphe à H, on a le résultat suivant: *le dual E^* d'un espace euclidien non complet E est isomorphe au complété H de l'espace E.*

2. Le théorème 2 est vrai également pour un espace de Hilbert complexe (la démonstration est exactement la même, pourvu qu'on remplace $x_0 = f(y_0)\, y_0$ par $x_0 = \overline{f(y_0)}\, y_0$). La seule différence du

cas d'un espace réel consiste en ce que maintenant l'application de H dans H^* qui fait correspondre à tout élément $x_0 \in H$ la fonctionnelle $f(x) = (x, x_0)$ est un *isomorphisme linéaire conjugué*, c'est-à-dire un isomorphisme qui à l'élément λx_0 fait correspondre la fonctionnelle $\bar{\lambda} f$.

6. Dans les exemples 1-5 nous avons considéré des espaces normés. Considérons maintenant un espace dénombrablement normé. Soit Φ un espace dénombrablement hilbertien réel, constitué par les suites $x = \{x_n\}$ telles que

$$\| x \|_k = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2\Big)^{1/2} < \infty$$

pour tous les $k = 1, 2, \ldots$ et muni des produits scalaires

$$(x, y)_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n y_n, \quad k = 1, 2, \ldots$$

L'espace Φ avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_k$ est un espace euclidien; soit Φ_k son complété. Il est aisé de voir que Φ_k peut être identifié à l'espace de Hilbert constitué par les suites $x = \{x_n\}$ telles que $\| x \|_k < \infty$. En vertu du théorème 2, l'espace Φ_k^*, dual de Φ_k, est isomorphe à l'espace Φ_k. Cet isomorphisme fait correspondre à toute fonctionnelle linéaire continue $f \in \Phi_k^*$ une suite $\tilde{f} = \{f_n\}$ telle que

$$\| f \| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^k |f_n|^2\Big)^{1/2} < \infty,$$

$$f(x) = (x, \tilde{f})_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n f_n,$$

$$x = \{x_n\} \in \Phi_k ;$$

inversement, toute suite de cette forme définit un élément de Φ_k^*. Définissons maintenant la fonctionnelle $f \in \Phi_k^*$ non à l'aide de la suite $\{f_n\}$, mais à l'aide de la suite $\{g_n\}$, où $g_n = n^k f_n$. Alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n \text{ et } \| f \| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^2\Big)^{1/2}.$$

Par conséquent, l'espace Φ_k^* peut être identifié à l'espace de Hilbert constitué par les suites $\{g_n\}$ telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^2 < \infty \tag{4}$$

et muni du produit scalaire

$$(g^{(1)}, g^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^{(1)} g_n^{(2)}.$$

Comme $\Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^*$, Φ^* représente l'espace de toutes les suites $\{g_n\}$ telles que pour chacune d'elles il existe un nombre k pour lequel cette suite vérifie la condition (4).

La valeur de chacune de ces fonctionnelles est définie pour tout élément $x = \{x_n\} \in \Phi$ et est égale à $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$.

Ainsi, si l'espace Φ est l'intersection d'une suite décroissante d'espaces de Hilbert.

$$\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_k, \quad \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots \supset \Phi_k \supset \ldots,$$

l'espace Φ^* est la réunion d'une suite croissante d'espaces de Hilbert

$$\Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^*, \quad \Phi_1^* \subset \Phi_2^* \subset \ldots \subset \Phi_k^* \subset \ldots$$

Il est commode d'introduire la notation $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$. En désignant encore l'espace l_2 par Φ_0, nous obtiendrons une suite d'espaces de Hilbert, infinie dans les deux sens:

$$\ldots \subset \Phi_k \subset \ldots \subset \Phi_1 \subset \Phi_0 \subset \Phi_{-1} \subset \ldots \subset \Phi_{-k} \subset \ldots,$$

où $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$ pour tous les $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Espace bidual. Comme les fonctionnelles linéaires continues sur un espace vectoriel topologique forment elles-mêmes un espace vectoriel topologiques — le dual (E^*, b) de l'espace E — on peut parler aussi de l'espace E^{**} des fonctionnelles linéaires continues sur E^*, c'est-à-dire de l'*espace bidual* de E, etc.

Notons que tout élément x_0 de E définit une fonctionnelle linéaire sur E^*. En effet, posons

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0), \tag{5}$$

où x_0 est un élément fixé de E et f parcourt l'espace E^* tout entier. L'égalité (5) fait correspondre à chaque f un nombre $\psi_{x_0}(f)$ et définit donc une fonctionnelle sur E^*. Comme, par ailleurs,

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha \psi_{x_0}(f_1) + \beta \psi_{x_0}(f_2),$$

cette fonctionnelle est linéaire.

De plus, une telle fonctionnelle est continue sur E^*. En effet, soient $\varepsilon > 0$, et A un sous-ensemble borné de E contenant l'élément x_0. Considérons dans E^* un voisinage de zéro $U(\varepsilon, A)$. D'après la définition de $U(\varepsilon, A)$ on a

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leqslant \varepsilon \text{ pour } f \in U(\varepsilon, A).$$

Mais cela signifie que la fonctionnelle ψ_{x_0} est continue au point 0 et donc sur l'espace E^* tout entier.

Nous avons obtenu donc une application de l'espace E tout entier sur une partie de l'espace E^{**}. Cette application est, évidemment, linéaire. Une telle application de E dans E^{**} s'appelle *application naturelle de l'espace E dans son bidual*. Désignons-la par π. S'il y a des fonctionnelles linéaires sur E en quantité suffisamment grande (par exemple, si l'espace E est normé ou au moins localement convexe et séparé), cette application est biunivoque, car alors pour n'importe quels deux éléments distincts x', $x'' \in E$ il existe une fonctionnelle $f \in E^*$ telle que $f(x') \neq f(x'')$, c'est-à-dire $\psi_{x'}$ et $\psi_{x''}$ sont des fonctionnelles distinctes sur E^*. Si, en outre, $\pi(E) = E^{**}$, alors l'espace E (localement convexe et séparé) est dit *semi-réflexif*. Dans l'espace E^{**} (comme dual de (E^*, b)) on peut introduire la topologie forte que nous désignerons par b^*. Si l'espace E est semi-réflexif et l'application $\pi: E \to E^{**}$ est c o n t i n u e, on dit que l'espace E est *réflexif*. On peut montrer que l'application π^{-1} est toujours continue; donc, *si l'espace E est réflexif, l'application naturelle* $\pi: E \to E^{**}$ *est un isomorphisme des espaces vectoriels topologiques E et* $E^{**} = (E^{**}, b^*)$.

Puisque maintenant tout élément de E peut être considéré aussi comme un élément de l'espace E^{**}, il est commode de remplacer la notation $f(x)$ des valeurs de la fonctionnelle $f \in E^*$ par la notation plus symétrique:

$$f(x) = (f, x). \tag{6}$$

Nous pouvons alors considérer (f, x) pour $f \in E^*$ fixé comme une fonctionnelle sur E et pour x fixé comme une fonctionnelle sur E^* (x est alors considéré comme un élément de E^{**}).

Si E est un espace normé (alors les espaces E^*, E^{**}, etc. sont aussi normés), *l'application naturelle de l'espace E dans son bidual* E^{**} *est une isométrie.*

En effet, soit x un élément de E. Désignons sa norme sur E par le symbole $\|x\|$ et la norme de son image dans E^{**} par le symbole $\|x\|_2$. Montrons que $\|x\| = \|x\|_2$. Soit f un élément non nul quelconque de E^*. Alors

$$|(f, x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|, \text{ c.-à-d. } \|x\| \geqslant \frac{|(f, x)|}{\|f\|}$$

et, puisque le premier membre de la dernière inégalité ne dépend pas de f, on a

$$\|x\| \geqslant \sup \frac{|(f, x)|}{\|f\|} = \|x\|_2.$$

D'autre part, en vertu du théorème de Hahn-Banach, pour tout $x_0 \in E$ il existe une fonctionnelle linéaire non nulle f_0 telle que

$$|(f_0, x_0)| = \|f_0\| \cdot \|x_0\|$$

(pour construire une telle fonctionnelle, il suffit de poser $f_0(x) = \alpha \neq 0$ pour les éléments de la forme $x = \alpha x_0$ et prolonger ensuite cette fonctionnelle à l'espace E tout entier, en conservant sa norme). De l'égalité (7) il résulte que

$$\| x \|_2 = \sup_{f \in E^*} \frac{|(f, x)|}{\| f \|} \geqslant \| x \|;$$

par conséquent, $\| x \| = \| x \|_2$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi donc, si E est un espace normé, il est isométrique à la variété linéaire (en général, non fermée) $\pi(E)$ de E^{**}. En identifiant E et $\pi(E)$, on peut considérer E comme une partie de E^{**}.

Du fait que pour les espaces normés l'application naturelle $\pi: E \to E^{**}$ est isométrique, il résulte que pour ces espaces *la notion de semi-réflexivité et celle de réflexivité coïncident.*

Comme le dual d'un espace normé est toujours complet, on conclut que *tout espace normé réflexif E est complet.*

Les espaces euclidiens de dimension finie et les espaces de Hilbert représentent les exemple les plus simples d'espaces réflexifs (pour ces espaces on a même $E = E^*$).

L'espace c_0 des suites convergeant vers zéro constitue un exemple d'espace non réflexif complet. En effet, comme nous l'avons montré plus haut (exemple 2, n° 3), le dual de c_0 est l'espace l_1 de toutes les suites numériques absolument sommables qui, à son tour, a pour dual l'espace m de toutes les suites bornées.

L'espace $C[a, b]$ des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ est également non réflexif. Mais nous ne donnerons ici aucune démonstration de ce fait [1]).

Un exemple d'espace réflexif ne coïncidant pas avec son dual est fourni par l'espace l_p pour $1 < p \neq 2$ (comme $l_p^* = l_q$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $l_p^{**} = l_q^* = l_p$)

E x e r c i c e. Démontrer qu'un sous-espace fermé d'un espace réflexif est aussi réflexif.

§ 3. Topologie faible et convergence faible

1. Topologie faible et convergence faible dans un espace vectoriel topologique. Considérons un espace vectoriel topologique E et l'ensemble de toutes les fonctionnelles continues sur cet espace. Si $f_1, \ldots, f_n$ est un système fini quelconque de telles fonctionnelles et ε est un réel positif, alors l'ensemble

$$\{x: |f_i(x)| < \varepsilon; \ i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{1}$$

[1] On peut démontrer même une proposition plus forte: il n'existe a u c u n espace normé dont le dual soit l'espace $C[a,b]$.

est ouvert dans E et contient le point 0, c'est-à-dire constitue un voisinage de zéro. L'intersection de deux voisinages de cette espèce contient toujours un ensemble de la forme (1); par conséquent, dans E on peut introduire une topologie, pour laquelle les ensembles de la forme (1) constitueront un système fondamental de voisinages de zéro. On l'appelle *topologie faible* de l'espace E. La topologie faible de E c'est la plus faible des topologies par rapport auxquelles toutes les fonctionnelles linéaires, continues par rapport à la topologie initiale de E, sont aussi continues.

Il est clair que tout sous-ensemble de E, ouvert au sens de la topologie faible, est ouvert aussi par rapport à la topologie initiale de l'espace E, mais la réciproque est en général fausse (les ensembles de la forme (1) ne constituent pas nécessairement un système fondamental de voisinages de zéro pour la topologie initiale). Suivant la terminologie adoptée au § 5, chap. II, cela signifie que la topologie faible de l'espace E est plus faible que sa topologie initiale. Ceci justifie le nom qu'on lui a donné.

S'il y a des fonctionnelles linéaires continues sur E en quantité suffisamment grande (par exemple, si l'espace E est normé), la topologie faible de E vérifie l'axiome de séparation de Hausdorff. Il est aisé de vérifier aussi que les opérations d'addition et de multiplication par un nombre, définies dans E, sont continues par rapport à la topologie faible de cet espace.

Même dans le cas d'un espace normé la topologie faible de E peut ne pas vérifier le premier axiome de dénombrabilité. Par conséquent, cette topologie ne peut pas être formulée, en général, en termes de suites convergentes. Tout de même, la convergence dans E, définie par cette topologie, constitue une notion importante que l'on appelle *convergence faible*. Pour être discernée de cette dernière, la convergence, définie par la topologie initiale de l'espace E (par la norme, si E est normé), est appelée *convergence forte*.

La notion de convergence faible peut être formulée de la manière suivante: une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E est dite *faiblement convergente* vers $x_0 \in E$, si pour toute fonctionnelle linéaire continue $\varphi(x)$ sur E la suite numérique $\{\varphi(x_n)\}$ converge vers $\varphi(x_0)$.

En effet, posons, pour simplifier les raisonnements, $x_0 = 0$ et supposons que $\varphi(x_n) \to 0$ pour tout $\varphi \in E^*$. Alors pour tout voisinage faible

$$U = \{x: |\varphi_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, k\}$$

du point 0 il existe N tel que $x_n \in U$ pour tous les $n \geqslant N$ (pour le trouver il suffit de choisir N_i de façon que $|\varphi_i(x_n)| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N_i$ et prendre $N = \max N_i$). Inversement, si à tout voisinage faible de zéro U on peut associer un nombre N tel que $x_n \in U$ pour tous les $n \geqslant N$, la condition $\varphi(x_n) \to 0$ pour $n \to \infty$ est évidemment remplie pour chaque $\varphi \in E^*$ fixé. Du fait que la topologie faible

de l espace E est plus faible que sa topologie forte on déduit que *toute suite fortement convergente est aussi faiblement convergente.* La réciproque est, en général, fausse (voir les exemples ci-dessous).

2. Convergence faible dans un espace normé. Examinons d'une façon plus détaillée la notion de convergence faible pour le cas d'un espace normé.

Théorème 1. *Si* $\{x_n\}$ *est une suite faiblement convergente d'un espace normé, il existe une constante* C *telle que*

$$\| x_n \| \leqslant C.$$

Autrement dit, *dans un espace normé, toute suite faiblement convergente est bornée.*

Démonstration. Considérons dans E^* les ensembles

$$A_{kn} = \{f \colon | f(x_n) | \leqslant k\}.$$

A_{kn} est fermé en vertu de la continuité de $f(x_n)$ comme fonction de f pour x_n fixé. Par conséquent, les ensembles

$$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}$$

sont aussi fermés (comme intersections de fermés). Il est aisé de voir que

$$E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Puisque E^* est complet, d'après le théorème de Baire (§ 3, chap. II) il existe un ensemble A_{k_0}, dense dans une boule $S[f_0, \varepsilon]$. Mais A_{k_0} est fermé; c'est pourquoi

$$S[f_0, \varepsilon] \subset A_{k_0}.$$

D'après la définition de A_{k_0}, la suite $\{x_n\}$ est bornée dans la boule $S[f_0, \varepsilon]$. Cela implique qu'elle est bornée aussi dans la boule $S[0, \varepsilon] = \{g \colon \| g \| \leqslant \varepsilon\}$. En effet, si $g \in S[0, \varepsilon]$, alors $f_0 + g \in S[f_0, \varepsilon]$. Or, $(g, x_n) = (f_0 + g, x_n) - (f_0, x_n)$ et les nombres (f_0, x_n) forment une suite bornée, grâce à la convergence faible de la suite $\{x_n\}$. Mais, comme l'application naturelle de E dans E^{**} est isométrique, si $| (g, x_n) | \leqslant C$ pour tous les $g \in S$ [0, ε , on a

$$\| x_n \| \leqslant \frac{C}{\varepsilon},$$

c'est-à-dire les normes $\| x_n \|$ forment un ensemble borné.

Le théorème est démontré.

Remarque. Pour démontrer que la suite $\{x_n\}$ est bornée en norme nous avons utilisé seulement le fait que la suite numérique (f, x_n) est bornée pour chaque $f \in E^*$. Donc, si la suite $\{x_n\}$ de E est telle que la suite numérique (f, x_n) est bornée pour tout $f \in E^*$, il existe une constante C telle que $\| x_n \| \leqslant C$. Ce résultat peut être généralisé: *dans un espace normé E tout ensemble Q faiblement borné* (c'est-à-dire borné au sens de la topologie faible) *est aussi fortement borné* (c'est-

à-dire contenu dans une boule). En effet, supposons qu'il existe une suite $\{x_n\} \subset \subset Q$ telle que $\|x_n\| \to \infty$ quand $n \to \infty$. Comme l'ensemble Q est faiblement borné, il en est de même de l'ensemble $\{x_n\}$, c'est-à-dire cet ensemble est absorbé par tout voisinage faible de zéro; en particulier, pour tout $f \in E^*$ il existe N tel que

$$\{x_n\} \subset N \{x: |(f, x)| < 1\}, \text{ d'où } |(f, x_n)| < N$$

pour tous les n. Mais, en vertu de la remarque ci-dessus, cela contredit l'hypothèse que $\|x_n\| \to \infty$. Si l'on tient compte du fait qu'un ensemble Q est faiblement borné si et seulement si toute fonctionnelle linéaire continue est bornée dans Q, on aboutit au résultat suivant: *pour qu'un sous-ensemble Q d'un espace normé soit borné, il faut et il suffit que toute fonctionnelle $f \in E^*$ soit bornée dans Q.*

Le théorème qui suit est souvent utile, lorsqu'il s'agit de vérifier effectivement, si une suite donnée quelconque est faiblement convergente.

Théorème 2. *Une suite $\{x_n\}$ d'éléments d'un espace normé E converge faiblement vers $x \in E$, si:*

1) *les nombres $\|x_n\|$ sont majorés dans leur ensemble par une constante M;*

2) *$f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in \Delta$, où Δ est un ensemble dont l'enveloppe linéaire est partout dense dans E^*.*

Démonstration. De la condition 2) et la définition des opérations sur les fonctionnelles linéaires il résulte que si φ est une combinaison linéaire d'éléments de Δ, alors

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x).$$

Soit φ un élément arbitraire de E^* et soit $\{\varphi_k\}$ une suite de combinaisons linéaires d'éléments de Δ convergeant vers φ. Montrons que $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Soit M tel que

$$\|x_n\| \leqslant M \ (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{et} \quad \|x\| \leqslant M.$$

Evaluons la différence $|\varphi(x_n) - \varphi(x)|$. Comme $\varphi_k \to \varphi$, à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un nombre K tel que $\|\varphi - \varphi_k\| > \varepsilon$ pour tous les $k \geqslant K$. On a donc

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leqslant |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + \\ + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon M + \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)|.$$

Mais, par hypothèse, $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(x)$, lorsque $n \to \infty$. Donc, $\varphi(x_n) - \varphi(x) \to 0$ pour $n \to \infty$, quel que soit $\varphi \in E^*$.

Exemples. On se propose d'éclaircir la signification de la notion de convergence faible dans quelques espaces concrets.

1. *La convergence faible dans l'espace euclidien de dimension finie* $\mathbf{R}^n$. Elle coïncide avec la convergence forte. En effet, soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée quelconque de l'espace $\mathbf{R}^n$ et soit $\{x_k\}$ une suite de $\mathbf{R}^n$, faiblement convergente vers l'élément x.

Soient encore

$$x_k = x_k^{(1)} e_1 + \ldots + x_k^{(n)} e_n,$$

et

$$x = x^{(1)} e_1 + \ldots + x^{(n)} e_n.$$

Alors

$$x_k^{(1)} = (x_k, e_1) \to (x_1, e_1) = x^{(1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_k^{(n)} = (x_k, e_n) \to (x, e_n) = x^{(n)},$$

c'est-à-dire la suite $\{x_n\}$ converge en coordonnées vers x. Mais alors

$$\rho(x_k, x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x^i)^2\Big)^{1/2} \to 0,$$

c'est-à-dire la suite $\{x_n\}$ converge fortement vers x. Comme la convergence forte implique toujours la convergence faible, l'équivalence de ces deux convergences dans $\mathbf{R}^n$ est démontrée.

2. *La convergence faible dans* l_2. Pour qu'une suite bornée $\{x_n\}$ soit faiblement convergente vers x, il suffit que les conditions suivantes soient remplies:

$$(x_k, e_i) = x_k^{(i)} \to x^i = (x, e_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

où

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots). \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots$$

En effet, les combinaisons linéaires des éléments e_i sont partout denses dans l'espace l_2 (qui coïncide, comme nous l'avons vu, avec son dual). C'est pourquoi notre affirmation découle du théorème 2.

Ainsi, la convergence faible d'une suite bornée $\{x_k\}$ dans l_2 signifie que la suite numérique $x_k^{(i)}$ des coordonnées de ces vecteurs converge pour chaque $i = 1, 2, \ldots$ Autrement dit, la convergence faible coïncide avec la convergence en coordonnées (à condition que la suite soit bornée).

Il est aisé de voir que dans l_2 la convergence faible ne coïncide pas avec la convergence forte. En effet, montrons que la suite $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ dans l_2 converge faiblement vers 0. Toute fonctionnelle linéaire f sur l_2 peut être représentée par le produit scalaire $f(x) = (x, a)$ du vecteur $x \in l_2$ par un vecteur fixé $a = (a_1, a_2, \ldots)$. Par conséquent,

$$f(e_n) = a_n$$

et, puisque $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $a \in l_2$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0$$

pour toute fonctionnelle linéaire sur l_2.

Pourtant, la suite $\{e_n\}$ ne converge fortement vers aucune limite.

Exercices. 1. Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H convergeant faiblement vers un élément x et telle que $\|x_n\| \to \|x\|$ pour $n \to \infty$. Démontrer que dans ces conditions la suite $\{x_n\}$ converge fortement vers x, c'est-à-dire que $\|x_n - x\| \to 0$.

2. Démontrer que l'affirmation de l'exercice 1 demeure vraie, si l'on remplace la condition $\|x_n\| \to \|x\|$ par la condition $\|x_n\| \leqslant \|x\|$ pour tous les n, ou par la condition $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant \|x\|$.

3. Soient H un espace de Hilbert (séparable), et Q un sous-ensemble borné de H. Alors la topologie de Q, induite par la topologie faible de l'espace H, peut être définie à l'aide d'une métrique.

4. Démontrer que tout sous-ensemble fermé convexe d'un espace de Hilbert est fermé pour la topologie faible (en particulier, tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est faiblement fermé). Donner un exemple d'ensemble fermé dans un espace de Hilbert qui ne soit pas faiblement fermé.

3. *La convergence faible dans l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues.* Soit $\{x_n(t)\}$ une suite de fonctions de $C[a, b]$ convergeant faiblement vers une fonction $x(t)$. La suite $\{x_n(t)\}$ est bornée par rapport à la norme de $C[a, b]$. Parmi les fonctionnelles définies sur $C[a, b]$ considérons, en particulier, les fonctionnelles δ_{t_0} dont chacune fait correspondre à toute fonction sa valeur en un point fixé t_0 (cf. exemple 4, n° 2, § 1). Pour chacune des fonctionnelles δ_{t_0} la condition

$$\delta_{t_0}(x_n) \to \delta_{t_0}(x)$$

signifie que

$$x_n(t_0) \to x(t_0).$$

Donc, si la suite $\{x_n(t)\}$ est faiblement convergente, elle est:

1) uniformément bornée, c'est-à-dire $|x_n(t)| \leqslant C$ pour tous les $n = 1, 2, \ldots$ et $a \leqslant t \leqslant b$;

2) convergente en chaque point.

On peut montrer que ces deux conditions sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes pour que la suite $\{x_n(t)\}$ soit faiblement convergente dans $C[a, b]$. Autrement dit, la convergence faible dans $C[a, b]$ coïncide avec la convergence ponctuelle (à condition que la suite soit bornée).

Il est clair que cette convergence ne coïncide pas avec la convergence au sens de la norme de $C[a, b]$, c'est-à-dire avec la convergence uniforme des fonctions continues. (Donner un exemple illustrant ce fait.)

3. Topologie faible et convergence faible dans l'espace dual. Au n° 4 du paragraphe précédent nous avons introduit dans l'espace dual E^* une topologie, que nous avons appelée topologie forte, en prenant pour système de voisinages de zéro la famille des ensembles de la forme

$$U_{\varepsilon, A} = \{f : |f(x)| < \varepsilon, \quad x \in A\},$$

où A est un ensemble borné quelconque de E et ε est un réel positif arbitraire. Si au lieu de tous les ensembles bornés on considère ici tous les sous-ensembles f i n i s $A \subset E$, on obtient la topologie, dite *topologie faible de l'espace dual* E^*. Comme tout ensemble fini $A \subset E$ est en même temps borné (la réciproque est, en général, fausse), il est clair que la topologie faible de l'espace E^* est plus faible que sa topologie forte. En général, ces deux topologies ne coïncident pas.

La topologie faible, introduite dans E^*, définit dans cet espace une convergence dite *convergence faible des fonctionnelles.* La convergence faible des fonctionnelles linéaires est une notion importante qui joue un rôle considérable dans beaucoup de questions de l'analyse fonctionnelle, et en particulier, dans la théorie des distributions, dont il sera question au paragraphe suivant.

La convergence faible d'une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctionnelles linéaires coïncide, évidemment, avec la convergence de cette suite pour chaque élément f i x é de l'espace E. En d'autres termes, la suite $\{\varphi_n\}$ est dite *faiblement convergente* vers $\varphi \in E^*$, si pour chaque $x \in E$ on a

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x).$$

Il est clair que dans l'espace dual, comme dans l'espace initial, toute suite, convergente pour la topologie forte, est aussi faiblement convergente (mais pas inversement).

Soit E (donc, E^* aussi) un espace de Banach. On a le théorème suivant, analogue au théorème 1.

T h é o r è m e 1*. *Si* $\{f_n\}$ *est une suite faiblement convergente de fonctionelles linéaires sur un espace de Banach, il existe une constante* C *telle que*

$$\| f_n \| \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Autrement dit, *toute suite faiblement convergente d'éléments du dual d'un espace de Banach est bornée en norme.*

La démonstration ne diffère en rien de celle du théorème 1.

Le théorème suivant est parfaitement analogue au théorème 2.

T h é o r è m e 2*. *Une suite de fonctionnelles linéaires* $\{\varphi_n\}$ *de* E^* *converge faiblement vers* $\varphi \in E^*$, *si :*

1) *cette suite est bornée, c'est-à-dire*

$$\| \varphi_n \| \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

2) *la relation* $(\varphi_n, x) \to (\varphi, x)$ *est vérifiée pour tous les* x *appartenant à un ensemble dont l'enveloppe linéaire est partout dense dans* E.

La démonstration est la même que celle du théorème 2.

Considérons un e x e m p l e. Soit E l'espace des fonctions continues $C[a, b]$ [1]) et soit

$$\varphi(x) = x(0),$$

ce qui signifie que φ est la fonction δ (cf. § 1, nº 2, exemple 4). Soit, d'autre part, $\{\varphi_n(t)\}$ une suite de fonctions continues vérifiant les conditions suivantes:

1) $$\varphi_n(t) = 0 \quad \text{pour} \quad |t| > \frac{1}{n}, \quad \varphi_n(t) \geqslant 0;$$

2) $$\int_a^b \varphi_n(t)\, dt = 1.$$

Alors pour toute fonction $x(t)$, continue sur $[a, b]$, on obtient à l'aide du théorème de la moyenne:

$$\int_a^b \varphi_n(t)\, x(t)\, dt = \int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(t)\, x(t)\, dt \to x(0) \quad \text{pour } n \to \infty.$$

L'expression

$$\int_a^b \varphi_n(t)\, x(t)\, dt$$

est une fonctionnelle linéaire sur $C[a, b]$. Ainsi, la fonction δ peut être représentée comme la limite, au sens de la convergence faible des fonctionnelles linéaires sur $C[a, b]$, d'une suite de fonctions « habituelles ».

R e m a r q u e. L'espace E^* des fonctionnelles linéaires sur un espace E admet deux interprétations: ou bien il est considéré comme le dual de l'espace initial E, ou bien E^* est considéré comme espace de base et alors on lui attache son dual E^{**}. Cela signifie que nous pouvons introduire dans E^* la topologie faible de deux manières différentes: ou bien comme dans l'espace des fonctionnelles, en définissant les voisinages dans E^* à l'aide des sous-ensembles finis de E, ou bien comme dans l'espace de base, à l'aide de l'espace dual E^{**}. Dans le cas d'un espace réflexif cela revient, bien sûr, au même. Si, par contre, l'espace E n'est pas réflexif, ce sont deux topologies différentes sur E^*. Pour éviter toute ambiguïté, la topologie faible, définie sur l'espace de base (c'est-à-dire la topologie sur E^*, définie à l'aide de E^{**}), sera appelée simplement *topologie faible*, tandis que la topologie faible sur l'espace des fonctionnelles (c'est-à-dire la topologie sur E^*, définie à l'aide de E) sera appelée *topologie *-faible*. Il est évident que la topologie *-faible de l'espace E^* est plus faible

[1]) Nous considérons le point 0 comme appartenant à $[a, b]$. Au lieu de $t = 0$ on pourrait considérer, bien sûr, n'importe quel autre point.

que la topologie faible de E (c'est-à-dire la topologie faible contient au moins autant d'ensembles ouverts que la topologie $*$-faible).

4. Ensembles bornés dans l'espace dual. Dans beaucoup d'applications de la notion de convergence faible des fonctionnelles linéaires un rôle important revient au théorème suivant.

Théorème 3. *Si E est un espace vectoriel normé séparable, toute suite bornée de fonctionnelles linéaires continues sur E contient une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. Choisissons dans E un ensemble dénombrable et partout dense $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Si $\{\varphi_n\}$ est une suite bornée (en norme) de fonctionnelles linéaires sur E, la suite numérique

$$\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n(x_1),\ \ldots$$

est bornée. C'est pourquoi de $\{\varphi_n\}$ on peut extraire une sous-suite

$$\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(1)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)},\ \ldots$$

telle que la suite numérique

$$\varphi_1^{(1)}(x_1),\ \varphi_2^{(1)}(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)}(x_1),\ \ldots$$

soit convergente. Ensuite, de $\{\varphi_n^{(1)}\}$ on peut extraire une sous-suite

$$\varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)},\ \ldots$$

telle que la suite numérique

$$\varphi_1^{(2)}(x_2),\ \varphi_2^{(2)}(x_2),\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)}(x_2),\ \ldots$$

soit convergente. En répétant ce procédé, nous obtiendrons un système de suites

$$\begin{array}{l} \varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(1)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)},\ \ldots, \\ \varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(dont chacune est contenue dans la précédente) tel que la suite $\{\varphi_n^{(k)}\}$ est convergente en chacun des points $x_1, x_2, \ldots, x_k$. En prenant la « diagonale »

$$\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(n)},\ \ldots,$$

on obtient une sous-suite de fonctionnelles linéaires telle que la suite numérique

$$\varphi_1^{(1)}(x_n),\ \varphi_2^{(2)}(x_n),\ \ldots$$

est convergente pour tous les n. Mais alors (d'après le théorème 2*) la suite $\varphi_1^{(1)}(x), \varphi_2^{(2)}(x), \ldots$ est convergente aussi pour tout $x \in E$.

Le théorème est démontré.

Ce théorème signifie, compte tenu du théorème 1*, que dans l'espace E^*, dual d'un espace de Banach séparable, les ensembles bornés, et ceux-là seulement, sont dénombrablement précompacts pour la topologie $*$-faible. Montrons qu'en réalité ici il y a précompacité et non seulement précompacité dénombrable.

Tout d'abord démontrons le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit S^* la boule unité fermée de l'espace E^*, dual d'un espace normé séparable E. La topologie, induite dans S^* par la topologie $*$-faible de l'espace E^*, peut être définie à l'aide de la métrique*

$$\rho(f, g) = \sum 2^{-n} |(f-g, x_n)|, \tag{2}$$

où $\{x_n\}$ est un ensemble dénombrable fixé quelconque, partout dense dans la boule unité S de l'espace E.

Démonstration. Il est clair que la fonction $\rho(f, g)$ jouit de toutes les propriétés de la distance ; en outre, elle est invariante par rapport aux translations:

$$\rho(f+h, g+h) = \rho(f, g).$$

Par conséquent, il suffit de vérifier que la famille de voisinages de zéro, définie dans S^* par la topologie faible de l'espace E^*, est équivalente à la famille de voisinages de zéro, définie dans S^* par la distance (2); autrement dit, il suffit de vérifier que a) toute « boule »

$$Q_\varepsilon = \{f : \rho(f, 0) < \varepsilon\}$$

contient l'intersection de S^* et d'un certain voisinage faible de zéro dans E^* et que b) tout voisinage faible de zéro dans E^* contient l'intersection de S^* et d'un certain Q_ε.

Choisissons N de façon que $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$ et considérons le voisinage faible de zéro

$$V = V_{x_1, \ldots, x_N; \varepsilon/2} = \left\{ f : |(f, x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \right\}.$$

Alors, si $f \in S^* \cap V$, on a

$$\rho(f, 0) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |(f, x^n)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |(f, x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{N} 2^{-n} < \varepsilon,$$

c'est-à-dire $S^* \cap V \subset Q_\varepsilon$. Ceci prouve l'affirmation a). Démontrons l'affirmation b). Soit

$$U = U_{y_1, \ldots, y_m; \delta} = \{f : |(f, y_k)| < \delta, \quad k = 1, 2, \ldots, m\}$$

un voisinage $*$-faible de zéro quelconque dans E^*. On peut supposer que $\| y_k \| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$; comme l'ensemble $\{x_n\}$ est partout dense dans S, il existe des numéros $n_1, \ldots, n_m$ tels que $\| y_k - x_{n_k} \| < \frac{\delta}{2}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Soient $N = \max(n_1, \ldots, n_m)$, et $\varepsilon = 2^{-(N+1)}\delta$. Alors, pour $f \in S^* \cap Q_\varepsilon$, des inégalités

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |(f, x_n)| < \varepsilon$$

on obtient que $|(f, x_n)| < 2^n \varepsilon$; en particulier,

$$|(f, x_{n_k})| < 2^{n_k}\varepsilon \leqslant 2^N \varepsilon = \frac{\delta}{2}.$$

Par conséquent, pour tous les $k = 1, 2, \ldots, m$ on a

$$|(f, y_k)| \leqslant |(f, x_{n_k})| + |(f, y_k - x_{n_k})| < \frac{\delta}{2} + \| f \| \cdot \| y_k - x_{n_k} \| < \delta.$$

Ainsi donc, $S^* \cap Q_\varepsilon \subset U$.

Le théorème est démontré.

Il est clair que ce résultat s'étend automatiquement à toute boule, donc à tout sous-ensemble borné $M \subset E^*$.

Nous avons montré (théorème 3) que de toute suite bornée d'éléments de E^* on peut extraire une sous-suite $*$-faiblement convergente. Autrement dit, dans le dual E^* d'un espace vectoriel normé séparable, muni de la topologie $*$-faible, tout ensemble borné M est dénombrablement précompact. Mais, en vertu du dernier théorème, tout ensemble de ce type constitue un espace topologique métrisable. Or, pour les espaces métriques les notions de compacité et de compacité dénombrable coïncident. On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 3*. *Tout ensemble borné M de l'espace E^*, dual d'un espace normé séparable, est précompact au sens de la topologie $*$-faible de l'espace E^*.*

Montrons maintenant que si E est un espace vectoriel normé et séparable, toute boule fermée de l'espace (E^*, b) est fermée pour la topologie $*$-faible de l'espace E^*.

Comme dans l'espace E^* toute translation transforme les ensembles fermés (relativement à la topologie $*$-faible) en ensembles fermés, il suffit de démontrer que toute boule de la forme $S_c^* = \{f: \| f \| \leqslant c\}$ est fermée pour la topologie $*$-faible. Soit $f_0 \notin S_c^*$. D'après la définition de la norme d'une fonctionnelle, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\| x \| = 1$, $f_0(x) = \alpha > c$. Alors l'ensemble $U = \left\{ f: f(x) > \frac{\alpha + c}{2} \right\}$ est un voisinage $*$-faible de la fonctionnelle f_0 ne contenant aucun élément de la boule S_c^*; par conséquent, la boule S_c^* est fermée pour la topologie $*$-faible.

De l'assertion démontrée et du théorème 3* on déduit le théorème suivant.

T h é o r è m e 5. *Dans l'espace dual d'un espace normé séparable toute boule fermée est compacte au sens de la topologie *-faible.*

Les résultats exposés plus haut sur les ensembles bornés dans l'espace dual peuvent être étendus des espaces normés aux espaces localement convexes arbitraires. A ce sujet voir, par exemple, [42].

§ 4. Distributions

1. Extension de la notion de fonction. En analyse on est souvent amené à considérer le terme « fonction » avec un degré de généralité qui varie selon les questions que l'on étudie. Dans certains cas on ne considère que des fonctions continues, dans d'autres cas on suppose qu'il s'agit des fonctions dérivables une ou plusieurs fois, etc. Mais il y a des cas, où la notion classique de fonction, même traitée dans le sens le plus général, c'est-à-dire comme une loi arbitraire faisant correspondre à toute valeur de x appartenant au domaine de définition de cette fonction un nombre $y = f(x)$, se trouve insuffisante. En voici deux exemples importants.

1) Il est commode de définir la distribution des masses le long d'une droite à l'aide de la densité de cette distribution. Cependant, si sur cette droite il y a des points munis de masses positives, la densité d'une telle distribution ne peut, certainement, être décrite par aucune fonction « habituelle ».

2) En appliquant les méthodes de l'analyse mathématique à certains problèmes, on se heurte parfois à l'impossibilité d'effectuer telle ou telle opération ; par exemple, une fonction n'ayant pas de dérivée (en certains points ou même partout) ne peut pas être dérivée, si par sa dérivée on sous-entend une fonction « habituelle ». Les difficultés de ce genre pourraient, bien sûr, être évitées, par exemple, en limitant l'étude aux fonctions analytiques. Mais une telle restriction de l'ensemble des fonctions admissibles est, dans beaucoup de questions, fort indésirable.

Il se trouve pourtant que les difficultés de cette sorte peuvent être surmontées non au moyen d'une restriction de la notion de fonction, mais au moyen d'une extension considérable de cette notion, en introduisant les fonctions dites généralisées ou distributions. Les définitions correspondantes seront formulées à partir de la notion d'espace dual, considérée plus haut.

Soulignons encore une fois que l'introduction des distributions est due à des problèmes tout à fait concrets et non à la simple tendance d'étendre le plus possible les notions de l'analyse. En physique, d'ailleurs, on a commencé à utiliser les distributions depuis assez longtemps, en tout cas avant qu'on ait construit la théorie mathématique rigoureuse des distributions.

Avant de passer aux définitions exactes, exposons l'idée principale de la construction.

Soit f une fonction donnée sur la droite numérique, intégrable sur tout intervalle fini, et soit φ une fonction continue, nulle en dehors d'un certain intervalle (dans la suite les fonctions de cette sorte seront dites *à support borné*). A l'aide de la fonction donnée f, à toute fonction φ de ce type on peut associer un nombre

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

(en réalité, puisque la fonction $\varphi(x)$ est à support borné, l'intégrale est prise sur un intervalle fini). Autrement dit, la fonction f peut être considérée comme une fonctionnelle (linéaire, en vertu des propriétés fondamentales de l'intégrale) sur un espace de fonctions à support borné. Cependant, les fonctionnelles de la forme (1) ne sont pas les seules que l'on puisse définir sur un tel espace ; en associant, par exemple, à chaque fonction φ sa valeur au point $x = 0$, nous obtiendrons une fonctionnelle linéaire qui ne peut pas être mise sous la forme (1). Donc, les fonctions $f(x)$ appartiennent effectivement à un ensemble plus vaste contenant toutes les fonctionnelles linéaires sur un espace de fonctions à support borné.

L'espace des fonctions φ peut être choisi de façons différentes ; on peut prendre, par exemple, l'espace des fonctions continues à support borné. Pourtant, comme on le verra plus tard, il est raisonnable de soumettre les fonctions admissibles φ non seulement aux conditions d'être continues et à support borné, mais encore à des conditions assez restrictives de différentiabilité.

2. Espace des fonctions de base. Passons maintenant aux définitions exactes. Considérons sur la droite numérique l'ensemble K de toutes les fonctions à support borné φ admettant des dérivées continues de tout ordre. Les fonctions appartenant à K forment un espace vectoriel (avec les opérations habituelles d'addition des fonctions et de leur multiplication par des nombres). Dans cet espace on ne peut pas introduire une norme qui serait compatible avec la théorie exposée plus bas, mais on peut y introduire de façon naturelle la notion de convergence.

On dit qu'une suite $\{\varphi_n\}$ d'éléments de K *converge vers une fonction* $\varphi \in K$, si : 1) il existe un intervalle en dehors duquel toutes les fonctions φ_n sont nulles [1]; 2) la suite $\{\varphi_n^{(k)}\}$ des dérivées d'ordre k [2] ($k = 0, 1, 2, \ldots$) converge uniformément sur cet intervalle vers

---

[1]) L'intervalle en dehors duquel la fonction φ est nulle peut être différent pour des fonctions différentes $\varphi \in K$.

[2]) Par dérivée d'ordre 0 on sous-entend, comme d'habitude, la fonction elle-même.

$\varphi^{(k)}$. (L'uniformité de la convergence par rapport à l'ensemble des k n'est pas exigée.)

L'espace vectoriel K avec la convergence que l'on vient de définir sera appelé *espace de base* et ses éléments seront appelés *fonctions de base*.

On peut décrire sans difficulté la topologie de K à laquelle est subordonnée la convergence définie dans K. Cette topologie est engendrée par la famille de voisinages de zéro dont chacun est défini par un ensemble fini de fonctions continues positives $\gamma_0, \ldots, \gamma_m$ de sorte qu'il est constitué par les fonctions de K qui vérifient pour tous les x les inégalités

$$|\varphi(x)| < \gamma_0(x), \ldots, |\varphi^{(m)}(x)| < \gamma_m(x).$$

La vérification du fait que la convergence dans K définie plus haut, est bien subordonnée à cette topologie, est laissée au lecteur.

Exercice. Désignons par K_m le sous-espace de l'espace K, formé par les fonctions $\varphi \in K$, nulles en dehors du segment $[-m, m]$. L'espace K_m peut être muni d'une structure d'espace dénombrablement normé, en posant

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |x| \leqslant m}} |\varphi^k(x)|, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Vérifier que la topologie (ainsi que la convergence des suites) de l'espace K_m, engendrée par cette famille de normes, coïncide avec la topologie (respectivement, la convergence), induite dans K_m par la topologie (la convergence) de l'espace K, décrite plus haut. Il est clair que $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m \subset \ldots$ et $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$. Montrer que l'ensemble $Q \subset K$ est borné par rapport à la topologie définie sur K si et seulement s'il existe un nombre m tel que Q est un sous-ensemble borné de l'espace dénombrablement borné K_m. Soit T une fonctionnelle linéaire sur l'espace K; démontrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes: (a) la fonctionnelle T est continue par rapport à la topologie de l'espace K; (b) la fonctionnelle T est bornée sur tout ensemble borné $Q \subset K$; (c) si $\varphi_n \in K$ et $\varphi_n \to 0$ (au sens de la convergence des suites, définie dans K) alors $T(\varphi_n) \to 0$; (d) pour chaque m la restriction T_m de la fonctionnelle T au sous-espace $K_m \subset K$ est une fonctionnelle continue sur K_m.

3. Distributions.

Définition 1. On appelle *distribution* ou *fonction généralisée* (donnée sur la droite $-\infty < x < \infty$) toute fonctionnelle continue $T(\varphi)$ définie sur l'espace de base K. La continuité de la fonctionnelle doit être comprise ici en ce sens que $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$, si la suite φ_n converge vers φ dans l'espace de base K.

Remarquons tout d'abord que chaque fonction $f(x)$, intégrable sur tout intervalle fini, engendre une distribution. En effet, l'expression

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur K. Dans la suite, les distributions de cette forme seront appelées distributions *régulières*;

toutes les autres, c'est-à-dire celles qu'on ne peut pas mettre sous la forme (2), seront dites *singulières*.

Considérons quelques exemples de distributions singulières.

1. « La fonction δ »:

$$T(\varphi) = \varphi(0).$$

C'est une fonctionnelle linéaire continue sur K, donc, conformément à la terminologie introduite ci-dessus, une distribution. Cette fonctionnelle s'écrit d'habitude sous la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

où par $\delta(x)$ on sous-entend « la fonction », nulle pour tous les $x \neq 0$ et infinie au point $x = 0$, de sorte que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

Nous avons déjà considéré la fonction δ au § 1 comme une fonctionnelle sur l'espace des fonctions continues, définies sur un segment. Mais en considérant la fonction δ comme fonctionnelle sur K, on obtient certains avantages; par exemple, dans ce cas on peut introduire la notion de dérivée de la fonction δ.

2. « La fonction δ translatée ». Soit

$$T(\varphi) = \varphi(a).$$

Il est naturel d'écrire cette fonctionnelle, par analogie avec (3), sous la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

3. « La dérivée de la fonction δ ». A tout $\varphi \in K$ on fait correspondre le nombre $-\varphi'(0)$. Un peu plus bas nous verrons pourquoi il est naturel de considérer cette fonctionnelle comme la dérivée de la fonctionnelle du premier exemple.

4. Considérons la fonction $1/x$. Elle n'est intégrable sur aucun intervalle contenant le point zéro. Cependant, pour chaque $\varphi \in K$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\frac{1}{x}\,dx$$

existe et est finie au sens de la valeur principale. En effet,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\frac{1}{x}\,dx = \int_{a}^{b} \varphi(x)\frac{1}{x}\,dx = \int_{a}^{b} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{b}^{a} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Ici (a, b) est l'intervalle en dehors duquel la fonction φ s'annule. La première intégrale du second membre existe au sens habituel (comme intégrale d'une fonction continue) ; quant à la deuxième, elle existe au sens de la valeur principale. Ainsi, $1/x$ définit une fonctionnelle sur K, c'est-à-dire une distribution. On peut démontrer qu'aucune des distributions, considérées dans les exemples 1-4, n'est régulière (c'est-à-dire aucune d'elles ne peut s'écrire sous la forme (2), quelle que soit la fonction localement intégrable f).

4. Opérations sur les distributions. Pour les distributions, c'est-à-dire pour les fonctionnelles linéaires continues sur K, sont définies les opérations d'addition et de multiplication par un nombre. En outre, il est évident que l'addition des distributions régulières, c'est-à-dire des fonctions « habituelles » sur la droite numérique, comme addition des distributions (c'est-à-dire des fonctionnelles linéaires), coïncide avec l'addition habituelle des fonctions. Il en est de même pour la multiplication par un nombre.

Introduisons dans l'espace des distributions l'opération de passage à la limite. Nous dirons qu'une suite de distributions $\{f_n\}$ converge vers f, si pour chaque $\varphi \in K$ on a

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Autrement dit, la convergence d'une suite de distributions est définie comme la convergence de cette suite pour tout élément de K. L'espace des distributions K avec cette convergence sera désigné par K^*.

Si α est une fonction indéfiniment dérivable, il est naturel de définir le produit de α par une distribution f au moyen de la formule

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$$

(l'expression qui figure au second membre de cette égalité a un sens, car $\alpha\varphi \in K$). Toutes ces opérations, c'est-à-dire l'addition, la multiplication par un nombre et la multiplication par une fonction indéfiniment dérivable, sont continues.

Nous n'introduisons pas la multiplication de deux distributions. On peut montrer qu'il est impossible de définir une telle opération, si l'on exige qu'elle soit continue et que dans le cas des distributions régulières elle coïncide avec la multiplication habituelle des fonctions

Introduisons maintenant l'opération de dérivation des distributions et considérons ses propriétés.

Soit d'abord T une fonctionnelle sur K, définie par une fonction continûment dérivable f:

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Il est naturel d'appeler dérivée de T la fonctionnelle $\frac{dT}{dx}$, définie par la formule

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

En intégrant par parties et en tenant compte du fait que la fonction de base φ s'annule en dehors d'un intervalle fini, on obtient

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx\,;$$

ainsi, nous avons obtenu pour $\frac{dT}{dx}$ une expression, où la dérivée de la fonction f n'intervient pas. Ces considérations nous donnent l'idée d'adopter la définition suivante:

Définition 2. On appelle *dérivée* $\frac{dT}{dx}$ d'une distribution T la fonctionnelle, définie par la formule

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = -T(\varphi').$$

Il est clair que la fonctionnelle définie par cette formule est linéaire et continue, c'est-à-dire qu'elle est une distribution. De manière analogue on définit la dérivée seconde d'une distribution, ainsi que les dérivées d'ordre supérieur.

La distribution étant désignée par le symbole f, nous allons désigner sa dérivée (au sens de la définition qui vient d'être donnée) par le symbole f'.

De la définition de la dérivée d'une distribution on déduit immédiatement les propositions suivantes:

1. *Toute distribution admet des dérivées de tout ordre.*

2. *Si une suite de distributions* $\{f_n\}$ *converge vers une distribution* f (au sens de la convergence des distributions, définie plus haut), *la suite des dérivées* $\{f'_n\}$ *converge vers la dérivée* f' *de la distribution limite. Il en est de même pour les dérivées d'ordre supérieur.*

Ceci équivaut à dire que *toute série convergente de distributions peut être dérivée terme à terme autant de fois que l'on veut.*

Considérons quelques exemples.

1. D'après ce qu'on vient de dire, il est clair que si f est une distribution régulière (c'est-à-dire une fonction « véritable » admettant une dérivée continue (ou continue par morceaux), alors sa dérivée, comme dérivée de distribution, coïncide avec sa dérivée au sens habituel.

2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Cette fonction, dite *fonction de Heaviside*, définit la fonctionnelle linéaire

$$(f, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx.$$

Conformément à la définition de la dérivée d'une distribution, on a

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0)$$

(car φ s'annule à l'infini). Donc, la dérivée de la fonction de Heaviside (5) est la fonction δ.

3. D'après les exemples 1 et 2, il est clair que si f est une fonction ayant aux points $x_1, x_2, \ldots$ des sauts respectivement égaux à h_1, $h_2, \ldots$ et dérivable (au sens habituel) dans tous les autres points, alors sa dérivée (comme dérivée de distribution) est égale à la somme de sa dérivée habituelle f' (aux points où elle existe) et d'une expression de la forme.

$$\sum_i h_i \delta(x - x_i).$$

4. En appliquant la définition de la dérivée d'une distribution à la fonction δ, on voit que sa dérivée est une fonctionnelle qui pour toute fonction de K prend la valeur $-\varphi'(0)$. Or, c'est justement la fonctionnelle que nous avons déjà appelée « dérivée de la fonction δ ».

5. Considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{6}$$

Sa somme est une fonction périodique de période 2π définie sur le segment $[-\pi, \pi]$ par les formules

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{pour } 0 < x \leqslant \pi, \\ -\dfrac{\pi + x}{2} & \text{pour } -\pi \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

La dérivée de cette fonction, comme dérivée de distribution, est égale à

$$-\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{7}$$

C'est une distribution (en l'appliquant à n'importe quelle fonction à support borné, nous obtiendrons chaque fois seulement un nombre fini de termes non nuls). D'autre part, en dérivant la série (6) terme à terme, on obtient la série divergente suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

Cependant, au sens de la convergence des distributions cette série est convergente (précisément vers l'expression (7)). Ainsi, la notion de distribution permet d'attribuer un sens bien déterminé à la somme d'une série qui, au sens habituel, est divergente. Il en est de même pour beaucoup d'intégrales divergentes. Cette circonstance est assez fréquente dans la théorie quantique des champs et dans certains autres domaines de la physique théorique. Cette situation peut, d'ailleurs, se présenter même lors de la résolution de problèmes élémentaires de la physique mathématique par la méthode de Fourier. Ainsi, par exemple, la résolution de l'équation de la corde vibrante $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ conduit à des séries trigonométriques admettant de dérivées secondes par rapport à x et à t seulement au sens de la théorie des distributions et donc satisfaisant à cette équation aussi seulement au sens de cette théorie.

5. Suffisance de l'ensemble des fonctions de base. Nous avons défini les distributions comme fonctionnelles linéaires sur un espace, notamment sur l'espace K des fonctions indéfiniment dérivables à support borné. Pourtant, on aurait pu choisir l'espace de base d'une autre façon. Examinons les raisons qui nous ont amené à choisir K comme espace des fonctions de base. Ces raisons sont valables aussi dans d'autres cas. En imposant aux fonctions de K les conditions restrictives d'être à support borné et indéfiniment dérivables, nous obtenons, premièrement, des distributions en grande quantité (car la restriction de l'espace de base entraîne, évidemment, l'élargissement de l'espace dual) et, deuxièmement, une plus grande liberté en ce qui concerne l'application aux distributions des opérations fondamentales de l'analyse (passage à la limite, dérivation). En même temps, l'espace des fonctions de base K n'est pas tout à fait pauvre. Il contient suffisamment d'éléments pour qu'à leur aide on puisse distinguer les fonctions continues. Plus précisément, *soient* f_1 et f_2 *deux fonctions continues* (et donc localement intégrables) *distinctes sur la droite numérique. Alors il existe une fonction* $\varphi \in K$ *telle que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\varphi(x)\,dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (8)$$

En effet, posons $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Si $f(x) \not\equiv 0$, il existe un point x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors $f(x)$ ne change pas de signe dans un intervalle (α, β) contenant le point x_0. Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\beta - x)(x - \alpha)}} & \text{pour } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{pour les autres } x; \end{cases}$$

cette fonction est nulle en dehors de (α, β) et positive à l'intérieur de cet intervalle; de plus, elle a des dérivées de tout ordre, si bien que $\varphi \in K$ (vérifier l'existence des dérivées aux points $x = \alpha$ et $x = \beta$!). En outre, il est évident que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)\,dx \neq 0.$$

Nous avons montré ainsi que l'espace K contient suffisamment d'éléments pour pouvoir distinguer deux fonctions continues quelconques [1]).

6. Détermination d'une distribution connaissant sa dérivée. Equations différentielles dans l'ensemble des distributions. Les équations différentielles constituent l'un des domaines principaux où l'on applique la théorie des distributions. Ce sont précisément les problèmes liés aux équations différentielles qui ont stimulé le développement de cette théorie. Elle s'applique principalement aux équations aux dérivées partielles que nous n'étudions pas ici. Cependant, nous allons aborder ici quelques questions simples se rapportant à la résolution des équations différentielles (ordinaires) aux distributions. Commençons par l'équation différentielle la plus simple

$$y' = f(x)$$

(où $f(x)$ est une distribution ou une fonction « habituelle »), c'est-à-dire par le problème de la recherche d'une distribution, lorsqu'on connaît sa dérivée. Considérons tout d'abord le cas $f(x) \equiv 0$.

Théorème 1. *Les seules solutions* (*dans l'ensemble des distributions*) *de l'équation*

$$y' = 0 \tag{9}$$

sont les constantes.

Démonstration. L'équation (9) signifie que

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0 \tag{10}$$

pour toute fonction de base $\varphi \in K$. Considérons l'ensemble $K^{(1)}$ des fonctions de base dont chacune peut être représentée comme la

---

[1]) Ce résultat peut être étendu à des fonctions essentiellement plus générales que les fonctions continues, mais pour cela on a besoin de la notion d'intégrale de Lebesgue qui sera étudiée dans le chapitre suivant.

dérivée d'une fonction de base. Il est évident que $K^{(1)}$ est un sous-espace vectoriel de K. Posons $\varphi_1(x) = -\varphi'(x)$; la fonction φ_1 parcourt $K^{(1)}$, lorsque φ parcourt K. L'égalité (10) définit une fonctionnelle y sur $K^{(1)}$.

Remarquons maintenant que la fonction de base φ appartient à $K^{(1)}$ si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 0, \tag{11}$$

ce qui signifie que $K^{(1)}$ est le noyau de la fonctionnelle $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$.

En effet, si $\varphi(x) = \psi'(x)$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \psi(x)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \tag{12}$$

Inversement, l'expression

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \tag{13}$$

est une fonction indéfiniment dérivable. Si la condition (11) est remplie, $\psi(x)$ est une fonction à support borné. Sa dérivée est égale à $\varphi(x)$. En conformité avec les résultats du n° 6, § 1, chap. III, toute fonction de base $\varphi \in K$ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi = \varphi_1 + c\varphi_0 \quad (\varphi_1 \in K^{(1)}),$$

où φ_0 est une fonction de base fixée n'appartenant pas à $K^{(1)}$ et vérifiant la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx = 1.$$

Pour cela il suffit de poser

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = \varphi(x) - c\varphi_0(x).$$

Ainsi, si l'on donne la valeur de la fonctionnelle y pour la fonction de base $\varphi_0(x)$, cette fonctionnelle se trouve définie univoquement sur l'espace K tout entier. En posant $(y, \varphi_0) = \alpha$, on obtient

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) + c\,(y, \varphi_0) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(x)\,dx,$$

c'est-à-dire la distribution y n'est autre que la constante α, ce qu'il fallait démontrer.

Il en résulte que si pour deux distributions f et g on a l'égalité $f' = g'$, alors $f - g = \text{const}$.

Considérons maintenant l'équation

$$y' = f(x), \tag{14}$$

où $f(x)$ est une distribution arbitraire.

Théorème 2. *Pour chaque* $f \in K^*$ *l'équation* (14) *a une solution appartenant à* K^*.

Il est naturel d'appeler cette solution *primitive* de la distribution f.

Démonstration. L'équation (14) signifie que

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = (f, \varphi) \tag{15}$$

pour toute fonction de base $\varphi \in K$. Cette égalité définit la valeur de la fonctionnelle y pour toutes les fonctions $\varphi_1 \in K^{(1)}$:

$$(y, \varphi_1) = \left(f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\, d\xi\right).$$

Utilisons maintenant la représentation

$$\varphi = \varphi_1 + c\varphi_0$$

des éléments de K, obtenue plus haut. En posant $(y, \varphi_0) = 0$, nous définirons la fonctionnelle y sur l'espace K tout entier:

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\, d\xi\right).$$

On vérifie sans peine que cette fonctionnelle est linéaire et continue. Elle vérifie, en outre, l'équation (14). En effet, pour chaque $\varphi \in K$ on a

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)\, d\xi\right) = (f, \varphi).$$

Ainsi, pour chaque distribution $f(x)$ il existe une solution de l'équation

$$y' = f(x),$$

c'est-à-dire chaque distribution a une primitive. D'après le théorème 1, cette primitive est définie par la fonction $f(x)$ de façon unique à un terme constant près.

Les résultats obtenus s'étendent facilement aux systèmes d'équations différentielles linéaires. Nous nous bornons ici aux énoncés correspondants, sans donner des démonstrations.

Considérons un système homogène de n équations différentielles linéaires à n distributions inconnues

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{16}$$

où a_{ik} sont des fonctions indéfiniment dérivables. Un tel système a une certaine quantité de solutions « classiques » (c'est-à-dire des solutions exprimées par des fonctions « habituelles », en outre, indéfiniment dérivables). On peut montrer que le système (16) n'a pas d'autres solutions dans l'ensemble des distributions.

Dans le cas d'un système non homogène de la forme

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + f_i, \tag{17}$$

où f_i sont des distributions et a_{ik} sont des fonctions habituelles indéfiniment dérivables, il existe dans l'ensemble des distributions une solution définie à une solution arbitraire du système homogène (16) près.

Si dans le système (17) non seulement a_{ik}, mais f_i aussi, sont des fonctions « habituelles », il se trouve que toutes les solutions de ce système qui existent dans K^* sont aussi des fonctions habituelles.

7. Quelques généralisations. Plus haut nous avons considéré des distributions « d'une variable réelle », c'est-à-dire des distributions sur la droite numérique. En partant des mêmes idées, on peut introduire des distributions sur un ensemble borné, par exemple, sur un segment ou sur une circonférence, des distributions de plusieurs variables, des distributions d'une variable complexe, etc. Enfin, même pour les distributions sur la droite numérique la définition qui a été donnée plus haut est loin d'être la seule possible. Considérons en bref quelques-uns des types de distributions énumérés ci-dessus.

a) *Distributions de plusieurs variables.* Considérons dans l'espace à n dimensions $\mathbf{R}^n$ l'ensemble K^n des fonctions $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ayant des dérivées partielles de tous les ordres par rapport à toutes les variables et telles que chacune d'elles soit nulle en dehors d'un parallélépipède

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

L'ensemble K^n constitue un espace vectoriel (avec les opérations habituelles d'addition de fonctions et de leur multiplication par un nombre), dans lequel on peut introduire la notion de convergence de la

manière suivante : $\varphi_k \to \varphi$, s'il existe un parallélépipède $a_i \leqslant x_i \leqslant \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en dehors duquel chacune des fonctions φ_k est nulle et dans lequel on a la convergence uniforme :

$$\frac{\partial^r \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \to \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r \right)$$

pour chaque système donné d'entiers non négatifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

On appelle *distribution de n variables* toute fonctionnelle linéaire continue sur K^n. Toute fonction « habituelle » de n variables $f(x)$, intégrable dans tout domaine borné de $\mathbf{R}^n$, est en même temps une distribution. Les valeurs de la fonctionnelle qui lui correspond sont données par la formule

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) \, dx \quad (x = (x_1, \ldots, x_n), \; dx = dx_1 \ldots dx_n).$$

De même que dans le cas $n = 1$, deux fonctions continues distinctes définissent deux fonctionnelles distinctes (c'est-à-dire constituent deux distributions distinctes).

Pour les distributions de n variables les notions de passage à la limite, de dérivée, etc., s'introduisent par les mêmes méthodes que dans le cas d'une seule variable. Par exemple, les dérivées partielles d'une distribution sont définies par la formule

$$\left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \varphi(x) \right) = (-1)^r \left(f(x), \frac{\partial^r \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right).$$

On voit par là que chaque distribution de n variables admet des dérivées partielles de tout ordre.

b) *Distributions complexes.* Prenons maintenant pour fonctions de base les fonctions à support borné indéfiniment dérivables sur la droite numérique qui prennent des valeurs complexes. Les fonctionnelles linéaires sur l'espace $\widetilde{K}$ de ces fonctions s'appellent *distributions complexes.* Rappelons que dans un espace vectoriel complexe il y a des fonctionnelles linéaires et des fonctionnelles linéaires conjuguées. Les premières vérifient la condition

$$(f, \alpha\varphi) = \alpha (f, \varphi)$$

(où α est un nombre), tandis que les secondes vérifient la condition :

$$(f, \alpha\varphi) = \bar{\alpha} (f, \varphi).$$

Si $f(x)$ est une fonction habituelle à valeurs complexes sur la droite numérique, on peut lui associer une fonctionnelle linéaire sur $\widetilde{K}$ de deux façons

$$(f, \varphi)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) \, dx \qquad (18_1)$$

et

$$(f, \varphi)_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx. \qquad (18_2)$$

A la même fonction $f(x)$ on peut associer également deux fonctionnelles linéaires conjuguées, à savoir

$$_1(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi(x)}\, dx \qquad (18_3)$$

et

$$_2(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, \overline{\varphi(x)}\, dx. \qquad (18_4)$$

Le choix de chacune de ces quatre possibilités correspond à une façon bien déterminée de plonger l'espace des fonctions « habituelles » dans l'espace des distributions. Les opérations sur les distributions complexes peuvent être définies par des procédés analogues à ceux qu'on a utilisés plus haut pour les distributions réelles.

c) *Distributions sur la circonférence.* Parfois il est utile d'envisager des distributions définies sur un ensemble borné. L'un des plus simples exemples est obtenu, en considérant les distributions sur une circonférence. Prenons pour espace des fonctions de base l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur une circonférence avec les opérations habituelles donnant la somme de deux fonctions et le produit d'une fonction par un nombre. Nous dirons qu'une suite $\{\varphi_n(x)\}$ de fonctions de cet espace est convergente, si pour chaque $k = 0, 1, 2, \ldots$, la suite des dérivées $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ est uniformément convergente sur toute la circonférence. Comme maintenant l'ensemble des valeurs de la variable (la circonférence) est borné, il n'est plus question d'exiger que les fonctions soient à support borné. Les fonctionnelles linéaires sur cet espace de base s'appellent *distributions sur la circonférence.*

Toute fonction habituelle sur la circonférence peut être considérée comme une fonction périodique définie sur la droite numérique. La même considération, appliquée aux distributions, permet de lier les distributions sur la circonférence aux distributions périodiques. On appelle *distribution périodique* (de période a) toute fonctionnelle f qui vérifie la condition

$$(f(x), \varphi(x - a)) = (f(x), \varphi(x))$$

pour toute fonction de base φ. Un exemple de distribution périodique est fourni par la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi),$$

qui a été déjà citée plus haut.

d) *Autres espaces de base.* Nous avons appelé plus haut distributions sur la droite numérique les fonctionnelles linéaires sur l'espace K des fonctions indéfiniment dérivables à support borné. Cependant, un tel choix de l'espace de base n'est pas le seul possible. Par exemple, au lieu de l'espace des fonctions à support borné K on pourrait prendre l'espace plus large des fonctions indéfiniment dérivables $\varphi(x)$ sur la droite numérique qui décroissent, en même temps que leurs dérivées, plus rapidement que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{|x|}$. Plus précisément, une fonction $\varphi(x)$ est considérée comme appartenant à l'espace de base, que nous désignerons par S_∞, si pour tout couple de valeurs données de $p, q = 0, 1, 2, \ldots$ il existe une constante $C_{p,q}$ (dépendant de p, q et φ) telle que

$$|x^p\varphi^{(q)}(x)| < C_{p,q}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{19}$$

La convergence dans S_∞ est définie de la manière suivante : on dit qu'une suite $\{\varphi_n(x)\}$ converge vers $\varphi(x)$, si pour chaque $q = 0, 1, \ldots$ la suite $\{\varphi_n^{(q)}(x)\}$ converge uniformément sur tout intervalle fini et si dans les inégalités

$$|x^p\varphi_n^{(q)}(x)| < C_{p,q}$$

les constantes $C_{p,q}$ peuvent être choisies indépendantes de n.

Dans ce cas l'ensemble des distributions est un peu moins riche que dans le cas de l'espace K. Par exemple, la fonction

$$f(x) = e^{x^2}$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur K et ne l'est pas sur S_∞. Le choix de S_∞ en qualité d'espace de base est commode, par exemple, pour l'étude de la transformation de Fourier des distributions.

En général, comme l'a montré le développement de la théorie des distributions, il n'est pas nécessaire de choisir une fois pour toutes l'espace de base ; juste au contraire, il y a intérêt à faire varier cet espace selon l'ensemble des problèmes que l'on se pose. Tout de même, il importe que la condition suivante soit respectée : d'une part, il doit y avoir « suffisamment » de fonctions de base (pour qu'on puisse à leur aide distinguer les fonctions « habituelles » ou, plus précisément, les fonctionnelles régulières) et d'autre part, il faut que ces fonctions possèdent des dérivées d'ordre suffisamment grand.

Exercice. Vérifier que l'espace S_∞ peut être muni d'une structure d'espace dénombrablement normé, en posant par exemple

$$\|\varphi\|_n = \sum_{p+q=n} \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0\leqslant i\leqslant p \\ 0\leqslant j\leqslant q}} |(1+|x|^i)\varphi^{(j)}(x)|,$$

et que toute suite convergente dans S_∞ au sens de la définition donnée plus haut, est convergente aussi au sens de la topologie définie par ces normes.

§ 5. Opérateurs linéaires

1. Définition et exemples d'opérateurs linéaires. Soient E et E_1 deux espaces vectoriels topologiques. On appelle *opérateur linéaire* de E dans E_1 une application

$$y = Ax \quad (x \in E, \ y \in E_1)$$

qui vérifie la condition

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

L'ensemble D_A de tous les $x \in E$ pour lesquels l'application A est définie s'appelle *domaine de définition* de l'opérateur A ; en général, il n'est pas supposé que $D_A = E$, mais nous allons toujours supposer que D_A est une variété linéaire, c'est-à-dire que si x, $y \in D_A$, on a aussi $\alpha x + \beta y \in D_A$, quels que soient α, β.

L'opérateur A s'appelle *continu au point* $x_0 \in D_A$, si pour tout voisinage V du point $y_0 = Ax_0$ il existe un voisinage U du point x_0 tel que $Ax \in V$, dès que $x \in U \cap D_A$. L'opérateur A est dit *continu*, s'il est continu en tout point $x \in D_A$.

Lorsque E et E_1 sont des espaces normés, cette définition est équivalente à la suivante : l'opérateur A est continu, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$\| x' - x'' \| < \delta \quad (x', x'' \in D_A)$$

implique

$$\| Ax' - Ax'' \| < \varepsilon.$$

La notion de fonctionnelle linéaire, introduite au début de ce chapitre, est un cas particulier de celle d'opérateur linéaire. Plus précisément, une fonctionnelle linéaire est un opérateur linéaire qui envoie l'espace donné E dans la droite numérique $\mathbf{R}^1$. En posant $E_1 = \mathbf{R}^1$ dans les définitions de la linéarité et de la continuité d'un opérateur, on retrouve les définitions correspondantes pour une fonctionnelle.

Exactement de la même façon, beaucoup d'autres notions et résultats, qui seront exposés plus bas pour les opérateurs linéaires, constituent des généralisations presque automatiques des résultats déjà exposés au § 1 de ce chapitre pour les fonctionnelles linéaires.

Exemples d'opérateurs linéaires. 1. Soit E un espace vectoriel topologique. Posons

$$Ax = x \text{ pour tous les } x \in E.$$

Un tel opérateur qui transforme tout élement de l'espace en lui-même s'appelle *opérateur identique*.

2. Soient E et E_1 deux espaces vectoriels topologiques quelconques, et soit

$$Ox = 0 \text{ pour tous les } x \in E$$

(0 désigne ici l'élément nul de l'espace E_1). Alors O s'appelle *opérateur nul.*

3. *Forme générale d'un opérateur linéaire appliquant un espace de dimension finie dans un espace de dimension finie.* Soit A un opérateur linéaire appliquant l'espace à n dimensions $\mathbf{R}^n$ de base $e_1, \ldots, e_n$ dans l'espace à m dimensions $\mathbf{R}^m$ de base $f_1, \ldots, f_m$. Si x est un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

d'où, en vertu de la linéarité de l'opérateur A, on obtient

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i.$$

Ainsi donc, l'opérateur A est défini, si l'on connaît les images par A des vecteurs de la base $e_1, \ldots, e_n$. Considérons les décompositions des vecteurs Ae_i suivant la base $f_1, \ldots, f_m$. On a

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k.$$

Ceci montre que l'opérateur A est défini par la matrice des coefficients $\| a_{ki} \|$. L'image de l'espace $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ est un sous-espace vectoriel dont la dimension est évidemment égale au rang de la matrice $\| a_{ki} \|$, donc inférieure ou égale à n. Notons que tout opérateur linéaire, donné sur un espace de dimension finie, est nécessairement continu.

4. Considérons un espace de Hilbert H et un sous-espace quelconque H_1 de H. Décomposons H en somme directe du sous-espace H_1 et son supplémentaire orthogonal, c'est-à-dire mettons chaque élément $h \in H$ sous la forme

$$h = h_1 + h_2 \qquad (h_1 \in H_1,\ h_2 \perp H_1),$$

et posons

$$Ph = h_1.$$

Il est naturel d'appeler cet opérateur *P opérateur de projection orthogonale* ou *orthoprojecteur* de H sur H_1. On vérifie sans peine qu'il est linéaire et continu.

5. Considérons dans l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ l'opérateur défini par la formule

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

où $K(s, t)$ est une fonction continue de deux variables bien déterminée. La fonction $\psi(t)$ est continue, quelle que soit la fonction con-

tinue $\varphi(s)$, de sorte que l'opérateur (1) applique l'espace des fonctions continues dans lui-même. Sa linéarité est évidente. Pour pouvoir parler de sa continuité, il faut indiquer préalablement la topologie que l'on considère sur notre espace des fonctions continues. On propose au lecteur de démontrer la continuité de cet opérateur dans les cas où: a) l'on considère l'espace $C[a, b]$, c'est-à-dire l'espace des fonctions continues avec la norme $\|\varphi\| = \max|\varphi(t)|$; b) l'on considère l'espace $C^2[a, b]$, c'est-à-dire pour $\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(t)\,dt\right)^{1/2}$.

6. Dans le même espace des fonctions continues, considérons l'opérateur

$$\psi(t) = \varphi_0(t)\,\varphi(t),$$

où $\varphi_0(t)$ est une fonction continue donnée. La linéarité de cet opérateur est évidente. (Démontrez sa continuité pour les normes indiquées dans l'exemple précédent.)

7. L'un des opérateurs linéaires les plus importants pour l'analyse est l'opérateur de dérivation. Il peut être considéré dans des espaces différents.

a) Considérons l'espace des fonctions continues $C[a, b]$ et l'opérateur

$$Df(t) = f'(t)$$

dans cet espace. Il est évident que cet opérateur (que nous considérons comme opérateur de $C[a, b]$ dans $C[a, b]$) n'est pas défini sur tout l'espace des fonctions continues, mais seulement sur la variété linéaire des fonctions admettant une dérivée continue. L'opérateur D est linéaire, mais pas continu. Cela résulte, par exemple, du fait que la suite

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

converge vers 0 (pour la métrique de $C[a, b]$), tandis que la suite

$$D\varphi_n(t) = \cos nt$$

est divergente.

b) L'opérateur de dérivation peut être considéré comme un opérateur de l'espace D_1 des fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$ avec la norme

$$\|\varphi\|_1 = \max|\varphi(t)| + \max|\varphi'(t)|$$

dans l'espace $C[a, b]$. Dans ce cas, l'opérateur D est linéaire et continu; il applique l'espace D_1 tout entier sur l'espace $C[a, b]$ tout entier.

c) Il n'est pas tout à fait commode de considérer l'opérateur de dérivation comme opérateur de D_1 dans $C[a, b]$, car alors, bien qu'un

tel opérateur soit continu et défini sur l'espace tout entier, il ne peut pas être toujours appliqué deux fois à la même fonction de D_1. Il est plus commode de considérer l'opérateur de dérivation dans un espace encore plus étroit que D_1, plus précisément, dans l'espace D_∞ des fonctions indéfiniment dérivables sur le segment $[a, b]$ dont la topologie est donnée par une famille dénombrable de normes

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ a \leqslant t \leqslant b}} |\varphi^k(t)|.$$

L'opérateur de dérivation transforme tout cet espace en lui-même et, comme on le vérifie aisément, il est continu sur D_∞.

d) Les fonctions indéfiniment dérivables forment un ensemble assez étroit. La possibilité de considérer l'opérateur de dérivation comme opérateur dans un espace essentiellement p l u s l a r g e et en même temps comme opérateur c o n t i n u est offerte par les distributions. Dans le paragraphe précédent nous avons déjà parlé de la dérivation des distributions. D'après ce qui a été dit là, il est clair que la dérivation est un opérateur linéaire dans l'espace des distributions, continu en ce sens que la convergence d'une suite de distributions $\{f_n(t)\}$ vers $f(t)$ implique la convergence de la suite de leurs dérivées vers la dérivée de la distribution $f(t)$.

2. Opérateurs linéaires bornés et continuité. Un opérateur linéaire de E dans E_1 est dit *borné*, s'il est défini partout dans E et transforme tout ensemble borné en un ensemble borné. Entre la notion d'opérateur linéaire borné et celle de continuité il existe un lien étroit, exprimé par les propositions suivantes.

I. *Tout opérateur linéaire continu est borné.*

En effet, soit $M \subset E$ un ensemble borné. Supposons que l'ensemble $AM \subset E_1$ ne soit pas borné. Alors dans E_1 il existe un voisinage de zéro V tel qu'aucun des ensembles $\frac{1}{n} AM$ n'est contenu dans V. Mais alors il existe une suite d'éléments $x_n \in M$ telle qu'aucun des éléments $\frac{1}{n} Ax_n$ n'appartient à V. Par suite, d'une part, on a[1]) $\frac{1}{n} x_n \to 0$ dans E et, d'autre part, la suite $\left\{\frac{1}{n} Ax_n\right\}$ ne converge pas vers 0 dans E_1; ceci contredit l'hypothèse de continuité de l'opérateur A.

II. *Si A est un opérateur linéaire borné de E dans E_1 et l'espace E satisfait au premier axiome de dénombrabilité, alors l'opérateur A est continu.*

En effet, lorsque A n'est pas continu, il existe un voisinage de zéro V dans E_1 et un système fondamental de voisinages de zéro $\{U_n\}$ dans E, tels que pour tout n on peut trouver un élément $x_n \in \frac{1}{n} U_n$ tel que $Ax_n \notin nV$. La suite $\{x_n\}$ est bornée dans E (elle con-

[1]) Cf. exercice 1, n°1, § 5, chap. III.

verge même vers 0), tandis que la suite $\{Ax_n\}$ n'est pas bornée dans E_1 (parce qu'elle n'est contenue dans aucun des ensembles nV). Donc, si l'opérateur A n'est pas continu et l'espace E satisfait au premier axiome de dénombrabilité, alors A n'est pas borné. La proposition annoncée est démontrée.

Ainsi, *pour un opérateur donné sur un espace satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité* (tels sont, en particulier, tous les espaces normés ou dénombrablement normés) *la propriété d'être borné équivaut à la continuité.*

Tous les opérateurs que nous avons considérés dans les exemples 1-6 du numéro précédent sont continus. Comme tous les espaces considérés dans ces exemples satisfont au premier axiome de dénombrabilité, tous les opérateurs en question sont bornés.

Si E et E_1 sont deux espaces normés, la condition pour qu'un opérateur A de E dans E_1 soit borné, peut être formulée ainsi : l'opérateur A est dit *borné*, s'il transforme toute boule en un ensemble borné. En vertu de la linéarité de A, cette condition peut être encore formulée comme suit : l'opérateur A est borné, s'il existe une constante C telle que pour tout $f \in E$

$$\|Af\| \leqslant C\|f\|.$$

Le plus petit des nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle *norme* de l'opérateur A et se note $\|A\|$.

Théorème 1. *Pour tout opérateur borné A d'un espace normé dans un espace normé, on a*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

Démonstration. Posons

$$\alpha = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|.$$

En vertu de la linéarité de A, on a l'égalité

$$\alpha = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Donc, quel que soit l'élément x, on a

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \alpha$$

ou

$$\|Ax\| \leqslant \alpha\|x\|,$$

d'où il résulte que

$$\|A\|\alpha = \inf C \leqslant \alpha$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément $x_\varepsilon \neq 0$ tel que

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|}$$

ou

$$(\alpha - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| \leqslant \|Ax_\varepsilon\| \leqslant C\|x_\varepsilon\|.$$

De ce fait,

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \inf C = \|A\|$$

et, comme ε est arbitraire, on a

$$\alpha \leqslant \|A\|.$$

Par conséquent, $\|A\| = \alpha$.

3. Somme et produit d'opérateurs.

D é f i n i t i o n. 1. Soient A et B deux opérateurs linéaires de l'espace vectoriel E dans l'espace E_1. On appelle *somme* $A + B$ de ces opérateurs l'opérateur C qui à un élément $x \in E$ fait correspondre l'élément

$$y = Ax + Bx \in E_1.$$

Il est défini pour tous les éléments appartenant à l'intersection $D_A \cap D_B$ des domaines de définition des opérateurs A et B.

Il est aisé de vérifier que $C = A + B$ est un opérateur linéaire, continu, si A et B sont continus.

Si E et E_1 sont des espaces normés et les opérateurs A et B sont bornés, l'opérateur $A + B$ est aussi borné et

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|. \tag{3}$$

En effet, pour tout x on a

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant (\|A\| + \|B\|)\|x\|,$$

d'où l'on obtient (3)

D é f i n i t i o n 2. Soient A et B deux opérateurs linéaires: A de E dans E_1 et B de E_1 dans E_2. On appelle *produit* BA de ces opérateurs l'opérateur C qui à un élément $x \in E$ fait correspondre l'élément

$$z = B(Ax) \in E_2.$$

Le domaine de définition D_C de l'opérateur C est constitué par les $x \in D_A$ tels que $Ax \in D_B$. Il est clair que l'opérateur BA est linéaire. Il est continu, lorsque A et B sont continus.

E x e r c i c e. Démontrer que D_C est une variété linéaire, lorsque D_A et D_B sont des variétés linéaires.

Si A et B sont des opérateurs bornés dans des espaces normés, l'opérateur BA est aussi borné et

$$\|BA\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|. \tag{4}$$

En effet,

$$\|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|, \tag{5}$$

d'où l'on obtient (4).

La somme et le produit de trois et d'un nombre plus grand d'opérateurs peuvent être définis successivement. Ces opérations sont associatives.

On appelle produit kA d'un opérateur A par un nombre k l'opérateur qui à un élément x fait correspondre l'élément kAx.

L'ensemble $\mathscr{L}(E, E_1)$ de tous les opérateurs linéaires continus, définis sur l'espace E tout entier, qui appliquent E dans E_1 (où E et E_1 sont deux espaces vectoriels topologiques donnés) constitue un espace vectoriel par rapport aux opérations d'addition et de multiplication par un nombre, introduites plus haut. Si E et E_1 sont des espaces normés, alors $\mathscr{L}(E, E_1)$ est aussi un espace normé (la définition de la norme d'un opérateur étant celle donnée plus haut).

Exercice. Soient E un espace normé et E_1 un espace normé complet. Alors: a) l'espace normé $\mathscr{L}(E, E_1)$ est complet; b) si $A_k \in \mathscr{L}(E, E_1)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| < \infty$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ converge vers un opérateur $A \in \mathscr{L}(E, E_1)$ et

$$\|A\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|. \tag{6}$$

4. Opérateur inverse, inversibilité. Soient A un opérateur de E dans E_1, D_A son domaine de définition et R_A le domaine de ses valeurs.

Définition 3. L'opérateur A est dit *inversible*, si pour tout $y \in R_A$ l'équation

$$Ax = y$$

a une solution et une seule.

Si A est inversible, à chaque $y \in R_A$ on peut faire correspondre un élément et un seul $x \in D_A$ à savoir la solution de l'équation $Ax = y$. L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle *inverse* de A et se note A^{-1}.

Théorème 2. *L'opérateur A^{-1}, inverse d'un opérateur linéaire A, est aussi linéaire.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le domaine des valeurs R_A de l'opérateur A, c'est-à-dire $D_{A^{-1}}$, est une variété linéaire. Soient $y_1, y_2 \in R_A$. Il suffit de vérifier qu'on a l'égalité

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2. \tag{7}$$

Soit $Ax_1 = y_1$ et $Ax_2 = y_2$. En vertu de la linéarité de A, on a

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2. \tag{8}$$

D'après la définition de l'opérateur inverse, on peut écrire:

$$A^{-1}y_1 = x_1, \quad A^{-1}y_2 = x_2.$$

En multipliant ces deux égalités respectivement par α_1 et α_2 et en les additionnant membre à membre, on obtient

$$\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

D'autre part, de l'égalité (8) et de la définition de l'opérateur inverse il résulte que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2);$$

en comparant cette égalité avec la précédente, on obtient

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2.$$

Théorème 3. (de Banach sur l'opérateur inverse). *Soit A un opérateur linéaire borné qui applique biunivoquement un espace de Banach E sur un espace de Banach E_1. Alors l'opérateur inverse A^{-1} est aussi borné.*

Pour la démonstration on aura besoin du lemme suivant.

Lemme. *Soit E un espace de Banach et M un ensemble partout dense dans E. Alors tout élément non nul $y \in E$ admet un développement en série*

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots$$

avec $y_k \in M$ et $\|y_k\| \leqslant \frac{3\|y\|}{2^k}$.

Démonstration. Nous allons construire les éléments y_k de proche en proche. Choisissons y_1 de façon que

$$\|y - y_1\| \leqslant \frac{\|y\|}{2}. \tag{9}$$

Ceci est possible, parce que l'inégalité (9) définit une boule de centre y et de rayon $\frac{\|y\|}{2}$ à l'intérieur de laquelle il existe nécessairement un élément de M (car M est partout dense dans E). Choisissons ensuite $y_2 \in M$ de façon que $\|y - y_1 - y_2\| \leqslant \frac{\|y\|}{4}$, y_3 de façon que $\|y - y_1 - y_2 - y_3\| \leqslant \frac{\|y\|}{8}$ et, plus généralement, y_n de façon que $\|y - y_1 - \ldots - y_n\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^n}$. Un tel choix est toujours possible, étant donné que M est partout dense dans E. D'après le choix des éléments y_k, on a

$$\|y - \sum_{k=1}^{n} y_k\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty,$$

c.-à-d. la série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ converge vers y. Evaluons les normes des éléments y_k:

$$\|y_1\| = \|y_1 - y + y\| \leqslant \|y_1 - y\| + \|y\| \leqslant \frac{3\|y\|}{2},$$

$$\|y_2\| = \|y_2 + y_1 - y + y - y_1\| \leqslant \|y - y_1 - y_2\| + \\ + \|y - y_1\| \leqslant \frac{3\|y\|}{4}.$$

Enfin,

$$\|y_n\| = \|y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1 - y + y - y_1 - \ldots - y_{n-1}\| \leqslant \\ \leqslant \|y - y_1 - \ldots - y_n\| + \|y - y_1 - \ldots - y_{n-1}\| \leqslant \frac{3\|y\|}{2^n}.$$

Le lemme est démontré.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 3. Considérons dans l'espace E_1 l'ensemble M_k des y vérifiant l'inégalité $\|A^{-1}y\| \leqslant \leqslant k\|y\|$. Tout élément de l'espace E_1 appartient à l'un des ensembles M_k, de sorte que $E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. D'après le théorème de Baire (n° 3, § 3, chap. II), au moins l'un des ensembles M_k, par exemple M_n, est dense dans une boule B. A l'intérieur de la boule B choisissons une couche sphérique P de centre en un point de M_n ; par la couche P on sous-entend ici l'ensemble des points z vérifiant l'inégalité $\beta < < \|z - y_0\| < \alpha$, où $0 < \beta < \alpha$, $y_0 \in M_n$.

En déplaçant la couche P de façon que son centre coïncide avec l'origine, on obtiendra la couche sphérique $P_0 = \{z : 0 < \beta < < \|z\| < \alpha\}$.

Montrons qu'il existe un ensemble M_N dense dans P_0. Soit $z \in P \cap M_n$; alors $z - y_0 \in P_0$ et

$$\|A^{-1}(z - y_0)\| \leqslant \|A^{-1}z\| + \|A^{-1}y_0\| \leqslant n(\|z\| + \|y_0\|) \leqslant \\ \leqslant n(\|z - y_0\| + 2\|y_0\|) = n\|z - y_0\|\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\|z - y_0\|}\right) \leqslant \\ \leqslant n\|z - y_0\|\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right). \quad (10)$$

L'expression $n\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)$ ne dépend pas de z. Posons [1])

$$N = 1 + \left[n\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)\right].$$

Alors, d'après (10), $z - y_0 \in M_N$ et du fait que M_n est dense dans P il résulte que M_N est dense dans P_0.

Considérons un élément non nul arbitraire $y \in E_1$. Il est toujours possible de trouver un nombre λ tel que l'on ait $\beta < \|\lambda y\| < \alpha$, c'est-

[1]) Les crochets [ ] désignent ici la partie entière d'un nombre.

à-dire $\lambda y \in P_0$. Comme M_N est dense dans P_0, on peut construire une suite d'éléments $y_k \in M_N$ convergeant vers λy. Alors la suite $\frac{1}{\lambda} y_k$ convergera vers y. Il est évident que si $y_k \in M_N$, on a aussi $\frac{1}{\lambda} y_k \in M_N$, quel que soit le réel $\lambda \neq 0$; par conséquent, M_N est dense dans E_1 / / $\{0\}$ et donc dans E_1.

Considérons un élément non nul $y \in E_1$; d'après le lemme démontré, il admet un développement en série

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \ldots,$$

on $y_k \in M_N$ et $\| y_k \| < \frac{3 \| y \|}{2^k}$.

Considérons dans l'espace E la série constituée par les images réciproques des éléments y_k, c'est-à-dire par les éléments $x_k = A^{-1} y_k$.

Cette série converge vers un élément x, car on a l'inégalité

$$\| x_k \| = \| A^{-1} y_k \| \leqslant N \| y_k \| < N \frac{3 \| y \|}{2^k};$$

eù outre,

$$\| x \| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \leqslant 3N \| y \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3N \| y \|.$$

En vertu de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ et de la continuité de l'opérateur A, à cette série on peut appliquer terme à terme l'opérateur A. On obtient

$$Ax = Ax_1 + Ax_2 + \ldots = y_1 + y_2 + \ldots = y,$$

d'où $x = A^{-1} y$.En outre

$$\| A^{-1} y \| = \| x \| \leqslant 3N \| y \|,$$

et comme l'évaluation est vraie pour tout $y \neq 0$, l'opérateur A^{-1} est borné.

Le théorème est démontré.

E x e r c i c e s. 1. Soient E, E_1 deux espaces normés ; un opérateur linéaire A de E dans E_1 ayant pour domaine de définition une variété linéaire $D_A \subset \subset E$, est dit *fermé*, si les conditions $x_n \in D_A$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ impliquent que $x \in D_A$ et $Ax = y$. Vérifier que tout opérateur borné est fermé.

2. Considérons le produit direct $E \times E_1$ des espaces E et E_1 c'est-à-dire l'espace vectoriel normé constitué par tous les couples $[x, y]$ tels que $x \in E$, $y \in E_1$, avec la norme $\| [x, y] \| = \| x \| + \| y \|_1$ ($\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_1$ sont les normes sur E et E_1 respectivement). A l'opérateur A on peut associer l'ensemble $G_A = = \{ [x, y] : x \in D_A, y = Ax \} \subset E \times E_1$, appelé son *graphe*. Vérifier que G_A est une variété linéaire dans $E \times E_1$, fermée si et seulement si l'opérateur A est fermé. Démontrer que *si E, E_1 sont des espaces de Banach et l'opérateur A, défini sur l'espace E tout entier, est fermé, alors il est borné* (théorème de Banach sur le graphe fermé).

Indication. Appliquer le théorème 3 à l'opérateur $P: [x, Ax] \to x$, appliquant G_A dans E.

3. Soient E et E_1 deux espaces dénombrablement normés complets. Démontrer que si A est un opérateur linéaire continu qui applique biunivoquement E sur E_1, alors son inverse A^{-1} est aussi continu. Enoncer et démontrer le théorème du graphe fermé pour des espaces dénombrablement normés.

Considérons l'ensemble $\mathscr{L}(E, E_1)$ des opérateurs linéaires bornés A qui appliquent l'espace de Banach E dans l'espace de Banach E_1. C'est un espace de Banach. Soit $\mathscr{GL}(E, E_1)$ l'ensemble des opérateurs de cet espace qui appliquent E sur E_1 tout entier et dont chacun admet un inverse borné. Cet ensemble est ouvert dans $\mathscr{L}(E, E_1)$. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit $A_0 \in \mathscr{GL}(E, E_1)$, et soit ΔA un opérateur de $\mathscr{L}(E, E_1)$ tel que $\| \Delta A \| < \frac{1}{\| A_0^{-1} \|}$. Alors l'opérateur $A_0 + \Delta A$ admet un inverse $(A_0 + \Delta A)^{-1}$ borné, c'est-à-dire $A = A_0 + \Delta A \in \mathscr{GL}(E, E_1)$.*

Démonstration. Choisissons un élément $y \in E_1$ et considérons l'application B de l'espace E dans lui-même, définie par la formule

$$Bx = A_0^{-1} y - A_0^{-1} \Delta A x.$$

De la condition $\| \Delta A \| < \| A_0^{-1} \|^{-1}$ il résulte que l'application B est contractante. Comme l'espace E est complet, il existe un point fixe unique x de l'application B:

$$x = Bx = A_0^{-1} y - A_0^{-1} \Delta A x,$$

d'où

$$Ax = A_0 x + \Delta A x = y.$$

Si $Ax' = y$, alors x' est aussi un point fixe de l'application B, de sorte que $x' = x$. Ainsi, pour tout $y \in E_1$ l'équation $Ax = y$ a une solution unique dans E, c'est-à-dire l'opérateur A admet un inverse A^{-1}, défini sur l'espace E_1 tout entier. D'après le théorème 3, l'opérateur A^{-1} est borné, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 5. *Soient E un espace de Banach, I l'opérateur identique dans E et A un opérateur linéaire borné, appliquant E dans lui-même et tel que $\| A \| < 1$. Alors l'opérateur $I - A$ admet un inverse $(I - A)^{-1}$ borné qui peut être représenté sous la forme*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{11}$$

Démonstration. L'existence de l'opérateur $(I - A)^{-1}$ et sa propriété d'être borné résultent du théorème 4 (par ailleurs, cela découle aussi du raisonnement qui suit).

Comme $\| A \| < 1$, on a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty$. L'espace E étant complet, la convergence de la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \| A^k \|$ entraîne que la somme de la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ est un opérateur linéaire borné. Pour tout n on a

$$(I-A) \sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k (I-A) = I - A^{n+1};$$

le passage à la limite pour $n \to \infty$, compte tenu du fait que $\| A^{n+1} \| \leqslant \|A\|^{n+1} \to 0$, donne

$$(I-A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I-A) = I,$$

d'où

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

E x e r c i c e. Soit A un opérateur linéaire borné qui applique un espace de Banach E sur un espace de Banach E_1. Démontrer qu'il existe nue constante $\alpha > 0$ telle que si $B \in \mathscr{L}(E, E_1)$ et $\| A - B \| < \alpha$, alors B applique E sur E_1 tout entier (Banach).

5. Opérateurs adjoints. Considérons un opérateur linéaire continu $y=Ax$ appliquant un espace vectoriel topologique E dans un espace du même type E_1. Soit g une fonctionnelle linéaire définie sur E_1, c'est-à-dire $g \in E_1^*$. Appliquons la fonctionnelle g à l'élément $y = Ax$; comme on le vérifie aisément, $g(Ax)$ est une fonctionnelle linéaire continue définie sur E ; désignons-la par f. La fonctionnelle f est donc un élément de l'espace E^*. A chaque fonctionnelle $g \in E_1^*$ nous avons fait correspondre une fonctionnelle $f \in E^*$, c'est-à-dire nous avons obtenu un opérateur de E_1^* dans E^*. Cet opérateur s'appelle *opérateur adjoint* de l'opérateur A et se note A^*.

En désignant la valeur de la fonctionnelle f pour l'élément x par le symbole (f, x), on obtient que $(g, Ax) = (f, x)$ ou

$$(g, Ax) = (A^*g, x).$$

Cette égalité peut être considérée comme définition de l'opérateur adjoint.

E x e m p l e. *Opérateur adjoint dans un espace de dimension finie.* Soit A un opérateur appliquant l'espace réel à n dimensions $\mathbf{R}^n$ dans l'espace (à m dimensions) $\mathbf{R}^m$ et soit $\| a_{ij} \|$ la matrice de cet opérateur.

L'application $y = Ax$ peut s'écrire sous la forme d'un système d'égalités

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

et la fonctionnelle $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j.$$

De l'égalité

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$$

on obtient $f_j = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$. Comme $f = A^*g$, on en déduit que l'opérateur A^* est donné par la matrice transposée de la matrice de l'opérateur A.

Les propriétés suivantes des opérateurs adjoints résultent immédiatement de la définition.

1. L'opérateur A^* est linéaire.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. Si k est un nombre, on a $(kA)^* = kA^*$.

Si A est un opérateur continu de E dans E_1, alors A^* est un opérateur continu de (E_1^*, b) dans (E^*, b) (vérifier cela !). Si E et E_1 sont des espaces de Banach, cette proposition peut être rendue plus précise de la manière suivante :

Théorème 6. *Si A est un opérateur linéaire borné appliquant un espace de Banach E dans un espace de Banach E_1, on a*

$$\| A^* \| = \| A \|.$$

Démonstration. En vertu des propriétés de la norme d'un opérateur, on a

$$|(A^*g, x)| = |(g, Ax)| \leqslant \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

d'où $\| A^*g \| \leqslant \|A\| \cdot \|g\|$; par conséquent,

$$\| A^* \| \leqslant \|A\|. \tag{12}$$

Soit $x \in E$ et $Ax \neq 0$; posons $y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|} \in E_1$; il est évident que $\| y_0 \| = 1$. D'après le corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle g telle que $\| g \| = 1$ et $(g, y_0) = 1$, c'est-à-dire $(g, Ax) = \|Ax\|$. Des relations

$$\| Ax \| = (g, Ax) = |(A^*g, x)| \leqslant \|A^*g\| \cdot \|x\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^*\| \cdot \|g\| \cdot \|x\| = \|A^*\| \cdot \|x\|$$

on obtient $\| A \| \leqslant \|A^*\|$, d'où, grâce à l'inégalité (12), il vient que

$$\| A^* \| = \| A \|.$$

Le théorème est démontré.

E x e r c i c e. Soient E et E_1 deux espaces de Banach réflexifs et soit $A \in \mathscr{L}(E, E_1)$. Démontrer que $A^{**} = A$.

6. Opérateurs adjoints dans un espace euclidien. Opérateurs auto-adjoints. Considérons le cas où A est un opérateur borné dans un espace de Hilbert H (réel ou complexe). Selon le théorème de la forme générale d'une fonctionnelle linéaire continue sur un espace de Hilbert, l'application τ qui à tout élément $y \in H$ fait correspondre la fonctionnelle linéaire

$$(\tau y)(x) = (x, y)$$

est un isomorphisme (ou isomorphisme conjugué, si H est complexe) de l'espace H sur l'espace dual H^* tout entier. Soit A^* l'opérateur adjoint de A. Il est clair que l'application $\widetilde{A}^* = \tau^{-1}A^*\tau$ est un opérateur linéaire borné dans H; il est aisé de voir que pour tout $y \in H$ on a

$$(Ax, y) = (x, \widetilde{A}^*y).$$

Comme $\| A^* \| = \| A \|$ et les applications τ et τ^{-1} sont isométriques, on a aussi $\| \widetilde{A}^* \| = \| A \|$.

Tout ce qui vient d'être dit est, certainement, vrai aussi pour un espace euclidien d e d i m e n s i o n f i n i e, réel ou complexe.

Adoptons la convention suivante. Si R est un espace euclidien (de dimension finie ou infinie), nous appellerons opérateur *adjoint* de l'opérateur A dans R l'opérateur $\widetilde{A}^*$ défini plus haut qui s'exerce d a n s l e m ê m e espace R.

Il importe de remarquer que cette définition d i f f è r e de la définition d'opérateur adjoint dans un espace de Banach arbitraire E, selon laquelle l'opérateur adjoint A^* s'exerce dans l'espace dual E^*. Parfois l'opérateur $\widetilde{A}^*$, pour être discerné de A^*, est appelé *opérateur adjoint hermitien.* Pour ne pas encombrer la terminologie et les notations, nous allons écrire A^* au lieu de $\widetilde{A}^*$ et parler de l'opérateur adjoint sans toutefois oublier que dans le cas d'un espace euclidien l'opérateur adjoint doit être t o u j o u r s compris au sens indiqué plus haut.

Il est clair que dans un espace euclidien R l'adjoint d'un opérateur A peut être défini comme l'opérateur qui, pour tous les x, $y \in R$, vérifie l'égalité

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Comme A et A^* sont maintenant des opérateurs dans le même espace, il se peut que $A^* = A$. Dégageons une classe importante d'opérateurs dans un espace euclidien (en particulier, hilbertien).

D é f i n i t i o n 4. Un opérateur linéaire borné A dans un espace euclidien R est dit *auto-adjoint* si $A^* = A$, c'est-à-dire si

$$(Ax,\ y) = (x,\ Ay)$$

pour tous les x, $y \in R$.

Signalons la propriété importante suivante de l'opérateur A^*, adjoint de A. Un sous-espace R_1 de l'espace euclidien R est dit *invariant* par rapport à l'opérateur A, si $x \in R_1$ implique $Ax \in R_1$. *Si le sous-espace R_1 est invariant par rapport à A, son supplémentaire orthogonal $R_1^{\perp}$ est invariant par rapport à A^*.* En effet, si $y \in R_1^{\perp}$, alors pour tous les $x \in R_1$ on a

$$(x,\ A^*y) = (Ax,\ y) = 0,$$

car $Ax \in R_1$. En particulier, si A est un opérateur auto-adjoint, alors le supplémentaire othogonal de tout sous-espace invariant par rapport à A est lui-même invariant par rapport à A.

E x e r c i c e. Démontrer que si A et B sont deux opérateurs linéaires bornés dans un espace euclidien, on a les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}(\alpha A + \beta B)^* &= \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*,\\ (AB)^* &= B^*A^*,\\ (A^*)^* &= A,\\ I^* &= I\end{aligned}$$

(I est l'opérateur identique).

7. Spectre d'un opérateur. Résolvante [1]). Il serait difficile d'indiquer dans la théorie des opérateurs une notion plus importante que celle de spectre. Introduisons cette notion d'abord pour le cas d'un espace de dimension finie.

Soit A un opérateur linéaire dans l'espace à n dimensions $\mathbf{C}^n$. Un nombre λ s'appelle *valeur propre* de l'opérateur A, si l'équation

$$Ax = \lambda x$$

admet des solutions non nulles. L'ensemble de toutes les valeurs propres s'appelle *spectre* de l'opérateur A ; toutes les autres valeurs de λ sont dites *régulières*. Autrement dit, λ est un point régulier, si l'opérateur $A - \lambda I$ est inversible. L'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est alors définie sur l'espace $\mathbf{C}^n$ tout entier et, comme tout opérateur dans un espace de dimension finie, est borné. Ainsi, dans un espace de dimension finie on a deux possibilités suivantes:

1) l'équation $Ax = \lambda x$ admet une solution non nulle, c'est-à-dire λ est une valeur propre de A ; dans ce cas l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ n'existe pas;

---

[1]) Partout, où il s'agit du spectre d'un opérateur, nous supposons que cet opérateur s'exerce dans un espace c o m p l e x e.

2) l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, est borné et défini sur l'espace tout entier, c'est-à-dire λ est un point régulier.

Si A est un opérateur donné dans un espace de dimension infinie E, il y a encore une troisième possibilité:

3) l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, c'est-à-dire l'équation $Ax = \lambda x$ n'a pas de solution non nulle, mais cet opérateur n'est pas défini sur l'espace E tout entier (et, peut être, n'est pas borné).

Introduisons la terminologie suivante. Nous dirons que le nombre λ est *régulier* pour l'opérateur A défini dans un espace de Banach (complexe) E, si l'opérateur $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, appelé *résolvante* de l'opérateur A, *est défini sur l'espace E tout entier et, par conséquent* (théorème 3), *est borné.* L'ensemble de toutes les autres valeurs de λ s'appelle *spectre* de l'opérateur A. Le spectre contient toutes les valeurs propres de l'opérateur A, car si $(A - \lambda I)\, x = 0$ pour un $x \neq 0$, alors l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ n'existe pas. L'ensemble des valeurs propres de λ s'appelle *spectre ponctuel.* La partie restante du spectre, c'est-à-dire l'ensemble des λ pour lesquels l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, mais n'est pas défini partout dans E, s'appelle *spectre continu.* Ainsi, chaque valeur de λ est pour l'opérateur A soit une valeur régulière, soit une valeur propre, soit un point du spectre continu. La possibilité d'un opérateur de posséder un spectre continu est ce qui rend la théorie des opérateurs dans un espace de dimension infinie essentiellement différente de la théorie analogue dans un espace de dimension finie.

Soit A un opérateur borné dans un espace de Banach E. Si le point λ est régulier, c'est-à-dire si l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est défini partout dans E, et borné, alors pour δ assez petit, l'opérateur $(A - (\lambda + \delta) I)^{-1}$ est aussi défini partout dans E et borné (théorème 4), c'est-à-dire le point $\lambda + \delta$ est aussi régulier. Ainsi, *les points réguliers forment un ensemble ouvert.* Par conséquent, le spectre, c'est-à-dire le complémentaire de cet ensemble, *est un ensemble fermé.*

Théorème 7. *Si A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach E et $|\lambda| > \|A\|$, alors λ est un point régulier.*

Démonstration. Puisqu'il est évident que

$$A - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right),$$

on a

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}.$$

Pour $\|A\| < |\lambda|$ cette série est convergente et fournit un opérateur borné, défini sur l'espace E tout entier (théorème 5). En d'autres mots, *le spectre de l'opérateur A est contenu dans le cercle de rayon $\|A\|$ et de centre 0.*

Exemples. 1. Considérons dans l'espace $C[a, b]$ un opérateur A, défini par la formule

$$Ax(t) = tx(t). \tag{13}$$

Alors

$$(A - \lambda I)\, x(t) = (t - \lambda)\, x(t).$$

L'opérateur (13) est inversible pour tout λ, car de l'égalité

$$(t - \lambda)\, x(t) = 0$$

il résulte que la fonction continue $x(t)$ est identiquement nulle. Cependant, pour $\lambda \in [a, b]$ l'opérateur inverse, donné par la formule

$$(A - \lambda I)^{-1}\, x(t) = \frac{1}{t - \lambda}\, x(t),$$

n'est pas défini sur l'espace $C[a, b]$ tout entier et n'est pas borné. (Démontrer cela !). Ainsi, l'opérateur (13) a pour spectre le segment $[a, b]$, mais les valeurs propres y manquent, c'est-à-dire il n'y a qu'un spectre continu.

2. Considérons dans l'espace l_2 un opérateur A, défini de la manière suivante :

$$A : (x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots). \tag{14}$$

Cet opérateur n'a pas de valeurs propres. (Démontrer !). L'opérateur A^{-1} est borné, mais il n'est défini dans l_2 que sur le sous-espace $x_1 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$ est un point du spectre de cet opérateur.

Exercice. Le spectre de l'opérateur (14) contient-il d'autres points, sauf $\lambda = 0$?

Remarques. (1) Tout opérateur linéaire borné, défini sur un espace de Banach complexe ayant au moins un élément non nul, possède un spectre non vide. Il y a des opérateurs dont le spectre est formé d'un seul point (par exemple, l'opérateur de multiplication par un nombre).

(2) Le théorème 7 peut être précisé de la manière suivante. Soit

$$r = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|}$$

(on peut démontrer que cette limite existe pour tout opérateur borné A) ; alors *le spectre de l'opérateur A se trouve tout entier dans le cercle de rayon r et de centre* 0. Le nombre r s'appelle *rayon spectral* de l'opérateur A.

(3) Les résolvantes R_μ et R_λ, correspondant aux points μ et λ, sont permutables et vérifient la relation

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)\, R_\mu R_\lambda$$

qui peut être facilement démontrée, en multipliant les deux membres de l'égalité par

$$(A - \lambda I)\,(A - \mu I).$$

On en déduit que si λ_0 est un point régulier de l'opérateur A, alors la dérivée de R_λ par rapport à λ pour $\lambda = \lambda_0$, c'est-à-dire la limite

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{R_{\lambda_0+\Delta\lambda} - R_{\lambda_0}}{\Delta\lambda}$$

existe (au sens de la convergence en norme d'opérateur) et a pour valeur $R^2_{\lambda_0}$.

E x e r c i c e. Soit A un opérateur auto-adjoint borné dans un espace de Hilbert complexe H. Démontrer que son spectre est un sous-ensemble borné fermé de l'axe réel.

§ 6. Opérateurs compacts

1. Définition et exemples d'opérateurs compacts. A la différence des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie, pour lesquels il existe une description exhaustive, l'étude des opérateurs linéaires arbitraires dans un espace de dimension infinie est un problème assez compliqué dont l'étendue est pratiquement impossible à imaginer. Cependant, certaines classes importantes de ces opérateurs peuvent être décrites de manière assez complète. L'une des plus importantes de ces classes est constituée par les opérateurs dits c o m p a c t s. Ces opérateurs sont, d'une part, assez proches par leurs propriétés de ceux *de dimension finie* (c'est-à-dire des opérateurs bornés qui transforment un espace donné en un espace de dimension finie) et admettent une description assez détaillée ; d'autre part, ils jouent un rôle important dans de nombreuses applications, et en premier lieu dans la théorie des équations intégrales qui fera l'objet du chap. IX.

D é f i n i t i o n 1. Un opérateur A qui applique un espace de Banach E dans lui-même (ou dans un autre espace de Banach E_1) s'appelle *opérateur compact* ou *complètement continu*, s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble précompact.

Dans un espace normé de dimension finie tout opérateur linéaire est compact, parce qu'il transforme tout ensemble borné en un ensemble borné, mais dans un espace de dimension finie tout ensemble borné est précompact.

Dans un espace de dimension infinie la compacité d'un opérateur est une condition beaucoup plus forte que la condition d'être simplement continu (c'est-à-dire borné). Par exemple, dans un espace de Hilbert l'opérateur identique est continu, mais nullement compact. (Démontrer cela indépendamment de l'exemple 1, considéré plus bas.)

Considérons quelques exemples.

1. Soit I l'opérateur identique dans un espace de Banach E. Montrons que si E est de dimension infinie, l'opérateur I n'est pas compact. Pour cela il suffit, évidemment, de montrer que dans E la boule unité (que l'opérateur I transforme, certainement, en elle-même) n'est pas précompacte. Cela est, à son tour, une conséquence du lemme suivant qui nous sera encore utile dans la suite.

L e m m e 1. *Soient* $x_1, x_2, \ldots$ *des vecteurs linéairement indépendants dans un espace normé* E *et soit* E_n *le sous-espace de* E *engendré par les vecteurs* $x_1, \ldots, x_n$. *Alors il existe une suite de vecteurs* $y_1, y_2, \ldots$ *vérifiant les conditions suivantes*:

$$1) \qquad \| y_n \| = 1; \quad 2) \ y_n \in E_n; \quad 3) \ \rho(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

où $\rho(y_n, E_{n-1})$ désigne la distance du vecteur y_n à l'ensemble E_{n-1}, c'est-à-dire

$$\inf_{x \in E_{n-1}} \| y_n - x \|.$$

D é m o n s t r a t i o n. En effet, comme les vecteurs $x_1, x_2, \ldots$ sont linéairement indépendants, $x_n \notin E_{n-1}$ et $\rho(x_n, E_{n-1}) = \alpha > 0$. Soit x^* un vecteur de E_{n-1} tel que $\| x_n - x^* \| < 2\alpha$. Alors, puisque $\alpha = \rho(x_n, E_{n-1}) = \rho(x_n - x^*, E_{n-1})$, le vecteur

$$y_n = \frac{x_n - x^*}{\| x_n - x^* \|}$$

vérifie toutes les conditions 1)-3). Le vecteur y_1 peut être pris égal à $\frac{x_1}{\|x_1\|}$. Le lemme est démontré.

Grâce à ce lemme, dans la boule unité de tout espace normé de dimension infinie, on peut construire une suite de vecteurs $\{y_n\}$ telle que $\rho(y_{n-1}, y_n) > \frac{1}{2}$. Il est clair qu'une telle suite ne contient aucune sous-suite convergente. Or, cela signifie justement que la précompacité n'a pas lieu.

2. Soit A un opérateur linéaire continu qui transforme l'espace de Banach E en un sous-espace de dimension finie de E. Un tel opérateur est compact, car il transforme tout sous-ensemble borné $M \subset E$ en un sous-ensemble borné d'un espace de dimension finie, donc en un ensemble précompact.

En particulier, dans un espace de Hilbert l'opérateur de projection orthogonale sur un sous-espace est compact si et seulement si ce sous-espace est de dimension finie.

3. Considérons dans l'espace l_2 l'opérateur A défini de la manière suivante: si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, alors

$$Ax = \left(x_1, \frac{1}{2} x_2, \ldots, \frac{1}{2^n} x_n, \ldots \right). \tag{1}$$

Cet opérateur est compact. En effet, comme tout ensemble borné dans l_2 est contenu dans une boule de cet espace, il suffit de démontrer que les images des boules sont précompactes; en vertu de la linéarité de l'opérateur A, il suffit de vérifier cela pour la boule unité. Mais l'opérateur (1) transforme la boule unité de l_2 en un ensemble de points

contenu dans le parallélépipède fondamental (cf. chap. II, § 7, nº 1). Par conséquent, cet ensemble est totalement borné, donc précompact.

Exercice. Soit $Ax = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$; à quelles conditions doit satisfaire la suite numérique $\{a_n\}$, pour que cet opérateur soit compact dans l_2?

4. Dans l'espace des fonctions continues $C[a, b]$ une classe importante d'opérateurs compacts est formée par les opérateurs qui peuvent être représentés sous la forme

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt. \tag{2}$$

Démontrons la proposition suivante: *si la fonction $K(s, t)$ est bornée sur le carré $a \leqslant s \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ et tous ses points de discontinuité sont situés sur un nombre fini de courbes*

$$t = \varphi_k(s), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

où φ_k sont des fonctions continues, alors la formule (2) *définit dans l'espace $C[a, b]$ un opérateur compact.*

En effet, remarquons tout d'abord que dans les conditions indiquées l'intégrale (2) existe, quel que soit $s \in [a, b]$ c'est-à-dire que la fonction $y(s)$ est définie. Soit

$$M = \sup_{a \leqslant s,\, t \leqslant b} |K(s, t)|$$

et soit G l'ensemble des points (s, t) qui au moins pour une valeur de $k = 1, 2, \ldots, n$ vérifient l'inégalité

$$|t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}.$$

La trace $G(s)$ de cet ensemble sur chaque droite $s = \text{const}$ est la réunion d'intervalles suivante

$$G(s) = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ t: |t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn} \right\}.$$

Soit F le complémentaire de l'ensemble G par rapport au carré $a \leqslant s, t \leqslant b$. Comme l'ensemble F est compact et la fonction $K(s, t)$ est continue sur F, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|K(s', t') - K(s'', t'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

pour tous les points (s', t'), (s'', t'') de F qui vérifient la condition

$$|s' - s''| + |t' - t''| < \delta. \tag{3}$$

Evaluons maintenant la différence $y(s') - y(s'')$ sous l'hypothèse que $|s' - s''| < \delta$. On a

$$|y(s') - y(s'')| \leqslant \int_a^b |K(s', t) - K(s'', t)| \cdot |x(t)|\, dt.$$

Pour évaluer l'intégrale du second membre de cette inégalité, divisons le segment d'intégration $[a, b]$ en deux parties P et Q, où $P = G(s') \cup G(s'')$ et Q est la partie qui reste du segment $[a, b]$. En remarquant que P est une réunion d'intervalles dont la longueur totale est inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{3M}$, on obtient

$$\int_P |K(s', t) - K(s'', t)| \cdot |x(t)|\, dt < \frac{2\varepsilon}{3} \| x \|.$$

L'intégrale sur Q admet, évidemment, l'évaluation suivante:

$$\int_Q |K(s', t) - K(s'', t)| \cdot |x(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{3} \| x \|.$$

Par conséquent,

$$|y(s') - y(s'')| < \varepsilon \| x \|. \tag{4}$$

L'inégalité (4) montre que la fonction $y(s)$ est continue, c'est-à-dire que la formule (2) définit bien un opérateur qui applique l'espace $C[a, b]$ dans lui-même. Cette même inégalité montre encore que si $\{x(t)\}$ est un ensemble borné dans $C[a, b]$, alors l'ensemble correspondant $\{y(s)\}$ est équicontinu. Enfin, si $\| x \| \leqslant C$, on a

$$\| y \| = \sup |y(s)| \leqslant \sup \int_a^b |K(s, t)| \cdot |x(t)|\, dt \leqslant M(b-a) \| x \|.$$

Ainsi donc, l'opérateur (2) transforme tout ensemble borné de $C[a, b]$ en un ensemble de fonctions uniformément borné et équicontinu, donc précompact.

4a. La condition que les points de discontinuité de la fonction $K(s, t)$ soient situés sur un nombre fini de courbes coupant les droites $s = \text{const}$ en un seul point est importante. Soit, par exemple,

$$K(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad s < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pour} \quad s \geqslant \frac{1}{2}; \end{cases}$$

l'opérateur (2) ayant un tel noyau sur le carré $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ et dont les points de discontinuité remplissent le segment $s = \frac{1}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, transforme la fonction $x(t) \equiv 1$ en une fonction discontinue.

4b. Si l'on pose $K(s, t) = 0$ pour $t < s$, l'opérateur (2) prend la forme

$$y(s) = \int_a^s K(s, t)\, x(t)\, dt. \tag{5}$$

Supposons la fonction $K(s, t)$ continue pour $t < s$; alors, d'après les considérations de l'exemple 4, il en résulte que l'opérateur (5) est compact dans $C[a, b]$.

Cet opérateur s'appelle *opérateur du type de Volterra* [1]).

R e m a r q u e. Conformément à la définition d'opérateur compact, adoptée plus haut, il est possible que l'image de la boule unité fermée ne soit pas compacte (bien que précompacte). En effet, considérons dans l'espace $C[-1, 1]$ l'opérateur d'intégration

$$Jx(s) = \int_{-1}^{s} x(t)\, dt;$$

d'après ce qu'on a démontré plus haut, J est un opérateur compact dans $C[-1, 1]$. Posons

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ nt, & \text{si } 0 < t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{n} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Alors $x_n \in C[-1, 1]$, $\|x_n\| = 1$ pour tous les n et

$$y_n(t) = Jx_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} nt^2, & \text{si } 0 < t \leqslant \frac{1}{n}, \\ t - \frac{1}{2n}, & \text{si } \frac{1}{n} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Il est clair que la suite $\{y_n\}$ converge dans $C[-1, 1]$ vers la fonction

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 1, & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

qui n'est image (dans l'application J) d'aucune fonction de $C[a, b]$, puisque la fonction $y(t)$ n'est pas continue.

Cependant, on peut démontrer que si l'espace est réflexif (par exemple, hilbertien), l'image de la boule unité fermée, dans une application linéaire compacte, est compacte.

---

[1]) Vito Volterra, mathématicien italien, on lui doit d'importants travaux portant sur l'analyse fonctionnelle et les équations intégrales.

2. Propriétés fondamentales des opérateurs compacts.

Théorème 1. *Si* $\{A_n\}$ *est une suite d'opérateurs compacts dans un espace de Banach* E, *convergeant en norme vers un opérateur* A, *alors l'opérateur* A *est aussi compact.*

Démonstration. Pour établir la compacité de l'opérateur A, il suffit de montrer que, quelle que soit la suite bornée x_1, x_2, . . ., x_n, . . . d'éléments de E, de la suite $\{Ax_n\}$ on peut extraire une sous-suite convergente.

L'opérateur A_1 étant compact, de la suite $\{A_1x_n\}$ on peut extraire une sous-suite convergente. Soit

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_n^{(1)},\ \ldots \tag{6}$$

une sous-suite de $\{x_n\}$ telle que la suite $\{A_1x_n{}^{(1)}\}$ soit convergente. Considérons maintenant la suite $\{A_2x_n{}^{(1)}\}$. A son tour, elle contient aussi une sous-suite convergente. Soit

$$x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_n^{(2)},\ \ldots$$

une suite extraite de (6) telle que la suite $\{A_2\, x_n^{(2)}\}$ soit convergente. Alors la suite $\{A_1x_n{}^{(2)}\}$ est, évidemment, aussiconvergente. En raisonnant de même, choisissons dans $\{x^{(2)}\}$ une sous-suite

$$x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ \ldots,\ x_n^{(3)},\ \ldots$$

telle que $\{A_3x_n^{(3)}\}$ soit convergente, etc. Considérons enfin la suite diagonale

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_n^{(n)},\ \ldots$$

Chacun des opérateurs A_1, A_2, . . ., A_n, . . . la transforme en une suite convergente. Montrons que l'opérateur A la transforme également en une suite convergente. La compacité de A s'en trouvera établie. Comme l'espace E est complet, il suffit de montrer que $\{Ax_n^{(n)}\}$ est une suite de Cauchy. On a

$$\| Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)} \| \leqslant \| Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)} \| + \\ + \| A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)} \| + \| A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)} \|. \tag{7}$$

Soit $\| x_n \| \leqslant C$; choisissons d'abord k de façon que $\| A - A_k \| < \frac{\varepsilon}{3C}$, ensuite choisissons N tel que pour tous les $n > N$ et $m > N$ on ait l'inégalité

$$\| A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)} \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(cela est possible, étant donné que la suite $\{A_kx_n^{(n)}\}$ est convergente). Dans ces conditions, de (7) on déduit que

$$\| Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)} \| < \varepsilon$$

pour tous les n et m suffisamment grands.

Le théorème est démontré.

Il est aisé de vérifier qu'une combinaison linéaire d'opérateurs compacts est compacte. Par conséquent, dans l'espace $\mathcal{L}(E, E)$ de tous les opérateurs linéaires bornés, définis sur E, les opérateurs compacts forment us sous-espace vectoriel fermé.

On se propose maintenant de vérifier, si l'ensemble des opérateurs compacts est clos par rapport à la multiplication des opérateurs. En réalité, une proposition essentiellement plus forte a lieu.

Théorème 2. *Si A est un opérateur compact et B est un opérateur borné, les opérateurs AB et BA sont compacts.*

Démonstration. Si l'ensemble $M \subset E$ est borné, l'ensemble BM l'est aussi. Par conséquent, l'ensemble ABM est précompact, ce qui signifie que l'opérateur AB est compact. De même, si M est borné, AM est précompact, d'où, en raison de la continuité de B, l'ensemble BAM est aussi précompact, ce qui signifie que l'opérateur BA est compact. Le théorème est démontré.

Corollaire. *Dans un espace E de dimension infinie l'inverse d'un opérateur compact ne peut pas être borné.*

En effet, dans le cas contraire, l'opérateur identique $I = A^{-1}A$ serait compact dans E, ce qui est impossible (cf. exemple 1).

Remarque. Le théorème 2 montre que les opérateurs compacts forment dans l'anneau des opérateurs bornés de $\mathcal{L}(E, E)$ un idéal bilatère [1]).

Théorème 3. *L'opérateur adjoint d'un opérateur compact est compact.*

Démonstration. Soit A un opérateur compact dans un espace de Banach E. Montrons que l'opérateur adjoint A^*, défini dans E^*, transforme tout sous-esnsemble borné de E^* en un sous-ensemble précompact. Etant donné que tout sous-ensemble borné d'un espace normé est contenu dans une boule, il suffit de montrer que A^* transforme chaque boule en un ensemble précompact. En vertu de la linéarité de l'opérateur A^*, il suffit de montrer que l'image A^*S^* de la boule unité fermée $S^* \subset E^*$ est précompacte.

Considérons les éléments de E^* comme fonctions dont le domaine de définition n'est pas l'espace E tout entier, mais seulement le compact $\overline{AS}$, c'est-à-dire la fermeture de l'image AS de la boule unité dans l'application A. Alors l'ensemble Φ des fonctions correspondant aux fonctionnelles de S^* sera uniformément borné et équicontinu. En effet, si $\|\varphi\| \leqslant 1$, on a

$$\sup_{x \in \overline{AS}} |\varphi(x)| = \sup_{x \in AS} |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \sup_{x \in S} \|Ax\| \leqslant \|A\|$$

et $$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x' - x''\| \leqslant \|x' - x''\|.$$

---

[1]) On appelle *idéal* (bilatère) d'un anneau R tout sous-anneau $\mathfrak{U}$ de R tel que si $a \in \mathfrak{U}$, $r \in R$, alors $ar \in \mathfrak{U}$ et $ra \in \mathfrak{U}$.

Par conséquent, cet ensemble Φ est précompact dans l'espece $C\,[\overline{AS}]$ (en vertu du théorème d'Arzelà). Mais l'ensemble Φ, muni de la métrique induite par la métrique habituelle de l'espace des fonctions continues $C\,[\overline{AS}]$, est isométrique à l'ensemble A^*S^* (muni de la métrique engendrée par la norme de l'espace E^*). En effet, si $g_1, g_2 \in S^*$, on a

$$\| A^*g_1 - A^*g_2 \| = \sup_{x \in S} |(A^*g_1 - A^*g_2, x)| =$$
$$= \sup_{x \in S} |((g_1 - g_2), Ax)| = \sup_{x \in S} |(g_1 - g_2, z)| =$$
$$= \sup_{x \in \overline{AS}} |(g_1 - g_2, z)| = \rho(g_1, g_2).$$

Comme l'ensemble Φ est précompact, il est totalement borné; par conséquent, son isométrique A^*S^* est aussi un ensemble totalement borné. De ce fait, A^*S^* est précompact dans E.

Le théorème est démontré.

R e m a r q u e. On vérifie sans peine que l'ensemble Φ est fermé dans $C(\overline{AS})$, de sorte qu'il est compact; alors l'ensemble A^*S^* est aussi compact, bien que (comme le montre la remarque, page 233) l'image de la boule unité fermée dans une application complètement continue arbitraire puisse ne pas être compacte. La situation rencontrée dans le théorème que nous venons de démontrer diffère du cas général par le fait que la boule unité fermée S^* de E^* est compacte pour la topologie $*$-faible de l'espace E^* (cf. théorème 3, § 3). C'est ce qui implique la compacité (pour la métrique de l'espace E^*) de l'image de l'ensemble S^* par tout opérateur compact.

E x e r c i c e s. 1. Soit A un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach. Démontrer que si l'opérateur A^* est compact, alors A est aussi compact.

2. Pour qu'un opérateur linéaire A dans un espace de Hilbert H soit compact, il faut et il suffit que l'opérateur (hermitien) adjoint A^* soit compact.

3. Valeurs propres d'un opérateur compact.

T h é o r è m e 4. *Un opérateur compact A dans un espace de Banach E ne peut avoir, pour chaque $\delta > 0$, qu'un nombre fini de vecteurs propres linéairement indépendants, correspondant aux valeurs propres dont le module est plus grand que δ.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ une suite de valeurs propres de l'opérateur A (non nécessairement toutes différentes) telles que $|\lambda_n| > \delta$; soit $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ la suite correspondante de vecteurs propres et supposons que ces vecteurs soient linéairement indépendants.

Usons du lemme 1 (page 230) et construisons une suite de vecteurs $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ telle que

$$1) \quad y_n \in E_n; \ 2) \ \|y_n\| = 1;$$

$$3) \ \rho(y_n, E_{n-1}) = \inf_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2},$$

où E_n désigne le sous-espace engendré par les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En vertu de l'inégalité $|\lambda_n| > \delta$, la suite $\left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ est bornée. Montrons que la suite des images $\left\{A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}$ ne contient aucune sous-suite convergente. En effet, soit $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$; alors

$$A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n = y_n + z_n,$$

où

$$z_n = \sum_{k=1}^{n=1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k \in E_{n-1}.$$

Donc, pour tous les p et q, tels que $p > q$, on a

$$\left\| A\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right) \right\| = \| y_p + z_p - (y_q + z_q) \| =$$

$$= \| y_p - (y_q + z_q - z_p) \| > \frac{1}{2},$$

car $y_q + z_q - z_p \in E_{p-1}$.

Or, ceci contredit l'hypothèse que l'opérateur A est compact.

Du théorème démontré on déduit, en particulier, que le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants, correspondant à une valeur propre donnée $\lambda_n \neq 0$ d'un opérateur compact A, ne peut être que fini.

De ce théorème il résulte encore que le nombre de valeurs propres λ_n d'un opérateur compact A, appartenant à l'extérieur du disque $|\lambda| > \delta > 0$, est toujours fini et que l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'opérateur A peut être rangé dans l'ordre de non-croissance de leurs modules: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$

4. Opérateurs compacts dans un espace de Hilbert. Plus haut nous avons parlé des opérateurs compacts dans un espace de Banach arbitraire. Complétons maintenant les renseignements obtenus par quelques nouveaux faits se rapportant aux opérateurs compacts dans un espace de Hilbert.

Nous avons dit qu'un opérateur A est compact, s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble précompact. Comme $H = H^*$,

c'est-à-dire H est le dual d'un espace séparable, tous les ensembles bornés de H (et ceux-là seulement) sont faiblement précompacts. Par conséquent, dans un espace de Hilbert on peut appeler opérateur compact tout opérateur qui transforme tout ensemble faiblement précompact en un ensemble précompact pour la topologie forte.

Enfin, dans certains cas il est commode d'adopter la définition suivante de la compacité d'un opérateur dans un espace de Hilbert: un opérateur A est dit compact dans H, s'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente. En effet, supposons cette dernière condition remplie et soit M un ensemble borné dans H. Tout sous-ensemble infini de M contient une suite faiblement convergente. Si l'opérateur A transforme cette suite en une suite fortement convergente, l'ensemble AM est précompact. Réciproquement, soient A un opérateur compact, $\{x_n\}$ une suite faiblement convergente et x sa limite faible. Alors $\{Ax_n\}$ contient une sous-suite fortement convergente. D'autre part, en vertu de la continuité de A, la suite $\{Ax_n\}$ converge faiblement vers Ax, ce qui implique que $\{Ax_n\}$ ne peut pas avoir plus d'un point d'accumulation. Par conséquent, $\{Ax_n\}$ est une suite convergente.

5. Opérateurs compacts auto-adjoints dans H. Pour les opérateurs linéaires auto-adjoints dans un espace euclidien de dimension finie on a le théorème bien connu sur la possibilité de réduire la matrice d'un tel opérateur à la forme diagonale par le choix d'une base orthonormée convenable. Dans ce numéro nous étendrons ce théorème aux opérateurs compacts auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Les résultats de ce numéro sont valables aussi bien pour un espace de Hilbert réel que pour un espace de Hilbert complexe. Pour fixer les idées, nous supposerons H complexe.

Etablissons tout d'abord quelques propriétés des vecteurs et des valeurs propres des opérateurs auto-adjoints dans H, tout à fait analogues, d'ailleurs, aux propriétés correspondantes des opérateurs auto-adjoints dans un espace de dimension finie.

I. *Toutes les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint A dans H sont réelles.*

En effet, soit $Ax = \lambda x$, $\| x \| \neq 0$; alors

$$\lambda (x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda} (x, x),$$

d'où $\lambda = \bar{\lambda}$.

II. *Les vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint dans H, associés à des valeurs propres distinctes, sont orthogonaux.*

En effet, si $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ et $\lambda \neq \mu$, on a

$$\lambda (x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu (x, y),$$

d'où $(x, y) = 0$.

Démontrons maintenant le théorème fondamental suivant.

Théorème 5 (de Hilbert-Schmidt). *Pour tout opérateur linéaire compact auto-adjoint A dans un espace de Hilbert H il existe un système orthonormé $\{\varphi_n\}$ de vecteurs propres, associés aux valeurs propres non nulles $\{\lambda_n\}$, tel que tout élément $\xi \in H$ peut s'écrire de manière unique sous la forme*

$$\xi = \sum_k c_k \varphi_k + \xi',$$

où $\xi' \in \operatorname{Ker} A$, c'est-à-dire $A\xi' = 0$; *en outre,*

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k$$

et si le système $\{\varphi_n\}$ est infini, on a

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Pour la démonstration de ce théorème nous aurons besoin des propositions auxiliaires suivantes.

Lemme 2. *Si la suite $\{\xi_n\}$ converge faiblement vers ξ et l'opérateur linéaire A est compact, on a*

$$Q(\xi_n) = (A\xi_n, \xi_n) \to (A\xi, \xi) = Q(\xi).$$

Démonstration. Pour tout n on a

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \leqslant$$
$$\leqslant |(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| + |(A\xi, \xi_n) - (A\xi, \xi)|.$$

Mais

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| \leqslant \|\xi_n\| \cdot \|A(\xi_n - \xi)\|$$

et

$$|(A\xi_n, \xi) - (A\xi, \xi)| = |(\xi, A(\xi_n - \xi))| \leqslant$$
$$\leqslant \|\xi\| \cdot \|A(\xi_n - \xi)\|;$$

comme les nombres $\|\xi_n\|$ forment un ensemble borné et $\|A(\xi_n - \xi)\| \to 0$, on en déduit que

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \to 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 3. *Si la fonctionnelle*

$$|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|,$$

où A est un opérateur linéaire auto-adjoint borné, atteint son maximum sur la boule unité au point ξ_0, alors

$$(\xi_0, \eta) = 0$$

implique

$$(A\xi_0, \eta) = (\xi_0, A\eta) = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que $\|\xi_0\| = 1$. Posons

$$\xi = \frac{\xi_0 + a\eta}{\sqrt{1 + |\alpha|^2 \|\eta\|^2}},$$

où a est un nombre complexe arbitraire. Alors $\|\xi_0\| = 1$ implique que

$$\|\xi\| = 1.$$

D'autre part, on a

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + |a|^2 \|\eta\|^2} [Q(\xi_0) + \bar{a}(A\xi_0, \eta) + a\overline{(A\xi_0, \eta)} + |a|^2 Q(\eta)].$$

Le nombre a peut être choisi de module arbitrairement petit et de façon que $\bar{a}(A\xi_0, \eta)$ soit un nombre réel. Alors $a\overline{(A\xi_0, \eta)} = \bar{a}(A\xi_0, \eta)$ et on a

$$Q(\xi) = Q(\xi_0) + 2\bar{a}(A\xi_0, \eta) + O(|a|^2).$$

Si $(A\xi_0, \eta) \neq 0$, il existe a tel que

$$|Q(\xi)| > |Q(\xi_0)|,$$

ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

Du lemme 3 on déduit immédiatement que si $|Q(\xi)|$ atteint son maximum pour $\xi = \xi_0$, alors ξ_0 est un vecteur propre de l'opérateur $\boldsymbol{A}$.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 5. Construisons les éléments φ_k par récurrence, dans l'ordre de décroissance des valeurs absolues des valeurs propres correspondantes:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots$$

Pour construire l'élément φ_1, considérons l'expression $|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|$ et démontrons qu'elle atteint sur la boule unité son maximum. Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite, telle que $\|\xi_n\| = 1$ et

$$|(A\xi, \xi_n)| \to S \text{ lorsque } n \to \infty,$$

où

$$S = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} |(A\xi, \xi)|.$$

Supposons que $S > 0$. Etant donné que dans H la boule unité est faiblement compacte, de la suite $\{\xi_n\}$ on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers un élément η. En outre, $\|\eta\| \leqslant 1$ et selon le lemme 2 on a

$$|(A\eta, \eta)| = S.$$

C'est cet élément η que nous prendrons pour φ_1. Il est clair que $\|\eta\|$ vaut exactement 1. (En effet, supposons $\|\eta\| < 1$ et posons $\eta_1 = \frac{\eta}{\|\eta\|}$; alors $\|\eta_1\| = 1$ et $|(A\eta_1, \eta_1)| > S$, ce qui est en contra-

diction avec la définition de S.) En outre,

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1,$$

d'où

$$|\lambda_1| = \frac{|(A\varphi_1, \varphi_1)|}{(\varphi_1, \varphi_1)} = |(A\varphi_1, \varphi_1)| = S.$$

Supposons maintenant que les vecteurs propres

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

associés aux valeurs propres

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,$$

soient déjà construits. Désignons par $M(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ le sous-espace engendré par les vecteurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Considérons la fonctionnelle

$$|(A\xi, \xi)|,$$

définie sur l'ensemble des éléments appartenant à l'ensemble

$$M_n^\perp = H \ominus M(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

(c'est-à-dire orthogonaux à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$) et vérifiant la condition $\|\xi\| \leqslant 1$. L'ensemble $M_n^\perp$ est un sous-espace invariant par rapport à A (car l'espace $M(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est invariant et l'opérateur A est auto-adjoint). En appliquant à $M_n^\perp$ les mêmes raisonnements que plus haut, nous arrivons à la conclusion que dans $M_n^\perp$ il existe un vecteur propre de l'opérateur A (désignons-le par φ_{n+1}).

Deux cas peuvent se présenter: 1) il existe un entier naturel n_0 tel que dans le sous-espace $M_{n_0}^\perp$ on a $(A\xi, \xi) \equiv 0$; 2) $(A\xi, \xi) \not\equiv 0$ sur $M_n^\perp$ quel que soit n.

Dans le premier cas, d'après le lemme 3, l'opérateur A transforme $M_{n_0}^\perp$ en $\{0\}$, de sorte que le sous-espace $M_{n_0}^\perp$ est composé tout entier des vecteurs propres, correspondant à $\lambda = 0$. Le système des vecteurs propres construits $\{\varphi_n\}$ contient un nombre fini d'éléments.

Dans le deuxième cas on obtient une suite infinie de vecteurs propres $\{\varphi_n\}$ dont chacun correspond à une valeur propre $\lambda_n \neq 0$. Montrons que $\lambda_n \to 0$. La suite $\{\varphi_n\}$ (comme toute suite orthonormée) converge faiblement vers 0; c'est pourquoi la suite d'éléments $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ converge vers zéro en norme, d'où $|\lambda_n| = \|A\varphi_n\| \to 0$.

Soit

$$M^\perp = H \ominus M(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \bigcap_n M_n^\perp \neq 0.$$

Si $\xi \in M^\perp$ et $\xi \neq 0$, alors $(A\xi, \xi) \leqslant \lambda_n \|\xi\|^2$ pour tous les n, c'est-à-dire

$$(A\xi, \xi) = 0.$$

En vertu du lemme 3 (pour $\max |(A\xi, \xi)| = 0$), appliqué à $M^{\perp}$, on obtient que $A\xi = 0$, ce qui signifie que l'opérateur A transforme $M^{\perp}$ en $\{0\}$.

D'après la construction du système $\{\varphi_n\}$ il est clair que tout vecteur peut être mis sous la forme

$$\xi = \sum c_k \varphi_k + \xi', \text{ où } A\xi' = 0,$$

d'où il résulte que

$$A\xi = \sum \lambda_k c_k \varphi_k.$$

Le théorème est démontré.

Ce théorème joue un rôle important dans la théorie des équations intégrales dont il sera question au chap. IX.

Remarque. Le théorème démontré signifie que pour tout opérateur auto-adjoint compact A dans H il existe une base orthogonale de l'espace H, composée des vecteurs propres de cet opérateur. En effet, pour obtenir une telle base, il suffit de compléter le système des vecteurs propres $\{\varphi_n\}$, construit dans la démonstration du théorème, par une base orthogonale arbitraire du sous-espace $M^{\perp}$ que l'opérateur A transforme en $\{0\}$. En d'autres termes, le résultat obtenu ici est tout à fait analogue au théorème sur la réduction de la matrice d'un opérateur auto-adjoint dans un espace euclidien de dimension finie à la forme diagonale dans une base orthogonale.

Pour les opérateurs dans un espace à n dimensions qui ne sont pas auto-adjoints une telle réduction est, en général, impossible, mais on a toutefois le théorème suivant : *dans un espace de dimension n toute application linéaire admet au moins un vecteur propre.* On vérifie sans peine que cette assertion ne s'étend pas aux opérateurs compacts dans H. En effet, soit A un opérateur défini dans l_2 par la formule

$$Ax = A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{n-1}, \ldots\right). \quad (8)$$

Cet opérateur est compact (vérifier !), mais n'a aucun vecteur propre (démontrez cela).

Exercice. Déterminer le spectre de l'opérateur (8).

Mesure, fonctions mesurables, intégrale

La notion de mesure $\mu(A)$ d'un ensemble A est une généralisation naturelle des notions suivantes:

1) longueur $l(\Delta)$ d'un segment Δ,
2) aire $S(F)$ d'une figure plane F,
3) volume $V(G)$ d'un corps G,
4) accroissement $\varphi(b) - \varphi(a)$ d'une fonction non décroissante $\varphi(t)$ sur un intervalle semi-ouvert $[a, b)$,
5) intégrale d'une fonction non négative, prise sur un domaine de la droite numérique, du plan ou de l'espace, etc.

Cette notion apparut pour la première fois dans la théorie des fonctions d'une variable réelle et se naturalisa ensuite dans la théorie des probabilités, dans la théorie des systèmes dynamiques, dans l'analyse fonctionnelle et dans beaucoup d'autres domaines des matématiques.

Dans le § 1 de ce chapitre nous exposerons la théorie de la mesure pour des ensembles du plan, en partant de la notion d'aire du rectangle. La théorie générale de la mesure sera exposée dans les §§ 2 et 3. Le lecteur remarquera facilement que tous les raisonnements du § 1 ont un caractère général et se répètent dans la théorie abstraite sans modifications importantes.

§ 1. Mesure des ensembles du plan

1. Mesure des ensembles élémentaires. Considérons une famille $\mathfrak{S}$ d'ensembles du plan (x, y) dont chacun est défini par une inégalité de la forme

$$a \leqslant x \leqslant b,$$
$$a < x \leqslant b,$$
$$a \leqslant x < b,$$
$$a < x < b$$

et une inégalité de la forme

$$c \leqslant y \leqslant d,$$
$$c < y \leqslant d,$$
$$c \leqslant y < d,$$
$$c < y < d,$$

où a, b, c et d sont des nombres arbitraires. Les ensembles appartenant à cette famille s'appellent *rectangles*. Un rectangle fermé, défini par les inégalités

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

représente soit un rectangle au sens habituel (avec sa frontière), si $a < b$ et $c < d$, soit un segment de droite (si $a = b$ et $c < d$ ou $a < b$ et $c = d$), soit un point (si $a = b$ et $c = d$), soit, enfin, un ensemble vide (si $a > b$ ou $c > d$). Un rectangle ouvert

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

représente, suivant les relations existant entre les nombres a, b, c et d, un rectangle sans frontière ou un ensemble vide. Chacun des rectangles des types qui restent (nous les appellerons semi-ouverts) peut être soit un rectangle habituel sans un, deux ou trois côtés, soit un intervalle ouvert ou semi-ouvert, soit, enfin, un ensemble vide.

Désignons l'ensemble de tous les rectangles du plan par $\mathfrak{S}$.

Définissons la mesure de chaque rectangle en conformité avec la notion élémentaire bien connue d'aire. Plus précisément :

a) la mesure d'un ensemble vide est égale à 0 ;

b) la mesure d'un rectangle non vide (fermé, ouvert ou semi-ouvert), défini par les nombres a, b, c et d, est égale à

$$(b - a)\ (d - c).$$

Ainsi, à tout rectangle P de $\mathfrak{S}$ se trouve associé un nombre $m\,(P)$, sa mesure, qui vérifie les conditions suivantes :

1) la mesure $m\,(P)$ prend des valeurs réelles non négatives ;

2) la mesure $m\,(P)$ est *additive*, c'-à-d. si $P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ et $P_i \cap P_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors

$$m\,(P) = \sum_{k=1}^{n} m\,(P_k).$$

Le problème est encore d'étendre, sans violer les propriétés 1) et 2), la mesure $m\,(P)$, définie ici pour les rectangles, à des ensembles plus généraux.

Nous étendrons d'abord la notion de mesure aux ensembles dits élémentaires. Un ensemble de points du plan est dit *élémentaire*, s'il peut être mis au moins d'une façon sous la forme d'une réunion finie de rectangles deux à deux disjoints.

Dans la suite nous aurons besoin du théorème suivant.

Théorème 1. *La réunion, l'intersection, la différence et la différence symétrique de deux ensembles élémentaires sont aussi des ensembles élémentaires.*

Ainsi, conformément à la terminologie introduite au § 5, chap. I, les ensembles élémentaires forment un a n n e a u.

D é m o n s t r a t i o n. Il est clair que l'intersection de deux rectangles est un rectangle. Donc, si

$$A = \bigcup_k P_k \quad \text{et} \quad B = \bigcup_j Q_j$$

sont deux ensembles élémentaires, leur intersection

$$A \cap B = \bigcup_{k,\, j} (P_k \cap Q_j)$$

est aussi un ensemble élémentaire.

Il est aisé de vérifier que la différence de deux rectangles est un ensemble élémentaire. Par conséquent, si d'un rectangle quelconque on soustrait un ensemble élémentaire, on obtient un ensemble élémentaire (comme intersection d'ensembles élémentaires). Soient maintenant A et B deux ensembles élémentaires. Il existe, évidemment, un rectangle P contenant chacun d'eux. Alors, d'après ce qui précède, l'ensemble

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$$

set élémentaire. Ceci et les égalités

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B)$$

et

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

impliquent que la différence et la différence symétrique de deux ensembles élémentaires sont des ensembles élémentaires.

Le théorème est démontré.

Définissons maintenant la mesure $m'(A)$ d'un ensemble élémentaire de la manière suivante : si

$$A = \bigcup_k P_k,$$

où P_k sont des rectangles deux à deux disjoints, alors

$$m'(A) = \sum_k m(P_k).$$

Montrons que $m'(A)$ ne dépend pas de la façon de décomposer A en une réunion finie de rectangles. Soit

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j,$$

où P_k et Q_j sont des rectangles et $P_i \cap P_k = \varnothing$, $Q_i \cap Q_k = \varnothing$ pour $i \neq k$. Comme l'intersection $P_k \cap Q_j$ de deux rectangles est un rectangle, en vertu de l'additivité de la mesure pour les rectangles, on a

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{k,\, j} m(P_k \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j).$$

En particulier, pour les rectangles la mesure m' coïncide avec la mesure initiale m.

Il est aisé de voir que la mesure des ensembles élémentaires ainsi définie est non négative et additive.

Etablissons maintenant une propriété importante de la mesure d'un ensemble élémentaire.

Théorème 2. *Si A est un ensemble élémentaire et $\{A_n\}$ est une famille finie ou dénombrable d'ensembles élémentaires, telle que*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

alors

$$m'(A) \leqslant \sum_n m'(A_n). \tag{1}$$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble élémentaire donné A il existe, évidemment, un ensemble élémentaire fermé $\bar{A}$ inclus dans A et vérifiant la condition

$$m'(\bar{A}) \geqslant m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Il suffit de remplacer chacun des k rectangles P_i qui composent A par un rectangle fermé situé à son intérieur et ayant l'aire plus grande que $m(P_i) - \frac{\varepsilon}{2k}$.)

D'autre part, pour chaque A_n on peut trouver un ensemble élémentaire ouvert $\tilde{A}_n$ contenant A_n et vérifiant la condition

$$m(\tilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Il est clair que

$$\bar{A} \subset \bigcup_n \tilde{A}_n.$$

De $\{\tilde{A}_n\}$ (en vertu du lemme de Heine-Borel) on peut extraire une famille finie $\tilde{A}_{n_1}, \ldots, \tilde{A}_{n_s}$ recouvrant $\bar{A}$. Il est évident que

$$m'(\bar{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i})$$

(car sinon $\bar{A}$ se trouverait recouvert par une famille finie de rectangles dont l'aire totale est inférieure à $m'(\bar{A})$, ce qui est impossible). Par conséquent,

$$m'(A) \leqslant m'(\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n m'(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_n m'(A_n) + \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_n m'(A_n) + \varepsilon,$$

d'où, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient (1).

La propriété de la mesure m', établie par le théorème 2 (la mesure d'un ensemble est inférieure ou égale à la somme des mesures des ensembles qui le recouvrent, pris en nombre fini ou dénombrable), s'appelle *sous-additivité.* Elle implique la propriété dite *additivité dénombrable* ou *σ-additivité* qui consiste en ceci.

Supposons que l'ensemble élémentaire A soit mis sous la forme d'une réunion d é n o m b r a b l e d'ensembles élémentaires d i s j o i n t s A_n $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

alors

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

(c.-à-d. la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles disjoints est égale à la somme des mesures de ces ensembles).

En effet, grâce à l'additivité, pour tout N on a:

$$m'(A) \geqslant m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n).$$

En passant à la limite pour $N \to \infty$, on obtient

$$m'(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

En vertu du théorème 2, l'inégalité de sens contraire est aussi vraie. Ainsi, l'additivité dénombrable de la mesure m' est démontrée.

R e m a r q u e. Le lecteur peut se faire l'impression que l'additivité dénombrable de la mesure sur le plan s'obtient automatiquement de l'additivité de cette mesure par le passage à la limite. En réalité il n'en est pas ainsi (dans la démonstration du théorème 2, en utilisant le lemme de Heine-Borel, nous nous sommes basés essentiellement sur la liaison existant entre les propriétés métriques et topologiques des ensembles du plan). Au § 2, lors de l'étude de la mesure sur des ensembles abstraits arbitraires, nous verrons que l'additivité de la mesure n'entraîne pas, en général, son additivité dénombrable.

2. Mesure de Lebesgue sur le plan. Les ensembles élémentaires n'épuisent pas tous les ensembles que l'on rencontre en géométrie et en analyse classique. C'est pourquoi il est naturel de chercher à étendre la notion de mesure, sans violer ses propriétés fondamentales, à des ensembles plus généraux que les réunions finies de rectangles ayant les côtés parallèles aux axes des coordonnées.

Une solution, en un certain sens complète, de ce problème a été donnée par H. Lebesgue au début du XX siècle.

Pour exposer la théorie de la mesure de Lebesgue nous serons amenés à considérer non seulement des réunions finies, mais aussi des réunions infinies de rectangles. Pour ne pas nous heurter dès le début à des ensembles « de mesure infinie », bornons-nous d'abord aux ensembles contenus entièrement dans le carré $E = \{0 \leqslant x \leqslant 1 ; 0 \leqslant \leqslant y \leqslant 1\}$.

Sur l'ensemble de tous ces ensembles définissons une fonction $\mu^*(A)$ de la manière suivante.

D é f i n i t i o n 1. On appelle *mesure extérieure* d'un ensemble A le nombre

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup P_k} \sum_k m(P_k), \tag{1}$$

où la borne inférieure s'étend à tous les recouvrements de l'ensemble A par des familles finies ou dénombrables de rectangles.

R e m a r q u e s. 1. En considérant dans la définition de la mesure extérieure des recouvrements constitués non seulement de rectangles, mais d'ensembles élémentaires arbitraires (pris en nombre fini ou dénombrable), nous obtiendrons, évidemment, la même valeur de $\mu^*(A)$, car tout ensemble élémentaire est une réunion finie de rectangles.

2. Si A est un ensemble élémentaire, alors $\mu^*(A) = m'(A)$. En effet, soient $P_1, \ldots, P_n$ les rectangles composant A. Alors, par définition,

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i).$$

Comme les rectangles P_i recouvrent A, on a $\mu^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(P_i) = m'(A)$. Mais si $\{Q_j\}$ est une famille finie ou dénombrable quelconque de rectangles recouvrant A, d'après le théorème 2 on a $m'(A) \leqslant \sum_j m(Q_j)$; par conséquent, $\mu^* = m'(A)$.

T h é o r è m e 3. *Si*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

où $\{A_n\}$ *est une famille finie ou dénombrable d'ensembles, alors*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n). \tag{2}$$

En particulier, si $A \subset B$, *on a* $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après la définition de la mesure extérieure, pour chaque A_n il existe une famille finie ou dénombrable de

rectangles $\{P_{nk}\}$ telle que $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$ et

$$\sum_k m(P_{nk}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi arbitrairement. Mais alors

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk}$$

et

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit l'affirmation du théorème.

Puisque pour les ensembles élémentaires m' et μ^* coïncident, le théorème 2 est un cas particulier du théorème 3.

D é f i n i t i o n 2. Un ensemble A est dit *mesurable* (au sens de Lebesgue) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble élémentaire B tel que

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{3}$$

La fonction μ^*, considérée seulement pour des ensembles mesurables, s'appelle *mesure de Lebesgue*. Elle sera notée par μ.

R e m a r q u e. La définition de la notion de mesurabilité, formulée plus haut, a un sens intuitif simple. Elle signifie qu'un ensemble est mesurable, s'il peut être « approché avec n'importe quelle précision » par des ensembles élémentaires.

Ainsi, nous avons défini une famille $\mathfrak{M}_E$ d'ensembles dits mesurables et sur cette famille une fonction μ dite mesure de Lebesgue. Notre but immédiat est d'établir les résultats suivants :

1. *La famille $\mathfrak{M}_E$ des ensembles mesurables est close par rapport aux réunions et intersections finies ou dénombrables* (c.-à-d. représente une σ-algèbre, cf. définition n° 4, § 5, chap. I).

2. *La fonction μ est σ-additive sur $\mathfrak{M}_E$.*

Les théorèmes ci-dessous représentent des étapes de la démonstration de ces assertions.

T h é o r è m e 4. *Le complémentaire d'un ensemble mesurable est un ensemble mesurable.*

Cela résulte aussitôt de l'égalité

$$(E \setminus A) \triangle (E \setminus B) = A \triangle B$$

qui est immédiate.

T h é o r è m e 5. *La réunion et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles mesurables sont des ensembles mesurables.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit, évidemment, de démontrer cela pour deux ensembles. Soient A_1 et A_2 deux ensembles mesurables.

Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux ensembles élémentaires B_1 et B_2 tels que

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Etant donné que

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

on a

$$\mu^*[A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)] \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon.$$

Comme $B_1 \cup B_2$ est un ensemble élémentaire, on en déduit que l'ensemble $A_1 \cup A_2$ est mesurable.

La mesurabilité de l'intersection de deux ensembles mesurables découle du théorème 4 et de la relation

$$A_1 \cap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)]. \tag{4}$$

Corollaire. *La différence et la différence symétrique de deux ensembles mesurables sont des ensembles mesurables.*

Ceci resulte des théorèmes 4 et 5 et des égalités

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (E \setminus A_2),$$
$$A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1).$$

Théorème 6. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles mesurables deux à deux disjoints, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \tag{5}$$

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant.

Lemme. *Quels que soient les ensembles A et B,*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B).$$

Démonstration du lemme. Comme

$$A \subset B \cup (A \triangle B),$$

en vertu du théorème 3 on a

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B).$$

Si $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B)$, le lemme résulte immédiatement de cette inégalité. Dans le cas où $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ le lemme découle de l'inégalité

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B)$$

qui peut être établie de la même façon.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 6. Comme dans le théorème 5, il suffit de considérer le cas de deux ensembles. Choisissons $\varepsilon > 0$ arbitraire et deux ensembles élémentaires B_1 et B_2 tels que

$$\mu^* (A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \tag{6}$$

$$\mu^* (A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{7}$$

Posons $A = A_1 \cup A_2$ et $B = B_1 \cup B_2$. L'ensemble A est mesurable en vertu du théorème 5. Les ensembles A_1 et A_2 étant disjoints, on a

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

et, par conséquent,

$$m' (B_1 \cap B_2) \leqslant 2\varepsilon. \tag{8}$$

En vertu du lemme, ees inégalités (6) et (7) impliquent que

$$| m' (B_1) - \mu^* (A_1) | < \varepsilon \tag{9}$$

et

$$| m' (B_2) - \mu^* (A_2) | < \varepsilon. \tag{10}$$

Comme la mesure les ensembles élémentaires est additive, de (8)-(10) on déduit que

$$m' (B) = m' (B_1) + m' (B_2) - m' (B_1 \cap B_2) \geqslant \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2) - 4\varepsilon.$$

En remarquant encore que

$$A \triangle B \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

on obtient :

$$\mu^* (A) \geqslant m'(B) - \mu^* (A \triangle B) \geqslant m' (B) - 2\varepsilon \geqslant \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2) - 6\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ peut être choisi aussi petit que l'on veut, on a

$$\mu^* (A) \geqslant \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2).$$

L'inégalité de sens contraire

$$\mu^* (A) \leqslant \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2)$$

étant toujours vraie (en vertu du théorème 3), on obtient finalement

$$\mu^* (A) = \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2) ;$$

comme les ensembles A_1, A_2 et A sont mesurables, on peut remplacer ici μ^* par μ.

Le théorème est démontré.

De ce théorème il résulte, en particulier, que pour tout ensemble mesurable A on a

$$\mu (E \setminus A) = 1 - \mu (A).$$

Théorème 7. *La réunion et l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles mesurables sont des ensembles mesurables.*

Démonstration. Soit

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

une famille dénombrable d'ensembles mesurables et soit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Posons $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Il est clair que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ et les ensembles A'_n sont deux à deux disjoints. D'après le théorème 5 et son corollaire, tous les ensembles A'_n sont mesurables. D'après le théorème 6 et la définition de la mesure extérieure, pour tout n fini on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\Big) \leqslant \mu^*(A);$$

de ce fait, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n)$$

est convergente et, par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que

$$\sum_{n>N} \mu(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

L'ensemble $C = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ étant mesurable (comme réunion finie d'ensembles mesurables), il existe un ensemble élémentaire B tel que

$$\mu^*(C \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Comme

$$A \triangle B \subset (C \triangle B) \cup \Big(\bigcup_{n>N} A'_n\Big),$$

de (11) et (12) on déduit que

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon,$$

c.-à-d. que A est mesurable.

Etant donné que les complémentaires des ensembles mesurables sont des ensembles mesurables l'affirmation du théorème relativement à l'intersection découle de l'égalité

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n).$$

Le théorème 7 est un renforcement du théorème 5. Le théorème qui suit est un renforcement analogue du théorème 6.

Théorème 8. *Si* $\{A_n\}$ *est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints et* $A = \bigcup_n A_n$, *alors*

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n).$$

Démonstration. D'après le théorème 6, pour tout N on a

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \mu(A).$$

En passant à la limite pour $N \to \infty$, on obtient

$$\mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ . \tag{13}$$

D'autre part, en vertu du théorème 3,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ , \tag{14}$$

De (13) et (14) on déduit la proposition annoncée.

La propriété de la mesure, établie dans le théorème 8, a été appelée *additivité dénombrable* ou *σ-additivité*. Elle entraîne la propriété suivante de la mesure, appelée *continuité*.

Théorème 9. *Si* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *est une suite décroissante d'ensembles mesurables et* $A = \bigcap_n A_n$, *alors*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $A = \varnothing$; le cas général se réduit à celui-là, lorsqu'on remplace A_n par $A_n \setminus A$. On a

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots$$

et

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup \ldots$$

Les termes de ces réunions étant deux à deux disjoints, en vertu de l'additivité dénombrable de μ, on a

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \setminus A_{k+1}) \tag{15}$$

et

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}). \tag{16}$$

Comme la série (15) est convergente, son reste (16) tend vers 0, lorsque $n \to \infty$. Ainsi,

$$\mu(A_n) \to 0, \text{ lorsque } n \to \infty,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. *Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ est une suite croissante d'ensembles mesurables et $A = \bigcup_n A_n$, alors*

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Pour la démonstration il suffit de passer des ensembles A_n à leurs complémentaires et utiliser le théorème 9.

Signalons, pour conclure, encore le fait évident, mais important, suivant. *Tout ensemble A, dont la mesure extérieure est nulle, est mesurable.* Il suffit de poser $B = \varnothing$; alors

$$\mu^*(A \triangle B) = \mu^*(A \triangle \varnothing) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

Ainsi, nous avons étendu la notion de mesure des ensembles élémentaires à une famille d'ensembles plus générale $\mathfrak{M}_E$, close par rapport aux réunions et intersections dénombrables, c.-à-d. possédant la structure de σ-algèbre. La mesure construite est σ-additive sur cette famille. Les théorèmes établis plus haut permettent de donner la description suivante de la famille des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

Tout ensemble ouvert appartenant à E peut être mis sous la forme d'une réunion finie ou dénombrable de rectangles ouverts, c.-à-d. d'ensembles mesurables; par conséquent, en vertu du théorème 7, tous les ensembles ouverts sont mesurables. Les ensembles fermés sont les complémentaires des ensembles ouvrets; c'est pourquoi ils sont eux-aussi mesurables. Selon le théorème 7, sont mesurables aussi tous les ensembles qui peuvent être obtenus des ouverts et fermés à l'aide d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de réunions et intersections dénombrables. On peut néanmoins montrer que ces ensembles n'épuisent pas tous les ensembles mesurables.

3. Compléments et généralisations. Plus haut nous n'avons considéré que des ensembles contenus dans le carré unité $E = \{0 \leqslant x\ y \leqslant 1\}$. Cette restriction peut être facilement levée, par exemple, de la manière suivante. En représentant le plan tout entier par la réunion des carrés semi-ouverts $E_{nm} = \{n < x \leqslant n+1,\ m < y \leqslant m+1\}$ (où n et m sont des entiers relatifs), nous dirons qu'un ensemble de points du plan A est mesurable, si son intersection $A_{nm} = A \cap E_{nm}$ avec chacun de ces carrés est mesurable. Sa mesure est, par définition,

$$\mu(A) = \sum_{n,\,m} \mu(A_{nm}).$$

La série figurant au second membre est soit convergente vers un nomre fini, soit divergente vers $+\infty$. C'est pourquoi la mesure μ peut pren-

dre aussi des valeurs infinies. Toutes les propriétés de la mesure et des ensembles mesurables, établies plus haut, s'étendent de façon évidente à ce dernier cas. Il importe de noter seulement que la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie peut avoir une mesure infinie. Désignons la famille de tous les ensembles mesurables du plan par $\mathfrak{A}$.

Nous avons exposé dans ce paragraphe la construction de la mesure de Lebesgue pour les ensembles du plan. De mainière analogue on peut construire la mesure de Lebesgue sur la droite, dans l'espace à trois dimensions et, plus généralement, dans un espace euclidien de dimension arbitraire n. Dans tous ces cas la méthode de construction de la mesure est toujours la même : à partir de la mesure, définie préalablement sur une famille d'ensembles simples (rectangles dans le cas du plan, intervalles ouverts (a, b), fermés $[a, b]$ et semi-ouverts $(a, b]$, $[a, b)$ dans le cas de la droite, etc.), on définit d'abord la mesure pour les réunions finies de tels ensembles et on l'étend ensuite à des ensembles beaucoup plus généraux, dits mesurables au sens de Lebesgue. La définition même de la mesurabilité s'étend sans modification aux ensembles des espaces de n'importe quelle dimension.

En introduisant la notion de mesure de Lebesgue, nous sommes partis de la notion habituelle d'aire. La construction analogue pour le cas d'une seule dimension s'appuie sur la notion de longueur d'un intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert). Mais dans ce dernier cas la mesure peut être introduite aussi d'une autre façon, plus générale que la précédente.

Soit $F(t)$ une fonction non décroissante et continue à gauche sur la droite numérique. Posons

$$\begin{aligned} m(a, b) &= F(b) - F(a+0), \\ m[a, b] &= F(b+0) - F(a), \\ m(a, b] &= F(b+0) - F(a+0), \\ m[a, b) &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que la fonction d'intervalle m ainsi définie est non négative et additive. A partir de cette fonction, par des raisonnements analogues à ceux que l'on a déjà utilisés dans ce paragraphe, on peut construire une mesure $\mu_F(A)$, telle que la famille $\mathfrak{A}_F$ des ensembles, mesurables au sens de cette mesure, soit close pour les réunions et les intersections dénombrables et que la mesure μ_F elle-même soit σ-additive. La famille $\mathfrak{A}_F$ dépend, en général, du choix de la fonction F. Toutefois, quel que soit le choix de F, tous les ensembles ouverts et fermés et donc toutes leurs réunions et intersections dénombrables, sont nécessairement mesurables. Toute mesure, construite à l'aide d'une telle fonction F, s'appelle *mesure de Lebesgue-Stieltjes*. En par-

ticulier, à la fonction $F(t) \equiv t$ correspond la mesure de Lebesgue habituelle sur la droite.

Si la mesure μ_F prend la valeur 0 pour tout ensemble dont la mesure de Lebesgue habituelle μ est nulle, on dit que la mesure μ_F est *absolument continue* (par rapport à μ). Si la mesure μ_F est concentrée toute entière en un ensemble fini ou dénombrable de points (ceci peut se présenter dans le cas où l'ensemble de valeurs de F est fini ou dénombrable), on dit qu'elle est *discrète*. La mesure μ_F est dite *singulière*, si elle est nulle pour tout singleton, mais il existe un ensemble M de mesure de Lebesgue nulle dont le complémentaire a la mesure μ_F égale à 0.

On peut montrer que toute mesure μ_F peut être représentée comme somme de trois mesures dont l'une est absolument continue, la seconde discrète et la troisième singulière. Nous reparlerons encore des mesures de Lebesgue-Stieltjes au chapitre suivant.

Existence des ensembles non mesurables. Nous avons vu que les ensembles mesurables selon Lebesgue sont très généraux. Il est donc naturel de se demander, s'il existe en général des ensembles non mesurables. Montrons que la réponse à cette question est affirmative. Le plus simple est de construire des ensembles non mesurables sur une circonférence sur laquelle est définie la mesure linéaire de Lebesgue.

Soient C une circonférence de longueur 1 et α un nombre irrationnel quelconque. Rapportons à une même classe tous les points de la circonférence C qui peuvent être amenés à coïncider, en faisant tourner la circonférence C d'un angle égal à $n\alpha\pi$ (où n est un entier arbitraire). Chacune de ces classes comportera, évidemment, un ensemble dénombrable de points. Choisissons un point dans chacune de ces classes. Montrons que l'ensemble ainsi obtenu (désignons-le par Φ_0) n'est pas mesurable. Notons par Φ_n l'ensemble obtenu de Φ_0 par une rotation d'angle $n\alpha\pi$. Il est aisé de voir que tous les ensembles Φ_n sont deux à deux disjoints et que leur réunion vaut la circonférence C toute entière. Si l'ensemble Φ_0 était mesurable, il en serait de même de tous les ensembles Φ_n qui lui sont congruents. Comme

$$C = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n, \Phi_n \cap \Phi_m = \varnothing \text{ pour } n \neq m,$$

en vertu de la σ-additivité de la mesure il s'ensuivrait que

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(\Phi_n), \tag{17}$$

Or, les ensembles congruents doivent avoir la même mesure, de sorte que si Φ_0 est mesurable, on doit avoir

$$\mu(\Phi_n) = \mu(\Phi_0).$$

Cela signifie que l'égalité (17) est impossible, car la somme de la série du second membre est nulle, si $\mu(\Phi_0) = 0$, et infinie, si $\mu(\Phi_0) > 0$. Ainsi, l'ensemble Φ_0 (et, donc, chacun des ensembles Φ_n) est non mesurable.

§ 2. Notion générale de mesure. Prolongement de la mesure d'un demi-anneau à un anneau. Additivité et σ-additivité [1])

1. Définition de la mesure. Nous avons construit la mesure des ensembles du plan, en partant de la mesure (l'aire) d'un rectangle et en l'étendant à des ensembles plus généraux. Pour nos constructions ce n'était nullement l'expression concrète de l'aire du rectangle qui importait, mais seulement ses propriétés générales. Plus précisément, lors de l'extension de la mesure des rectangles aux ensembles élémentaires nous nous sommes basés seulement sur les faits que l'aire est une fonction d'ensemble non négative et additive et que les rectangles du plan forment un demi-anneau. Pour la construction de la mesure de Lebesgue sur le plan nous avons utilisé, en outre, l'additivité dénombrable.

D'après ce qu'on vient de dire, la construction exposée au § 1 pour les ensembles du plan peut être exprimée sous une forme abstraite très générale. Par cela même son champ d'application sera considérablement élargi. C'est précisément cette question qui fait l'objet des deux paragraphes suivants.

Introduisons tout d'abord la définition fondamentale suivante.

D é f i n i t i o n 1. Une fonction d'ensemble $\mu(A)$ s'appelle *mesure*, si :

1) le domaine de définition $\mathfrak{S}_\mu$ de la fonction $\mu(A)$ est un demi-anneau d'ensembles,

2) les valeurs de la fonction $\mu(A)$ sont réelles et non négatives,

3) la fonction $\mu(A)$ est additive, c.-à-d. pour toute décomposition d'un ensemble $A \in \mathfrak{S}_\mu$ en réunion finie

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

d'ensembles (deux à deux disjoints) $A_k \in \mathfrak{S}_\mu$ on a l'égalité

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

R e m a r q u e. De la décomposition $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ on déduit que $\mu(\varnothing) = 2\mu(\varnothing)$, d'où $\mu(\varnothing) = 0$.

2. Prolongement de la mesure d'un demi-anneau à l'anneau qu'il engendre. En construisant la mesure des ensembles du plan on a

[1]) Dans ce paragraphe et plus loin nous utiliserons systématiquement les notions et les résultats exposés au § 5, chap. I.

17—0167

commencé par étendre la mesure des rectangles aux ensembles élémentaires, c.-à-d. aux réunions finies de rectangles deux à deux disjoints. Nous considérerons maintenant une construction analogue abstraite. Formulons d'abord la définition suivante.

D é f i n i t i o n 2. La mesure μ s'appelle *prolongement* de la mesure m, si $\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_\mu$ et pour tout $A \in \mathfrak{S}_m$ on a l'égalité

$$\mu(A) = m(A).$$

Notre objectif dans ce numéro est de démontrer la proposition suivante.

T h é o r è m e 1. *Pour toute mesure $m(A)$ donnée sur un demi-anneau $\mathfrak{S}_m$, il existe un prolongement et un seul $m'(A)$ ayant pour domaine de définition l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$* (c.-à-d. *l'anneau minimal engendré par $\mathfrak{S}_m$*).

D é m o n s t r a t i o n. Pour tout ensemble $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ il existe une décomposition de la forme

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \quad (B_k \in \mathfrak{S}_m, B_k \cap B_l = \varnothing, \text{ si } k \neq l) \tag{1}$$

(cf. théorème 3, § 5, chap. I). Posons, par définition,

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k), \tag{2}$$

Il est aisé de voir que la grandeur $m'(A)$, définie au moyen de l'égalité (2), ne dépend pas du choix de la décomposition (1). En effet, considérons deux décompositions

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{j=1}^{r} C_j, \quad B_i \in \mathfrak{S}_m, C_j \in \mathfrak{S}_m.$$

Comme toutes les intersections $B_i \cap C_j$ appartiennent à $\mathfrak{S}_m$, en vertu de l'additivité de la mesure m, on a

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{r} m(C_j),$$

ce qu'il fallait démontrer.

La non-négativité et l'additivité de la fonction $m'(A)$, définie par l'égalité (2), sont évidentes. Ainsi, l'existence du prolongement m' de la mesure m à l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ est démontrée.

Pour démontrer son unicité remarquons que, d'après la définition du prolongement, si $A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, où B_k sont des ensembles deux à

deux disjoints de $\mathfrak{S}_m$, alors pour tout prolongement $\widetilde{m}$ de la mesure m à l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ on a

$$\widetilde{m}(A)=\sum_k \widetilde{m}(B_k)=\sum_k m(B_k)=m'(A),$$

c.-à-d. la mesure $\widetilde{m}$ coïncide avec la mesure m', définie par l'égalité (2).

Le théorème est démontré.

Au fond, nous avons répété ici, en termes abstraits, le procédé utilisé déjà au § 1 pour prolonger la mesure des rectangles aux ensembles élémentaires. Par ailleurs, l'anneau minimal engendré par le demi-anneau des rectangles est constitué précisément par les ensembles élémentaires.

L'additivité et la non-négativité de la mesure entraînent les propriétés presque évidentes, mais importantes, que voici.

Théorème 2. *Soient m une mesure, définie sur un anneau quelconque* $\mathfrak{R}_m$, et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des ensembles appartenant* à $\mathfrak{R}_m$. *Alors*

I. *si* $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ *et* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *pour* $i \neq j$, *on a*

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leqslant m(A);$$

II. *si* $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supset A$, *on a*

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geqslant m(A);$$

en particulier, si $A \subset A'$ *et* $A, A' \in \mathfrak{R}$, *alors* $m(A) \leqslant m(A')$.

En effet, si les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints et tous inclus dans A, en vertu de l'additivité de la mesure, on a

$$m(A)=\sum_{k=1}^{n} m(A_k)+m\Big(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big).$$

Puisque $m(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geqslant 0$, on en déduit la propriété I.

D'autre part, quels que soient $A_1, A_2 \in \mathfrak{R}_m$, on a

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1)+m(A_2) - m(A_1 \cap A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2).$$

Par récurrence, il vient

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

Enfin, toujours grâce à l'additivité de la mesure, de $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ il résulte que

$$m(A) = m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) - m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \setminus A) \leqslant m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k),$$

d'où, en vertu de l'inégalité précédente, on obtient la propriété II.

Nous avons démontré les propriétés I et II pour une mesure définie sur un anneau d'ensembles. Mais si une mesure est donnée d'abord sur un demi-anneau et puis on la prolonge sur un anneau, la mesure des ensembles appartenant au demi-anneau initial ne change pas. C'est pourquoi les propriétés I et II sont vraies aussi pour les mesures définies sur un demi-anneau.

3. σ-additivité. Dans certaines questions de l'analyse on est amené à considérer non seulement des réunions finies, mais aussi des réunions dénombrables d'ensembles. C'est pourquoi il est naturel de remplacer la condition d'additivité que nous avons imposée à la mesure (cf. définition 1) par la condition plus forte de σ-ad d i t i v i t é.

D é f i n i t i o n 3. La mesure m est dite *dénombrablement additive* ou *σ-additive*, si, quels que soient les ensembles $A, A_1, A_2, \ldots, \ldots, A_n, \ldots$ appartenant à son domaine de définition $\mathfrak{S}_m$ et vérifiant les conditions

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{pour} \quad i \neq j,$$

on a l'égalité

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

La mesure de Lebesgue sur le plan, construite au § 1, est σ-additive (théorème 8). On peut construire un exemple de mesure σ-additive d'une toute autre nature de la manière suivante. Soient un ensemble dénombrable arbitraire

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\},$$

et des nombres $p_n \geqslant 0$ tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

A titre d'ensembles mesurables on prend tous les sous-ensembles de l'ensemble X, en posant pour chaque $A \subset X$

$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n.$$

Il est aisé de vérifier que $m(A)$ est une mesure σ-additive et qu'en outre $m(X) = 1$. Cet exemple apparaît de façon naturelle dans de nombreuses questions de la théorie des probabilités.

Indiquons un exemple de mesure additive, mais non σ-additive. Soit X l'ensemble de tous les points rationnels du segment [0, 1]. Supposons $\mathfrak{S}_m$ constitué des intersections de X avec toutes sortes d'intervalles ouverts (a, b), fermés $[a, b]$ et semi-ouverts (a, b], [a, b) du segment [0, 1]. Il est facile de voir que $\mathfrak{S}_m$ est un demi-anneau. Pour chaque ensemble $A_{ab} \in \mathfrak{S}_m$ posons

$$m(A_{ab}) = b - a.$$

Cette mesure est additive, mais elle n'est pas σ-additive, car $m(X) = 1$ et en même temps X est une réunion dénombrable de points dont chacun a la mesure égale à 0.

Toutes les mesures considérées ici et dans le paragraphe suivant seront supposées σ-additives.

Théorème 3. *Si la mesure m, définie sur un demi-anneau $\mathfrak{S}_m$ est σ-additive, alors la mesure μ, obtenue par son prolongement à l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ est aussi* σ-additive.

Démonstration. Soient

$$A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m), \quad B_n \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m), \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$B_s \cap B_r = \varnothing \text{ pour } s \neq r.$$

et

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Alors il existe des ensembles A_j et B_{ni} de $\mathfrak{S}_m$ tels que

$$A = \bigcup_j A_j, \quad B_n = \bigcup_i B_{ni}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

tous les ensembles figurant aux seconds membres de ces égalités étant deux à deux disjoints et toutes les réunions étant finies (théorème 3, § 5, chap. I).

Posons $C_{nij} = B_{ni} \cap A_j$. Il est aisé de voir que les ensembles C_{nij} sont deux à deux disjoints et que

$$A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_i C_{nij},$$
$$B_{ni} = \bigcup_j C_{nij}.$$

Donc, puisque la mesure m sur $\mathfrak{S}_m$ est σ-additive, on a

$$m(A_j) = \sum_{n=i}^{\infty} \sum_i m(C_{nij}), \tag{3}$$

$$m(B_{ni}) = \sum_j m(C_{nij}). \tag{4}$$

D'après la définition de la mesure μ sur $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{S}_m)$

$$\mu A = \sum_j m(A_j), \tag{5}$$

$$\mu(B_n) = \sum_i m(B_{ni}). \tag{6}$$

De (3)-(6) il résulte que

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

(Les sommes par rapport aux indices i et j ici sont finies et les séries par rapport à n sont convergentes.)

Démontrons maintenant les propriétés fondamentales suivantes des mesures σ-additives qui représentent la généralisation au cas d'une réunion dénombrable d'ensembles des propriétés formulées dans le théorème 2. Puisque, comme nous l'avons montré, l'additivité dénombrable d'une mesure subsiste lorsque cette mesure est prolongée d'un demi-anneau à l'anneau correspondant, nous pouvons supposer dès le début que la mesure est donnée sur un anneau $\mathfrak{R}$.

Théorème 4. *Soient* m *une mesure* σ-*additive, et* A, $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *des ensembles appartenant à l'anneau* $\mathfrak{R}$. *Alors*:

I_σ. *Si* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$ *et* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *pour* $i \neq j$, *on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leqslant m(A);$$

II_σ (*sous-additivité dénombrable*). *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \supset A$, *on a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_k) \geqslant m(A).$$

Démonstration. Si tous les A_k sont deux à deux disjoints et inclus dans A, en vertu de la propriété I (théorème 2), pour tout n on a

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leqslant m(A).$$

En passant ici à la limite pour $n \to \infty$, on obtient la première affirmation du théorème.

Démontrons la deuxième affirmation. Comme $\mathfrak{R}$ est un anneau, les ensembles

$$B_n = (A_n \cap B_n) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

appartiennent à $\mathfrak{R}$. Puisque

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad B_n \subset A_n$$

et les ensembles B_n sont deux à deux disjoints, on a

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

Remarque. L'affirmation I_σ du théorème que l'on vient de démontrer ne s'appuie évidemment pas sur l'additivité dénombrable de la mesure considérée ; elle reste donc vraie aussi pour des mesures additives arbitraires. Par contre, l'affirmation II_σ utilise essentiellement l'additivité dénombrable de la mesure. En effet, dans l'exemple de mesure additive, mais non σ-additive, considéré plus haut, l'ensemble X de mesure totale 1 est recouvert par une famille dénombrable de singletons dont chacun est de mesure nulle. De plus, il est aisé de se convaincre que la propriété II_σ en réalité équivaut à l'additivité dénombrable. En effet, soit μ une mesure quelconque, définie sur un demi-anneau $\mathfrak{S}$. Soient $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ des ensembles de $\mathfrak{S}$ tels que $A = \bigcup_k A_k$, tous les A_k étant deux à deux disjoints. Alors, en vertu de la propriété I_σ (qui est, comme nous l'avons vu, vraie pour n'importe quelle mesure), on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(A).$$

Si, en outre, μ jouit de la propriété II_σ, alors (puisque les ensembles A_k forment un recouvrement de A)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geqslant \mu(A)$$

et, par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

Il est souvent plus facile de vérifier la sous-additivité dénombrable d'une mesure (propriété II_σ) que d'établir directement son additivité dénombrable.

§ 3. Prolongement d'une mesure selon Lebesgue

1. Prolongement selon Lebesgue d'une mesure définie sur un demi-anneau avec unité. Si une mesure m, donnée sur un demi-anneau $\mathfrak{S}_m$, jouit seulement de la propriété d'additivité (et non de celle de σ-additivité), son prolongement à l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ épuise pratique-

ment toutes les possibilités d'étendre cette mesure du demi-anneau initial à une famille d'ensembles plus large. Si, par contre, la mesure considérée est σ-a d d i t i v e, elle peut être étendue de $\mathfrak{S}_m$ à une famille d'ensembles beaucoup plus large que l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ et en quelque sens maximale. Cela peut se faire à l'aide du procédé dit p r o l o n g e m e n t s e l o n L e b e s g u e. Nous considérerons d'abord le prolongement selon Lebesgue d'une mesure donnée sur un demi-anneau avec unité. Le cas général sera étudié au numéro suivant.

Soit m une mesure σ-additive donnée sur un demi-anneau d'ensembles $\mathfrak{S}_m$ dont E est l'unité. Définissons sur la famille $\mathfrak{A}$ de toutes les parties de l'ensemble E une fonction $\mu^*(A)$, dite mesure extérieure de A, de la manière suivante.

D é f i n i t i o n 1. On appelle *mesure extérieure* de l'ensemble $A \subset E$ le nombre

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n), \tag{1}$$

où la borne inférieure s'étend à tous les recouvrements de l'ensemble A par des familles finies ou dénombrables d'ensembles $B_n \in \mathfrak{S}_m$.

La propriété suivante de la mesure extérieure joue un rôle fondamental dans toute la construction qui va suivre.

T h é o r è m e 1 (s o u s - a d d i t i v i t é d é n o m b r a b l e). *Si*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

où $\{A_n\}$ *est une famille finie ou dénombrable d'ensembles, alors*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$

La démonstration de cette proposition est exactement la même que celle du théorème 3, § 1, et nous ne la reproduirons pas ici.

D é f i n i t i o n 2. Un ensemble A est dit *mesurable* (au sens de Lebesgue), si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ tel que

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

La fonction μ^*, considérée seulement sur les ensembles mesurables, s'appelle *mesure de Lebesgue* (ou simplement *mesure*) et se note μ. Il est clair que tous les ensembles de $\mathfrak{S}_m$ et de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ sont mesurables. De plus, si $A \in \mathfrak{S}_m$, on a

$$\mu(A) = m(A).$$

Cette égalité se démontre exactement comme pour les ensembles du plan.

De l'égalité

$$A_1 \triangle A_2 = (E \setminus A_1) \triangle (E \setminus A_2)$$

il résulte que si l'ensemble A est mesurable, son complémentaire l'est aussi.

Etablissons maintenant les propriétés fondamentales des ensembles mesurables et de la mesure de Lebesgue qui leur est associée.

Théorème 2. *La famille $\mathfrak{M}$ de tous les ensembles mesurables est un anneau.*

Démonstration. Puisqu'on a toujours

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$$

et

$$A_1 \cup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)],$$

il suffit de démontrer que si $A_1 \in \mathfrak{M}$ et $A_2 \in \mathfrak{M}$, alors $A = A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{M}$.

Supposons A_1 et A_2 mesurables; il existe alors $B_1 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ et $B_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ tels que

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant $B = B_1 \setminus B_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ et en utilisant la relation

$$(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

on obtient

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est aussi petit que l'on veut, on en déduit que l'ensemble A est mesurable.

Remarque. Il est évident que E est l'unité de l'anneau $\mathfrak{M}$ qui, de ce fait, est une algèbre d'ensembles.

Théorème 3. *La fonction $\mu(A)$, définie sur la famille $\mathfrak{M}$ des ensembles mesurables, est additive.*

La démonstration de ce théorème est exactement celle du théorème 6, § 1.

Théorème 4. *La fonction $\mu(A)$, définie sur la famille $\mathfrak{M}$ des ensembles mesurables, est σ-additive.*

Démonstration. Soient

$$A, A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{M}, \; A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j.$$

D'après le théorème 1,

$$\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{2}$$

En vertu du théorème 3, pour tout N on a

$$\mu(A) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n),$$

d'où

$$\mu(A) \geqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{3}$$

De (2) et (3) on obtient l'assertion annoncée.

Au § 1, en considérant la mesure de Lebesgue sur le plan, nous avons montré que la réunion et l'intersection d'une famille d'ensembles mesurables sont des ensembles mesurables non seulement dans le cas où cette famille est finie, mais aussi dans le cas où elle est dénombrable. Ceci est vrai aussi dans le cas général, c.-à-d. on a le théorème suivant:

Théorème 5. *La famille $\mathfrak{M}$ des ensembles mesurables au sens de Lebesgue est une σ-algèbre dont E est l'unité.*

Démonstration. Comme

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

et le complémentaire d'un ensemble mesurable est aussi mesurable, il suffit de démontrer que si les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ appartiennent à $\mathfrak{M}$, il en est de même de l'ensemble $A = \bigcup_n A_n$. La démonstration de cette affirmation, exposée dans le théorème 7 du § 1 pour des ensembles du plan, s'étend mot à mot au cas général.

De même que dans le cas de la mesure de Lebesgue sur le plan, l'additivité dénombrable d'une mesure entraîne sa *continuité*. Autrement dit, μ étant une mesure σ-additive définie sur une σ-algèbre, si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ est une suite décroissante d'ensembles mesurables et

$$A = \bigcap_n A_n,$$

alors

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n);$$

de même, si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ est une suite croissante d'ensembles mesurables et

$$A = \bigcup_n A_n,$$

alors

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

La démonstration de cette assertion, exposée au § 1 pour la mesure sur le plan (théorème 9), s'étend mot à mot au cas général.

Ainsi, nous avons démontré que la famille $\mathfrak{M}$ est une σ-algèbre et que la fonction μ (A) définie sur $\mathfrak{M}$ jouit de toutes les propriétés d'une mesure σ-additive. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 3. On appelle *prolongement selon Lebesgue* $\mu = L(m)$ d'une mesure m toute fonction $\mu(A)$, définie sur la famille $\mathfrak{M}$ des ensembles mesurables et coïncidant sur $\mathfrak{M}$ avec la mesure extérieure $\mu^*(A)$.

2. Prolongement d'une mesure donnée sur un demi-anneau sans unité. Si le demi-anneau $\mathfrak{S}_m$, sur lequel est définie la mesure initiale m, n'a pas d'unité, la construction du prolongement de Lebesgue, exposé au numéro précédent, subit quelques modifications, d'ailleurs, insignifiantes. La définition 1 de la mesure extérieure est gardée, mais la mesure extérieure μ^* se trouve définie seulement sur la famille S_{μ^*} des ensembles A dont chacun possède un recouvrement $\bigcup\limits_n B_n$ par des ensembles de $\mathfrak{S}_m$ tel que la somme $\sum\limits_n m(B_n)$ ait une valeur finie. La définition de la mesurabilité est conservée sans aucun changement.

Les théorèmes 2-4 et la définition 3 restent valables. L'hypothèse d'existence de l'unité a été utilisée seulement dans la démonstration du théorème 2. Pour démontrer le théorème 2 dans le cas général, il faut établir indépendamment de cette hypothèse que $A_1 \in \mathfrak{M}$ et $A_2 \in \mathfrak{M}$ entraînent $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}$. Or, ceci découle de l'inclusion

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

Lorsque $\mathfrak{S}_m$ n'a pas d'unité, le théorème 5 est remplacé par le théorème suivant:

Théorème 6. *Pour toute mesure initiale m la famille $\mathfrak{M}$ des ensembles mesurables au sens de Lebesgue est un σ-anneau*; *la mesurabilité de l'ensemble $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ pour A_n mesurables a lieu si et seulement si les mesures $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n)$ sont majorées par une constante indépendante de N.*

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur.

Remarque. Etant donné que maintenant il s'agit de mesures qui ne prennent que des valeurs finies, la nécessité de la dernière condition est évidente.

Du théorème 6 découle le résultat suivant.

Corollaire. *La famille $\mathfrak{M}_A$ de tous les ensembles $B \in \mathfrak{M}$, sous-ensembles d'un ensemble fixe $A \in \mathfrak{M}$, est une σ-algèbre.*

Par exemple, la famille de tous les sous-ensembles d'un segment arbitraire $[a, b]$, mesurables selon Lebesgue (au sens de la mesure de Lebesgue habituelle sur la droite), est une σ-algèbre d'ensembles.

Signalons, enfin, encore une propriété des mesures de Lebesgue.

D é f i n i t i o n 4. Une mesure μ est dite *complète*, si de $\mu(A) = 0$ et $A' \subset A$ il résulte que A' est mesurable.

Il est évident qu'alors $\mu(A') = 0$. On démontre sans peine que le *prolongement selon Lebesgue de toute mesure est complet*. En effet, si $A' \subset A$ et $\mu(A) = 0$, on a nécessairement $\mu^*(A') = 0$; or, tout ensemble C, tel que $\mu^*(C) = 0$, est mesurable, parce que $\varnothing \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ et

$$\mu^*(C \triangle \varnothing) = \mu^*(C) = 0.$$

Toute mesure σ-additive sur une σ-algèbre peut être prolongée jusqu'à une mesure complète, en admettant qu'elle soit nulle pour tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle.

R e m a r q u e s s u p p l é m e n t a i r e s. 1. La supposition que la mesure initiale m est définie sur un demi-anneau (et non sur une famille arbitraire d'ensembles) est importante pour l'unicité de son prolongement. Considérons dans le carré unité l'ensemble des rectangles verticaux et horizontaux, c.-à-d. des rectangles ayant la longueur ou la largeur égale à 1 (fig. 18) et attribuons à chacun de ces rectangles une mesure égale à son aire. Une telle mesure peut être prolongée sur l'algèbre (et, à plus forte raison, sur la σ-algèbre), engendrée par ces rectangles, de façons différentes (indiquer au moins deux prolongements distincts).

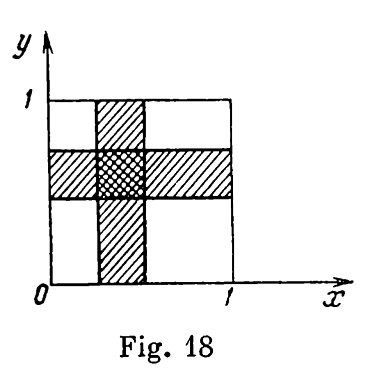


Fig. 18

2. Signalons le lien existant entre le procédé de prolongement d'une mesure selon Lebesgue et le procédé de complétion d'un espace métrique. Pour cela, remarquons qu'on peut prendre $m'(A \triangle B)$ pour distance de deux éléments A et B de l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$. Ceci fait de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ un espace métrique (en général, non complet) dont le complété est composé précisément de tous les ensembles mesurables (dans ce cas, lorsque $\mu(A \triangle B) = 0$, les ensembles A et B sont indiscernables du point de vue métrique).

E x e r c i c e s. 1. Soit m une mesure donnée sur un demi-anneau (avec unité) $\mathfrak{S}_m$ d'ensembles de X et soit μ^* la mesure extérieure associée. Démontrer qu'un ensemble A est mesurable (au sens de Lebesgue) si et seulement s'il jouit de la propriété suivante, appelée *mesurabilité au sens de Carathéodory*: pour t o u t sous-ensemble $Z \subset X$ on a l'égalité

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

2. Soit m une mesure σ-additive donnée sur un anneau $\mathfrak{R}$ dont X est l'unité et soit $m(X) = 1$. Pour chaque $A \subset X$ introduisons, à côté de la mesure extérieure μ^*, la mesure intérieure μ_*, en posant

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A).$$

Il est aisé de voir qu'on a toujours $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$.
Démontrer que

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) \qquad (*)$$

si et seulement si l'ensemble A est mesurable (au sens de la définition 2).

Si la mesure est donnée sur un anneau avec unité, on prend souvent l'égalité (*) pour définition de la mesurabilité d'un ensemble.

3. Extension de la notion de mesurabilité dans le cas d'une mesure σ-finie. Si la mesure initiale m est donnée dans l'espace X sur un demi-anneau sans unité, la définition de la mesurabilité d'un ensemble, introduite plus haut, s'avère trop étroite. Par exemple, si X est le plan, les ensembles tels que le plan tout entier, la bande, l'extérieur d'un cercle, etc. dont l'aire est infinie, ne se trouvent pas conformément à cette définition parmi les ensembles mesurables. Il est donc naturel d'élargir la notion de mesurabilité, en admettant des valeurs infinies de la mesure, afin que la famille des ensembles mesurables possède, comme dans le cas où la mesure initiale est donnée sur un demi-anneau avec unité, la structure de σ-algèbre (et non seulement de δ-anneau).

Nous nous bornons ici pratiquement au cas le plus important de la mesure dite σ-finie, bien que la construction correspondante puisse être effectuée aussi dans le cas général.

Soit m une mesure σ-additive donnée sur un demi-anneau $\mathfrak{S}_m$ de parties de l'ensemble X. Nous dirons que cette mesure est *σ-finie*, si l'ensemble X tout entier peut être représenté par une réunion d é n o m b r a b l e d'ensembles de $\mathfrak{S}_m$ (et non par une réunion f i n i e d'ensembles de $\mathfrak{S}_m$). Un exemple de mesure σ-finie est fourni par l'aire, définie sur l'ensemble des rectangles du plan. Un exemple simple de mesure non σ-finie peut être obtenu de la manière suivante. Soit une fonction $f(x)$ donnée sur le segment $[0, 1]$. Pour tout sous-ensemble fini $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ du segment $[0, 1]$ posons $\mu(A) = \sum f(x_i)$. Si l'ensemble des points x pour lesquels $f(x) \neq 0$ est non dénombrable, cette mesure sur $[0, 1]$ n'est pas σ-finie.

Soit donc m une mesure σ-additive et σ-finie dans X, définie sur un demi-anneau $\mathfrak{S}_m$. Soit $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathfrak{S}_m$. En passant du demi-anneau $\mathfrak{S}_m$ à l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ et en remplaçant B_k par $B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$, on peut considérer que X est exprimé sous forme d'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints, que nous désignerons comme auparavant par $B_1, B_2, \ldots$ En appliquant à m le procédé de prolongement selon Lebesgue décrit plus haut, nous obtiendrons une mesure μ définie sur le σ-anneau $\mathfrak{M}$. Soit $B \in \mathfrak{M}$. Désignons par $\mathfrak{M}_B$ la famille de tous les ensembles de $\mathfrak{M}$ contenus dans B:

$$\mathfrak{M}_B = \{C : C \in \mathfrak{M},\ C \subset B\}.$$

Alors $\mathfrak{M}_B$ est une σ-algèbre dont B est l'unité (cf. corollaire du théorème 6).

Considérons maintenant la famille $\mathfrak{A}$ des ensembles A dont l'intersection avec chaque B_i est mesurable:

$$A \cap B_i \in \mathfrak{M}_{B_i}.$$

Autrement dit, $A \in \mathfrak{A}$ signifie que A peut être mis sous la forme

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \text{où} \quad A_i \in \mathfrak{M}_{B_i}. \tag{4}$$

La famille $\mathfrak{A}$ est une σ-algèbre (vérifier !) que nous appellerons *somme directe* des σ-algèbres $\mathfrak{M}_{B_i}$. Nous dirons que les ensembles (4) qui composent la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ sont *mesurables* et définirons la mesure $\tilde{\mu}$ de chacun de ces ensembles de la manière suivante : si

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \in \mathfrak{M}_{B_i},$$

alors

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Comme la mesure de tout ensemble est non négative, la série du second membre de cette égalité converge vers un nombre non négatif ou vers $+\infty$.

Théorème 7. *Sous les hypothèses faites plus haut on a les propositions suivantes :*

1) *la σ-algèbre $\mathfrak{A}$ et la mesure $\tilde{\mu}$ ne dépendent pas du choix de la famille d'ensembles disjoints $B_i \in \mathfrak{M}$ vérifiant la condition $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = X$;*

2) *la mesure $\tilde{\mu}$ est σ-additive sur $\mathfrak{A}$;*

3) *la famille des ensembles $A \in \mathfrak{A}$ pour lesquels $\tilde{\mu}(A) < \infty$ coïncide avec le δ-anneau $\mathfrak{M}$ et sur ce δ-anneau on a $\tilde{\mu} = \mu$.*

Démonstration. 1) Remarquons tout d'abord que $A \in \mathfrak{M}$ si et seulement si $A \cap C \in \mathfrak{M}$ pour tout $C \in \mathfrak{M}$. Cette condition est évidemment suffisante, parce qu'elle signifie, en particulier, que $A \cap B_i \in \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; montrons qu'elle est nécessaire. Soient $A \in \mathfrak{A}$ et $C \in \mathfrak{M}$. Posons $C_i = C \cap B_i$; alors

$$A \cap C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i).$$

Comme pour tout N on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} (A \cap C_i)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} C_i\right) \leqslant \mu(C),$$

en vertu du théorème 6, l'ensemble $A \cap C$ est mesurable.

Soient $\{B_i\}$ et $\{B_j^*\}$ deux familles d'ensembles disjoints de $\mathfrak{M}$ telles que $\bigcup B_i = \bigcup B_j^* = X$. Si $A \in \mathfrak{A}$, alors, comme la mesure μ

de tout ensemble de $\mathfrak{M}$ est non négative, on a les égalités

$$\sum_i \mu(A \cap B_i) = \sum_{i,j} \mu(A \cap B_i \cap B_j^*) = \sum_j \mu(A \cap B_j^*),$$

qui montrent qu'en définissant $\tilde{\mu}(A)$ à l'aide de la famille $\{B_i\}$ ou de la famille $\{B_j^*\}$, on obtient toujours le même résultat.

2) Soient $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots \in \mathfrak{A}$, $A^{(k)} \cap A^{(l)} = \varnothing$ pour $k \neq l$ et $A = \bigcup_k A^{(k)}$. Comme la mesure μ est σ-additive sur $\mathfrak{M}$, on a

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap B_i) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \mu(A^{(k)} \cap B_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A^{(k)} \cap B_i)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A^{(k)}),$$

ce qui prouve que la mesure $\tilde{\mu}$ est σ-additive.

Enfin, la proposition 3) est une conséquence immédiate du théorème 6.

R e m a r q u e. L'extension de la notion de mesurabilité décrite plus haut (admettant des valeurs infinies pour la mesure) peut être réalisée aussi sans l'hypothèse que la mesure initiale soit σ-finie, par exemple, selon le schéma suivant.

Soient X un espace quelconque et $\mathfrak{M}$ un δ-anneau quelconque de sous-ensembles de X. Un ensemble $A \subset X$ est dit *mesurable par rapport à* $\mathfrak{M}$, si $A \cap B \in \mathfrak{M}$ pour tout $B \in \mathfrak{M}$. On vérifie sans peine que la famille $\mathfrak{U}$ des ensembles mesurables par rapport à $\mathfrak{M}$ est une σ-algèbre dont X est l'unité; si, en outre, la famille $\mathfrak{M}$ est elle-même une σ-algèbre (avec la même unité X), alors $\mathfrak{U} = \mathfrak{M}$.

Considérons maintenant dans X une mesure σ-additive quelconque μ qui, d'après ce qui a été dit au n°2, peut être supposée comme étant déjà prolongée sur un δ-anneau $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{U}$ la famille des ensembles de X, mesurables par rapport à $\mathfrak{M}$. Un ensemble $A \in \mathfrak{U}$ s'appelle *ensemble nul*, si $\mu(A \cap B) = 0$ pour tout $B \in \mathfrak{M}$. Maintenant on définit la mesure $\tilde{\mu}$ sur $\mathfrak{U}$ (pouvant prendre, en général, des valeurs infinies) de la manière suivante: si pour un ensemble donné $A \in \mathfrak{U}$ il existe un ensemble $B \in \mathfrak{M}$, tel que $A \triangle B$ est un ensemble nul, on pose

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(B);$$

pour tous les autres $A \in \mathfrak{U}$ on pose

$$\tilde{\mu}(A) = \infty.$$

On vérifie sans peine que la mesure $\tilde{\mu}$ est σ-additive et que sur le δ-anneau $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{U}$ elle coïncide avec μ.

4. Prolongement d'une mesure selon Jordan. En considérant dans le § 2 de ce chapitre des mesures vérifiant seulement la condition d'additivité, nous avons montré qu'une telle mesure m peut être toujours prolongée du demi-anneau $\mathfrak{S}_m$ à l'anneau minimal $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ engendré par ce demi-anneau. Cependant, il est possible de prolonger une telle mesure à un anneau plus large que $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$. La construction correspondante s'appelle *prolongement de la mesure selon Jordan* [1]). L'idée de cette construction, utilisée dans certains cas particuliers déjà par les

[1]) Camille Jordan, mathématicien français (1838-1922).

mathématiciens de la Grèce Antique, consiste à approcher l'ensemble « que l'on mesure » A par des ensembles A' et A'', déjà munis de mesures, de l'intérieur et de l'extérieur, c.-à-d. de façon que

$$A' \subset A \subset A''.$$

Soit m une mesure donnée sur un anneau quelconque $\mathfrak{R}$.

Définition 5. Nous dirons qu'un ensemble A est *mesurable au sens de Jordan*, si pour tout $\varepsilon > 0$ dans l'anneau $\mathfrak{R}$ il y a des ensembles A' et A'' vérifiant les conditions

$$A' \subset A \subset A'', \quad m(A'' \setminus A') < \varepsilon.$$

On a la proposition suivante.

Théorème 8. *La famille $\mathfrak{R}^*$ des ensembles mesurables au sens de Jordan est un anneau.*

Soit $\mathfrak{A}$ une famille d'ensembles A dont chacun est contenu dans un ensemble B de $\mathfrak{R}$. Pour chaque $A \in \mathfrak{R}$ posons, par définition,

$$\bar{\mu}(A) = \inf_{B \supset A} m(B),$$

$$\underline{\mu}(A) = \sup_{B \supset A} m(B).$$

Les fonctions $\bar{\mu}(A)$ et $\underline{\mu}(A)$, s'appellent respectivement mesure de Jordan « extérieure » et mesure de Jordan « intérieure » de l'ensemble A.

Il est évident qu'on a toujours

$$\underline{\mu}(A) \leqslant \bar{\mu}(A).$$

Théorème 9. *L'anneau $\mathfrak{R}^*$ coïncide avec la famille des ensembles $A \in \mathfrak{A}$ pour lesquels $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A)$.*

Pour les ensembles de $\mathfrak{A}$ on a les théorèmes suivants:

Théorème 10. *Si $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, alors $\bar{\mu}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \bar{\mu}(A_k)$.*

Théorème 11. *Si $A_k \subset A$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et $A_i \cap A_j = \varnothing$, alors*

$$\underline{\mu}(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(A_k).$$

Définissons maintenant la fonction μ sur le domaine

$$\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{R}^*$$

comme la valeur commune des mesures extérieure et intérieure:

$$\mu(A) = \underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A).$$

Des théorèmes 10 et 11 et du fait évident que pour $A \in \mathfrak{R}$ on a

$$\mu(A) = \underline{\mu}(A) = m(A)$$

découle la proposition suivante:

Théorème 12. *La fonction $\mu(A)$ est une mesure et un prolongement de la mesure m.*

La construction exposée est applicable à toute mesure m définie sur un anneau. En particulier, elle peut être appliquée aux ensembles du plan. Dans ce

cas on prend pour anneau initial la famille des ensembles élémentaires (c.-à-d. des réunions finies de rectangles). L'anneau des ensembles élémentaires dépend, évidemment, du choix du système de coordonnées sur le plan (on prend les rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées). Lorsqu'on passe à la mesure de Jordan sur le plan, cette dépendance du choix du système de coordonnées disparaît: en partant d'un système de coordonnées arbitraire $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$, lié au système initial $\{x_1, x_2\}$ par une transformation orthogonale

$$\bar{x}_1 = \cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot x_2 + a_1,$$

$$\bar{x}_1 = -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 + a_2,$$

on obtient toujours la même mesure de Jordan. Ceci résulte du théorème général suivant.

Théorème 13. *Pour que les prolongements selon Jordan* $\mu_1 = j(m_1)$ *et* $\mu_2 = j(m_2)$ *des mesures* m_1 *et* m_2, *définies sur les anneaux* $\mathfrak{R}_1$ *et* $\mathfrak{R}_2$, *coïncident, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées*:

$$\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{S}_{\mu_1}, \quad m_1(A) = \mu_2(A) \text{ sur } \mathfrak{R}_1,$$

$$\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{S}_{\mu_2}, \quad m_2(A) = \mu_1(A) \text{ sur } \mathfrak{R}_2.$$

Si la mesure initiale m est définie non sur un anneau, mais sur un demi-anneau $\mathfrak{S}_m$, il est naturel d'appeler prolongement selon Jordan de m la mesure

$$j(m) = j(r(m)),$$

obtenue en prolongeant d'abord m à l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ et en prenant ensuite son prolongement selon Jordan.

5. **Unicité du prolongement d'une mesure.** Si un ensemble A est mesurable au sens de Jordan par rapport à la mesure μ, c.-à-d. s'il appartient à $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}^*(\mathfrak{S}_m)$, alors pour toute mesure $\tilde{\mu}$ prolongeant m et définie sur $\mathfrak{R}^*$ la valeur $\tilde{\mu}(A)$ coïncide avec la valeur $J(A)$ du prolongement selon Jordan $J = j(m)$. On peut montrer que le prolongement de la mesure m au-delà de la famille $\mathfrak{R}^*$ des ensembles mesurables au sens de Jordan n'est pas unique. Plus précisément, nous dirons que A est un ensemble d'unicité de la mesure m, si:

1) il existe une mesure prolongeant m et définie pour l'ensemble A;

2) pour n'importe quelles deux mesures de cette espèce μ_1 et μ_2 on a

$$\mu_1(A) = \mu_2(A).$$

Alors on a le théorème suivant: *la famille des ensembles d'unicité de la mesure* m *coïncide avec la famille des ensembles mesurables au sens de Jordan par rapport à la mesure* m, *c.-à-d. avec l'anneau* $\mathfrak{R}^*$.

Cependant, si l'on se borne aux mesures σ-additives et à leurs prolongements (σ-additifs), la famille des ensembles d'unicité est, en général, plus large.

Comme c'est précisément le cas des mesures σ-additives qui est le plus important, introduisons la définition suivante.

Définition 6. Un ensemble A s'appelle *ensemble de σ-unicité* de la mesure σ-additive m, si:

1) il existe un prolongement σ-additif λ de la mesure m, défini pour A (c.-à-d. tel que $A \in \mathfrak{S}_\lambda$);

2) pour n'importe quels deux prolongements σ-additifs λ_1 et λ_2 de ce type on a l'égalité

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A).$$

Si A est un ensemble de σ-unicité pour la mesure σ-additive μ, alors d'après notre définition, il existe une seule valeur possible $\lambda(A)$ du prolongement σ-additif de la mesure μ, défini pour A.

Il est aisé de voir que tout ensemble A mesurable au sens de Jordan est aussi mesurable au sens de Lebesgue (mais non réciproquement! Donner un exemple.) et que les mesures de Jordan et de Lebesgue pour cet ensemble ont la même valeur. On en déduit immédiatement que le prolongement selon Jordan d'une mesure σ-additive est σ-additif.

Tout ensemble A, mesurable au sens de Lebesgue, est un ensemble de σ-unicité pour la mesure initiale m. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, à l'ensemble A on peut associer un ensemble $B \in \mathfrak{R}$ tel que $\mu^* (A \triangle B) < \varepsilon$. Quel que soit le prolongement λ de la mesure m, défini pour A, on a

$$\lambda (B) = m'(B),$$

car le prolongement m' de la mesure m à $\mathfrak{R} = \mathfrak{R} (\mathfrak{S}_m)$ est unique. D'autre part,

$$\lambda (a \triangle B) \leqslant \mu^* (A \triangle B) < \varepsilon$$

et, par conséquent,

$$| \lambda (A) = m' (B) | < \varepsilon.$$

Ainsi, pour n'importe quels deux prolongements σ-additifs λ_1 et λ_2 de la mesure m on a

$$| \lambda_1 (A) - \lambda_2 (A) | < 2 \varepsilon,$$

d'où, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire,

$$\lambda_1 (A) = \lambda_2 (A).$$

On peut montrer que la famille des ensembles mesurables au sens de Lebesgue épuise toute la famille des ensembles de σ-unicité de la mesure initiale m.

Soit m une mesure σ-additive quelconque dont $\mathfrak{S}$ est le domaine de définition et soit $\mathfrak{M} = L (\mathfrak{S})$, le domaine de définition de son prolongement selon Lebesgue. Il est aisé de voir que, quel que soit le demi-anneau $\mathfrak{S}_1$ vérifiant la condition

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{M},$$

on a toujours

$$L (\mathfrak{S}_1) = L (\mathfrak{S}).$$

§ 4. Fonctions mesurables

1. Définition et propriétés fondamentales des fonctions mesurables. Soient X et Y deux ensembles quelconques et soient $\mathfrak{S}_X$ et $\mathfrak{S}_Y$ deux familles de parties de X et de Y respectivement. La fonction abstraite $y = f (x)$, définie sur X et à valeurs dans Y, s'appelle $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$-*mesurable*, si $A \in \mathfrak{S}_Y$ entraîne $f^{-1} (A) \in \mathfrak{S}_X$.

Par exemple, si l'on prend pour X et Y la droite numérique (c.-à-d. si l'on considère des fonctions réelles d'une variable réelle) et pour $\mathfrak{S}_X$ et $\mathfrak{S}_Y$ la famille de tous les sous-ensembles ouverts (ou fermés) de $\mathbf{R}^1$, la notion de mesurabilité que l'on vient de définir se réduit à la notion connue de continuité. En prenant pour $\mathfrak{S}_X$ et $\mathfrak{S}_Y$ la famille des ensembles boréliens, nous aboutirons aux fonctions dites *B-mesurables* (ou *mesurables au sens de Borel*).

Dans la suite nous nous intéresserons à la notion de mesurabilité surtout du point de vue de la théorie de l'intégration. A cet égard, une importance particulière est attribuée à la notion de mesurabilité pour les fonctions numériques définies sur un ensemble X sur lequel

est donnée une mesure σ-additive μ. Dans ce cas, on prend pour $\mathfrak{S}_X$. la famille $\mathfrak{S}_\mu$ de tous les ensembles de X mesurables par rapport à μ et pour $\mathfrak{S}_Y$ la famille de tous les B-ensembles sur la droite. Comme toute mesure σ-additive peut être prolongée à une σ-algèbre, il est naturel de supposer dès le début que $\mathfrak{S}_\mu$ est une σ-algèbre. Ainsi, dans le cas des fonctions numériques on est amené à définir la mesurabilité de la manière suivante.

Définition 1. Soit X un ensemble dans lequel est donnée une mesure σ-additive μ, définie sur une σ-algèbre $\mathfrak{S}_\mu$. Une fonction réelle $f(x)$ sur X est dite *μ-mesurable*, si pour tout ensemble borélien A de la droite numérique on a

$$f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu.$$

De manière analogue, une fonction complexe $\varphi(x)$, définie sur X, est dite *μ-mesurable*, si $\varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu$ pour tout ensemble borélien du plan complexe. Il est aisé de vérifier que ceci équivaut à la μ-mesurabilité de la partie réelle et de la partie imaginaire de cette fonction séparément.

Une fonction numérique donnée sur la droite est dite *borélienne* (ou *B-mesurable*), si l'image réciproque de tout ensemble borélien est un ensemble borélien.

Théorème 1. *Soient X, Y et Z des ensembles arbitraires et soient $\mathfrak{S}_X$, $\mathfrak{S}_Y$ et $\mathfrak{S}_Z$ des familles de parties de X, Y et Z respectivement. Si la fonction $y = f(x)$, définie sur X, est $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$-mesurable et la fonction $z = g(y)$, définie sur Y, est $(\mathfrak{S}_Y, \mathfrak{S}_Z)$-mesurable, alors la fonction*

$$z = \varphi(x) \equiv g(f(x))$$

est $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Z)$-mesurable.

Bref : *la composée de deux fonctions mesurables est une fonction mesurable.*

Démonstration. Si $A \in \mathfrak{S}_Z$, en vertu de la $(\mathfrak{S}_Y, \mathfrak{S}_Z)$-mesurabilité de la fonction g, on a $g^{-1}(A) = B \in \mathfrak{S}_Y$. A son tour, la $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$-mesurabilité de la fonction f implique que $f^{-1}(B) \in \mathfrak{S}_X$, c.-à-d. que $f^{-1}(g^{-1}(A)) = \varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$, d'où l'on conclut que la fonction φ est $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Z)$-mesurable.

Corollaire. *Toute fonction borélienne d'une fonction numérique μ-mesurable est une fonction μ-mesurable. En particulier, toute fonction continue d'une fonction μ-mesurable est une fonction μ-mesurable.*

Dans la suite, lorsqu'il n'y a aucune confusion à craindre, au lieu de « μ-mesurabilité » nous écrirons simplement « mesurabilité ».

Théorème 2. *Pour qu'une fonction réelle $f(x)$ soit mesurable, il faut et il suffit que pour tout réel c l'ensemble $\{x : f(x) < c\}$ soit mesurable.*

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire, car la demi-droite $(-\infty, c)$ est un ensemble borélien. Pour démontrer qu'elle est suffisante, remarquons d'abord que la σ-algèbre, engendrée par la famille Σ de toutes les demi-droites $(-\infty, c)$, coïncide avec la σ-algèbre des ensembles boréliens sur la droite. Or, en vertu du n° 5, § 5, chap. I, il en résulte que l'image réciproque de tout ensemble borélien appartient à la σ-algèbre, engendrée par les images réciproques des demi-droites appartenant à Σ, c.-à-d. qu'elle est mesurable.

Cette condition est souvent considérée comme définition de la mesurabilité, c.-à-d. une fonction $f(x)$ est dite mesurable, si tous les ensembles de la forme $\{x: f(x) < c\}$ sont mesurables.

2. Opérations sur les fonctions mesurables. Montrons que la famille des fonctions mesurables, définies sur un ensemble quelconque, est close par rapport aux opérations arithmétiques.

Théorème 3. *La somme, la différence et le produit de deux fonctions mesurables sont des fonctions mesurables. Le rapport de deux fonctions mesurables, si le dénominateur ne s'annule pas, est une fonction mesurable.*

Démonstration. Démontrons ce théorème par étapes.

1) Si la fonction f est mesurable, il est évident que les fonctions kf et $a + f$ sont aussi mesurables, quelles que soient les constantes k et a.

2) Si les fonctions y et g sont mesurables, alors l'ensemble

$$\{x: f(x) > g(x)\}$$

est aussi mesurable. En effet,

$$\{x: f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x: f(x) > r_k\} \cap \{x: g(x) < r_k\}),$$

où r_k parcourt l'ensemble des nombres rationnels, numérotés dans n'importe quel ordre. On en déduit que l'ensemble

$$\{x: f(x) > a - g(x)\} = \{x: f(x) + g(x) > a\}$$

est mesurable, ce qui signifie que la somme de deux fonctions mesurables est mesurable.

3) De 1) et 2) il résulte que la différence $f - g$ est aussi mesurable.

4) Le produit de deux fonctions mesurables est mesurable. En effet, utilisons l'identité

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

Le second membre est une fonction mesurable. Ceci résulte de 1)-3) et du corollaire du théorème 1, selon lequel le carré d'une fonction mesurable est une fonction mesurable.

5) Si la fonction $f(x)$ est mesurable et $f(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est aussi mesurable. En effet, si $c > 0$, alors

$$\left\{x: \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x: f(x) > \frac{1}{c}\right\} \cup \{x: f(x) < 0\},$$

si $c < 0$, alors

$$\left\{x: \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x: 0 > f(x) > \frac{1}{c}\right\},$$

et si $c = 0$, alors

$$\left\{x: \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x: f(x) < c\}.$$

Chaque fois on obtient au second membre un ensemble mesurable. De 4) et 5) on déduit la mesurabilité du rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ (à condition que $g(x) \neq 0$).

Ainsi, nous avons montré qu'en appliquant les opérations arithmétiques à des fonctions mesurables, on obtient encore des fonctions mesurables.

Montrons maintenant que l'ensemble des fonctions mesurables est clos non seulement par rapport aux opérations arithmétiques, mais aussi par rapport au passage à la limite.

Théorème 4. *La limite d'une suite de fonctions mesurables, convergente pour chaque $x \in X$, est une fonction mesurable.*

Démonstration. Soit $f_n(x) \to f(x)$; alors

$$\{x: f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \left\{x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}. \qquad (1)$$

En effet, si $f(x) < c$, il existe k tel que $f(x) < c - \frac{2}{k}$; pour k ainsi choisi on peut trouver une valeur de n assez grande pour que l'inégalité

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

soit vraie pour tous les $m \geqslant n$, ce qui signifie que x appartient au second membre de (1).

Réciproquement, si x appartient au second membre de (1), il existe k tel que pour tous les m suffisamment grands

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k},$$

d'où $f(x) < c$, ce qui signifie que x appartient au premier membre de (1).

Si les fonctions $f_n(x)$ sont mesurables, les ensembles

$$\left\{x{:}f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

le sont aussi. Comme la famille des ensembles mesurables est une σ-algèbre, d'après (1) l'ensemble

$$\{x{:}f(x) < c\}$$

est aussi mesurable, ce qui prouve la mesurabilité de $f(x)$.

Remarque. D'après ce qui a été dit, on voit que la mesurabilité d'une fonction ne suppose pas la donnée d'une mesure sur les espaces considérés. On doit seulement indiquer les familles des ensembles qui seront appelés mesurables. En fait, la notion de mesurabilité est employée, en règle générale, pour les fonctions sur un espace X avec une mesure bien déterminée, définie sur une σ-algèbre de ses sous-ensembles. C'est précisément cette situation qu'on va considérer plus bas.

Comme cela a été déjà signalé, toute mesure σ-additive, définie sur une σ-algèbre $\mathfrak{S}$ de parties d'un ensemble X, peut être considérée, sans restreindre la généralité, comme complète, c.-à-d. on peut supposer que si A est un ensemble mesurable de mesure nulle, alors tout sous-ensemble $A' \subset A$ est mesurable (et, bien sûr, $\mu(A') = 0$). Cette condition de complétude de la mesure sera supposée remplie partout dans la suite.

3. Equivalence. Lors de l'étude des fonctions mesurables il est souvent possible de négliger leurs valeurs sur un ensemble de mesure nulle. A cette occasion on est amené à la définition suivante.

Définition 2. Deux fonctions f et g, données sur le même ensemble mesurable E, sont dites *équivalentes* (notation: $f \sim g$), si

$$\mu\{x{:}f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Adoptons la terminologie suivante. Nous dirons qu'une propriété quelconque est vraie *presque partout* dans E, si elle a lieu partout dans E, sauf peut être sur un ensemble de points de mesure nulle. Ainsi, deux fonctions sont équivalentes, si elles coïncident presque partout.

Théorème 5. *Une fonction $f(x)$, définie sur un ensemble mesurable E et équivalente sur E à une fonction mesurable $g(x)$, est aussi mesurable.*

Démonstration. De la définition de l'équivalence il résulte que les ensembles

$$\{x{:}f(x) < a\} \text{ et } \{x{:}g(x) < a\}$$

ne diffèrent l'un de l'autre que d'un ensemble de mesure nulle; par conséquent (la mesure étant supposée complète), si le deuxième est mesurable, le premier l'est aussi.

R e m a r q u e. Dans l'analyse classique la notion d'équivalence des fonctions ne joue pas un rôle important, car là on considère principalement des fonctions continues d'une ou plusieurs variables, pour lesquelles l'équivalence coïncide avec l'identité. Plus précisément, si deux fonctions f et g, continues sur un segment E, sont équivalentes (par rapport à la mesure de Lebesgue), alors elles sont identiques. En effet, si $f(x_0) \neq g(x_0)$ en un point x_0, en vertu de la continuité de f et g, il existe un voisinage du point x_0, à l'intérieur duquel on a partout $f(x) \neq g(x)$. Comme la mesure d'un tel voisinage est positive, deux fonctions continues ne peuvent être équivalentes que si elles sont identiques.

Pour des fonctions mesurables arbitraires l'équivalence n'implique pas, en général, leur coïncidence. Par exemple, sur la droite numérique, la fonction prenant la valeur 1 aux points rationnels et la valeur 0 aux points irrationnels est équivalente à la fonction identiquement nulle.

4. Convergence presque partout. Etant donné que dans beaucoup de cas le comportement d'une fonction mesurable sur un ensemble de mesure nulle ne nous intéresse pas, il est naturel d'introduire la généralisation suivante de la notion habituelle de convergence ponctuelle.

D é f i n i t i o n 3. On dit qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions définies sur un espace mesuré X *converge presque partout* vers une fonction $f(x)$, si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (2)$$

presque pour tous les $x \in X$ (c.-à-d. si l'ensemble des x, pour lesquels l'égalité (2) n'a pas lieu, est de mesure nulle).

E x e m p l e. La suite des fonctions $f_n(x) = (-x)^n$, définies sur le segment $[0, 1]$, converge pour $n \to \infty$ vers la fonction $f(x) \equiv 0$ presque partout (plus précisément, partout, sauf au point $x = 1$).

Le théorème 4 admet la généralisation suivante.

T h é o r è m e 4'. *Si une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ converge vers une fonction $f(x)$ presque partout sur X, alors la fonction $f(x)$ est aussi mesurable.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit A l'ensemble sur lequel

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Par hypothèse, $\mu(X \setminus A) = 0$. La fonction $f(x)$ est mesurable sur A et, comme sur un ensemble de mesure nulle toute fonction est évidemment mesurable, elle est mesurable aussi sur $X \setminus A$; par conséquent, la fonction $f(x)$ est mesurable sur X.

Exercice. Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction limite $f(x)$. Démontrer que la suite $\{f_n(x)\}$ converge presque partout vers $g(x)$ si et seulement si la fonction $g(x)$ est équivalente à $f(x)$.

5. Théorème d'Egorov. En 1911, D. Egorov démontra l'important théorème suivant qui met en évidence le lien entre les notions de convergence presque partout et de convergence uniforme.

Théorème 6. *Soient E un ensemble de mesure finie et $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables, convergeant presque partout sur E vers une fonction $f(x)$. Alors pour tout $\delta > 0$ il existe un ensemble mesurable $E_\delta \subset E$ tel que*

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) *sur l'ensemble E_δ la suite $\{f_n(x)\}$ converge vers $f(x)$ uniformément.*

Démonstration. D'après le théorème 4', la fonction $f(x)$ est mesurable. Posons

$$E_n^m = \bigcap_{i \geqslant n} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Pour m et n fixés, E_n^m représente l'ensemble des points x tels que

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

pour tous les $i \geqslant n$. Soit

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

D'après la définition de E_n^m, il est clair que pour m fixé on a

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots \subset E_n^m \subset \ldots$$

Etant donné qu'une mesure σ-additive est continue, pour tout m et tout $\delta > 0$ il existe $n_0(m)$ tel que

$$\mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Posons

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$$

et montrons que l'ensemble E_δ ainsi construit vérifie les conditions du théorème.

Démontrons d'abord que sur E_δ la suite $\{f_i(x)\}$ converge uniformément vers $f(x)$. Ceci résulte immédiatement du fait que si $x \in E_\delta$, alors pour tout m on a

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, \text{ si } i > n_0(m).$$

Evaluons maintenant la mesure de l'ensemble $E \setminus E_\delta$. A cet effet, remarquons que pour tout m on a $\mu(E \setminus E^m) = 0$. En effet, si $x_0 \in E \setminus E^m$, il existe des valeurs aussi grandes que l'on veut de i pour lesquelles

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geqslant \frac{1}{m},$$

c.-à-d. au point x_0 la suite $\{f_n(x)\}$ ne converge pas vers $f(x)$. Comme, par hypothèse, $\{f_n(x)\}$ converge vers $f(x)$ presque partout, on doit avoir

$$\mu(E \setminus E^m) = 0.$$

On en déduit que

$$\mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) = \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Par conséquent,

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}) = \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E^m_{n_0(m)})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

Le théorème est démontré.

6. Convergence en mesure.

D é f i n i t i o n 4. On dit qu'une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ *converge en mesure* vers une fonction $f(x)$, si pour tout $\sigma > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} = 0.$$

Les théorèmes 7 et 8 ci-dessous mettent en évidence le lien entre la notion de convergence presque partout et celle de convergence en mesure. De même qu'au numéro précédent, la mesure sera supposée finie.

T h é o r è m e 7. *Si une suite de fonctions mesurables $\{f_n(x)\}$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$, elle converge vers la même fonction $f(x)$ en mesure.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après le théorème 4′, la fonction limite $f(x)$ est mesurable. Soit A l'ensemble (de mesure nulle), sur lequel la suite $\{f_n(x)\}$ ne converge pas vers $f(x)$. Soient, en outre

$$E_k(\sigma) = \{x: |f_k(x) - f(x)| \geqslant \sigma\},$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma),$$

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

Il est clair que tous ces ensembles sont mesurables. Comme

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots,$$

en vertu de la continuité de la mesure, on a

$$\mu(R_n(\sigma)) \to \mu(M), \text{ quand } n \to \infty.$$

Vérifions maintenant que

$$M \subset A. \qquad (3)$$

En effet, si $x_0 \notin A$, c.-à-d. si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

pour $\sigma > 0$ donné il existe n tel que

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma \text{ pour } k \geqslant n,$$

c.-à.-d. $x_0 \notin R_n(\sigma)$, et, à plus forte raison, $x_0 \notin M$.

Etant donné que $\mu(A) = 0$, de (3) il résulte que $\mu(M) = 0$, par conséquent,

$$\mu(R_n(\sigma)) \to 0, \text{ quand } n \to \infty;$$

comme $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$, le théorème est démontré.

On vérifie sans peine que la convergence d'une suite de fonctions en mesure n'entraîne pas, en général, la convergence presque partout de cette suite. En effet, définissons pour chaque entier naturel k sur (0, 1] les fonctions

$$f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$$

de la manière suivante:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \frac{i-1}{k} < x \leqslant \frac{i}{k}, \\ 0 \text{ pour les autres } x. \end{cases}$$

En numérotant ces fonctions les unes après les autres, nous obtiendrons une suite qui, comme on le voit aisément, converge en mesure vers zéro et pourtant ne converge en aucun point (démontrer cela !).

E x e r c i c e. Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables convergeant en mesure vers une fonction $f(x)$. Démontrer que la suite $\{f_n(x)\}$ converge en mesure vers $g(x)$ si et seulement si la fonction $g(x)$ est équivalente à $f(x)$.

Bien que l'exemple ci-dessus montre que le théorème 7 ne peut pas être inversé en entier, on a tout de même le théorème suivant.

T h é o r è m e 8. *Soit* $\{f_n(x)\}$ *une suite de fonctions mesurables convergeant en mesure vers* $f(x)$. *Alors, de cette suite on peut extraire une sous-suite* $\{f_{n_k}(x)\}$ *convergeant vers* $f(x)$ *presque partout.*

Démonstration. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite de nombres positifs tels que

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

et soit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ une suite de nombres positifs tels que la série

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots$$

soit convergente. Construisons une suite d'indices

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

de la manière suivante: choisissons n_1 de façon que

$$\mu\{x: |f_{n_1}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_1\} < \eta_1$$

(un tel n_1 existe certainement); ensuite choisissons $n_2 > n_1$ de façon que

$$\mu\{x: |f_{n_2}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_2\} < \eta_2.$$

Plus généralement, choisissons $n_k > n_{k-1}$ de façon que

$$\mu\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\} < \eta_k.$$

Montrons que la suite construite converge vers $f(x)$ presque partout. En effet, soient

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}, \quad Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Comme

$$R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots,$$

en vertu de la continuité de la mesure, on a $\mu(R_i) \to \mu(Q)$.

D'autre part, il est clair que $\mu(R_i < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$, d'où $\mu(R_i) \to 0$ lorsque $i \to \infty$, c.-à-d. $\mu(Q) = 0$. Il reste à vérifier que dans tous les points de l'ensemble $E \setminus Q$ on a la convergence

$$f_{n_k}(x) \to f(x).$$

Soit $x_0 \in E \setminus Q$. Il existe alors i_0 tel que $x_0 \notin R_{i_0}$. Cela signifie que pour tous les $k \geqslant i_0$ on a

$$x_0 \notin \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\},$$

c.-à-d.

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k.$$

Comme, par hypothèse, $\varepsilon_k \to 0$, on en déduit que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0).$$

Le théorème est démontré.

Théorème de Lusin. Propriété (C). La définition de la fonction mesurable, formulée au début de ce paragraphe, concerne les fonctions définies sur des ensembles arbitraires et, dans le cas général, n'est liée en aucune façon à la notion de fonction continue. Cependant, lorsqu'il s'agit des fonctions sur un segment, on a l'important théorème suivant, établi en 1913 par N. N. Lusin.

Théorème 9. *Pour qu'une fonction $f(x)$, définie sur un segment $[a, b]$, soit mesurable, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\varphi(x)$ continue sur $[a, b]$* telle que

$$\mu\{x: f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon.$$

En d'autres termes, une fonction mesurable peut être rendue continue sur $[a, b]$, en la modifiant convenablement sur un ensemble de mesure arbitrairement petite. Lorsqu'une fonction définie sur un segment peut être rendue continue à l'aide d'une telle « petite déformation », on dit qu'elle possède la *propriété* (C) (la terminologie est celle de N. N. Lusin). Comme le montre le théorème de Lusin, pour les fonctions de variable numérique la propriété (C) peut être prise comme base de la définition même de la mesurabilité. La démonstration du théorème de Lusin peut être obtenue en utilisant le théorème d'Egorov (faites cette démonstration !).

§ 5. Intégrale de Lebesgue

La notion d'intégrale de Riemann, connue du cours d'analyse élémentaire, n'est applicable que pour des fonctions qui sont continues ou qui n'ont pas « trop » de points de discontinuité. Pour les fonctions mesurables qui peuvent être discontinues partout où elles sont définies (ou, plus généralement, peuvent être définies sur des ensembles abstraits, de sorte que pour de telles fonctions la notion de continuité n'a tout simplement pas de sens) la construction riemannienne de l'intégrale s'avère inapplicable. Cependant, pour de telles fonctions il existe une autre notion d'intégrale, beaucoup plus parfaite et souple, due à H. Lebesgue.

L'idée principale de la construction de l'intégrale de Lebesgue réside dans le fait que les points x sont groupés non selon leur proximité sur l'axe x, comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, mais selon la proximité des valeurs de la fonction en ces points. Ceci permet tout de suite d'étendre la notion d'intégrale à une classe de fonctions très générale.

En outre, l'intégrale de Lebesgue est définie exactement de la même façon pour des fonctions données sur des espaces mesurés arbitraires, tandis que l'intégrale de Riemann est définie d'abord pour des fonctions d'une seule variable et étendue ensuite, avec les modifications nécessaires, aux fonctions de plusieurs variables. En ce qui concerne les fonctions définies sur des espaces mesurés, abstraits pour elles l'intégrale de Riemann n'a point de sens.

Lorsqu'il ne sera pas fait mention explicite du contraire, nous considérerons toujours une mesure σ-additive complète μ, définie sur une σ-algèbre d'ensembles dont X est l'unité. Tous les ensembles $A \in X$ seront supposés mesurables et toutes les fonctions $f(x)$ seront supposées définies pour $x \in X$ et mesurables.

Il sera commode de définir l'intégrale de Lebesgue d'abord pour les fonctions dites simples et l'étendre ensuite à des fonctions essentiellement plus générales. Les nos 2-4 sont consacrés à la construction de l'intégrale de Lebesgue pour le cas où la mesure de l'espace tout entier est finie. Le cas d'une mesure infinie sera étudié au no 5 de ce paragraphe.

1. Fonctions simples.

Définition 1. Une fonction $f(x)$, définie sur un espace mesuré X, s'appelle fonction *simple*, si elle est mesurable et prend des valeurs en nombre fini ou infini-dénombrable.

La structure des fonctions simples est caractérisée par le théorème suivant.

Théorème 1. *Une fonction $f(x)$ qui prend un nombre fini ou infini-dénombrable de valeurs*

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,$$

est mesurable si et seulement si tous les ensembles

$$A_n = \{x : f(x) = y_n\}$$

sont mesurables.

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire, car chaque ensemble A_n est l'image réciproque d'un singleton $\{y_n\}$ et tout singleton est un ensemble borélien. La condition est aussi suffisante, parce que dans les conditions du théorème l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de tout ensemble borélien est une réunion $\bigcup_{y_n \in B} A_n$ au plus dénombrable d'ensembles mesurables A_n, donc un ensemble mesurable.

L'utilisation des fonctions simples dans la construction de l'intégrale de Lebesgue sera basée sur le théorème suivant.

Théorème 2. *Pour qu'une fonction $f(x)$ soit mesurable, il faut et il suffit qu'elle soit la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions simples.*

Démonstration. La condition est suffisante en vertu du théorème 4 du paragraphe précédent. Pour démontrer qu'elle est nécessaire, considérons une fonction mesurable quelconque $f(x)$ et posons $f_n(x) = \frac{m}{n}$, si $\frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}$ (où les m sont des entiers et les n sont des entiers positifs). Il est clair que les fonctions $f_n(x)$ sont simples; la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément vers $f(x)$, car $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$.

2. Intégrale de Lebesgue pour les fonctions simples. Nous introduirons la notion d'intégrale de Lebesgue d'abord pour les fonctions que nous avons appelées plus haut fonctions simples, c.-à-d.

pour les fonctions mesurables dont l'ensemble des valeurs est fini ou dénombrable.

Soit f une fonction simple prenant les valeurs

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots; \quad y_i \neq y_j \text{ pour } i \neq j,$$

et soit A un sous-ensemble mesurable quelconque de X.

Il est naturel de définir l'intégrale de la fonction f sur l'ensemble A par l'égalité

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \tag{1}$$

où

$$A_n = \{x : x \in A,\ f(x) = y_n\},$$

à condition que la série du second membre de (1) soit convergente. On est donc conduit à la définition suivante (où, pour des raisons que l'on conçoit, la série est supposée a priori absolument convergente).

Définition 2. Une fonction simple f est dite *intégrable* ou *sommable* sur l'ensemble A (par rapport à la mesure μ), si la série (1) est absolument convergente. Si la fonction f est intégrable, la somme de la série (1) s'appelle *intégrale* de f sur l'ensemble A.

Dans cette définition on suppose que tous les y_n sont distincts. Cependant, il est possible de représenter la valeur de l'intégrale d'une fonction simple comme une somme de produits de la forme $c_k \mu(B_k)$, sans exiger que tous les c_k soient distincts. Ceci est possible, grâce au lemme suivant.

Lemme. *Soit* $A = \bigcup_k B_k$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ *pour* $i \neq j$, *et soit* f *une fonction qui prend sur chacun des ensembles* B_k *une seule valeur* c_k ; *alors*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k), \tag{2}$$

la fonction f *étant intégrable sur* A *si et seulement si la série* (2) *est absolument convergente.*

Démonstration. Il est aisé de voir que chaque ensemble

$$A_n = \{x : x \in A,\ f(x) = y_n\}$$

est la réunion des B_k pour lesquels $c_k = y_n$. C'est pourquoi

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

Comme la mesure est non négative, on a

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \mu(B_k),$$

ce qui signifie que les séries

$$\sum_n y_n \mu(A_n) \quad \text{et} \quad \sum_k c_k \mu(B_k)$$

sont à la fois absolument convergentes ou divergentes.

Le lemme est démontré.

Etablissons maintenant quelques propriétés de l'intégrale de Lebesgue des fonctions simples.

A) *Si deux fonctions simples f et g sont intégrables sur A, leur somme $f+g$ l'est aussi et*

$$\int_A [f(x)+g(x)]\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\,d\mu.$$

En effet, supposons que

$$f(x) = f_i \text{ pour } x \in F_i \subset A$$

et

$$g(x) = g_j \text{ pour } x \in G_j \subset A,$$

de sorte que

$$J_1 = \int_A f(x)\,d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i), \tag{3}$$

$$J_2 = \int_A g(x)\,d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j). \tag{4}$$

Alors, en vertu du lemme précédent, on a

$$J = \int_A [f(x)+g(x)]\,d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j)\,\mu(F_i \cap G_j). \tag{5}$$

Or,

$$\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i \cap G_j), \qquad \mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i \cap G_j);$$

par conséquent, la convergence absolue des séries (3) et (4) implique la convergence absolue de la série (5); en outre,

$$J = J_1 + J_2,$$

B) *Si une fonction simple f est intégrable sur A et k est une constante arbitraire, la fonction kf est aussi intégrable sur A et*

$$\int_A kf(x)\,d\mu = k \int_A f(x)\,d\mu.$$

(La vérification est immédiate.)

C) *Toute fonction simple f, bornée sur un ensemble A, est intégrable sur A et si $|f(x)| \leqslant M$ sur A, alors*

$$\left| \int_A f(x)\, d\mu \right| = M\mu(A).$$

(La vérification est immédiate).

3. Définition générale de l'intégrale de Lebesgue sur un ensemble de mesure finie.

D é f i n i t i o n 3. Une fonction f est dite *intégrable* (*sommable*) *sur un ensemble A*, s'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions simples, intégrables sur A, *convergeant uniformément* vers f. La limite

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu \tag{6}$$

s'appelle *intégrale de la fonction f sur l'ensemble A* et se note

$$\int_A f(x)\, d\mu.$$

Cette définition est correcte, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. La limite (6) existe, quelle que soit la suite uniformément convergente de fonctions simples, intégrables sur A.
2. Pour une fonction f donnée, cette limite ne dépend pas du choix de la suite $\{f_n\}$.
3. Pour les fonctions simples les définitions de l'intégrabilité et de l'intégrale coïncident avec celles données au nº 2.

Toutes ces propriétés sont effectivement vérifiées.

Pour démontrer la première, il suffit de remarquer que, d'après les propriétés A), B) et C) de l'intégrale des fonctions simples, on a

$$\left| \int_A f_n(x)\, d\mu - \int_A f_m(x)\, d\mu \right| \leqslant \mu(A) \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)|. \tag{7}$$

Pour démontrer la deuxième condition, il faut considérer deux suites $\{f_n\}$ et $\{f_n^*\}$ convergeant vers f. Si la limite (6) prenait pour ces deux suites des valeurs différentes, elle n'existerait pas pour la suite obtenue en prenant leur réunion, ce qui contredit la première condition. Enfin, pour démontrer la troisième condition, il suffit de considérer la suite obtenue en faisant $f_n = f$ pour tous les n.

R e m a r q u e. On voit que dans la construction de l'intégrale de Lebesgue on peut distinguer nettement deux étapes : la première c'est la définition proprement dite de l'intégrale (comme somme d'une série) pour une classe de fonctions (fonctions simples sommables) assez simple et en même temps assez vaste ; la deuxième c'est l'extension de cette définition à une classe de fonctions essentielle-

ment plus vaste au moyen du passage à la limite. Au fond, la combinaison de ces deux procédés, c.-à-d. d'une définition constructive, mais restreinte, et d'un passage à la limite ultérieure, est présente dans toute construction d'une intégrale.

Etablissons les propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue. De la définition on déduit immédiatement que:

I.
$$\int_A 1\cdot d\mu=\mu(A). \tag{8}$$

II. *Si f est une fonction intégrable et k une constante arbitraire, la fonction kf est aussi intégrable et on a*

$$\int_A kf(x)\,d\mu=k\int_A f(x)\,d\mu. \tag{9}$$

Cette propriété s'obtient par passage à la limite de la propriété B) de l'intégrale des fonctions simples.

III. *Additivité: si f et g sont des fonctions intégrables, la fonction $f+g$ est aussi intégrable et on a*

$$\int_A [f(x)+g(x)]\,d\mu=\int_A f(x)\,d\mu+\int_A g(x)\,d\mu. \tag{10}$$

La démonstration s'obtient par passage à la limite de la propriété A) de l'intégrale des fonctions simples.

IV. *Toute fonction f, bornée sur un ensemble A, est intégrable sur A.*

La démonstration s'obtient par passage à la limite de la propriété C) de l'intégrale des fonctions simples, en utilisant le théorème 2.

V. *Monotonie: si $f(x)\geqslant 0$, alors*

$$\int_A f(x)\,d\mu\geqslant 0 \tag{11}$$

(sous réserve que l'intégrale existe).

Pour les fonctions simples cette propriété résulte directement de la définition. Dans le cas général elle peut être établie, en remarquant que si la fonction f est mesurable et non négative, il existe une suite de fonctions simples n o n   n é g a t i v e s convergeant vers f (cf. théorème 2).

De la dernière propriété on déduit immédiatement que si $f(x)\geqslant g(x)$, alors

$$\int_A f(x)\,d\mu\geqslant\int_A g(x)\,d\mu \tag{12}$$

et, par suite, si $m\leqslant f(x)\leqslant M$ pour tous (ou presque tous) les $x\in A$, alors

$$m\mu(A)\leqslant\int_A f(x)\,d\mu\leqslant M\mu(A). \tag{13}$$

VI. *Si* $\mu(A) = 0$, *alors* $\int_A f(x)\, d\mu = 0$.

VI′. *Si* $f(x) = g(x)$ *presque partout, alors*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \int_A g(x)\, d\mu,$$

les deux intégrales existant ou non à la fois.

Ces deux propriétés découlent immédiatement de la définition de l'intégrale de Lebesgue.

VII. *Si la fonction* φ *est intégrable sur* A *et on a* $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ *presque partout, alors la fonction* f *est aussi intégrable sur* A.

En effet, si f et φ sont des fonctions simples, en retirant de A un certain ensemble de mesure nulle, nous obtiendrons un ensemble A' qui peut être mis sous la forme d'une réunion finie ou dénombrable d'ensembles, sur chacun desquels les fonctions f et φ sont constantes : $f(x) = a_n$, $\varphi(x) = b_n$, où $|a_n| \leqslant b_n$. Comme la fonction φ est intégrable, on peut écrire

$$\sum_n |a_n|\, \mu(A_n) \leqslant \sum_n b_n \mu(A_n) = \int_{A'} \varphi(x)\, d\mu = \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Par conséquent, la fonction f est aussi intégrable et on a

$$\left|\int_A f(x)\, d\mu\right| = \left|\int_{A'} f(x)\, d\mu\right| = \left|\sum_n a_n \mu(A_n)\right| \leqslant \sum_n |a_n|\, \mu(A_n) =$$

$$= \int_{A'} |f(x)|\, d\mu \leqslant \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Dans le cas général, cette assertion se démontre par passage à la limite, en utilisant le théorème 2.

VIII. *Les intégrales*

$$I_1 = \int_A f(x)\, d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)|\, d\mu \tag{14}$$

existent ou n'existent pas à la fois.

En effet, d'après la propriété VII, l'existence de l'intégrale I_2 entraîne l'existence de I_1.

Dans le cas des fonctions simples, la réciproque découle de la définition de l'intégrale ; dans le cas général, elle peut être démontrée par passage à la limite, en utilisant le théorème 2 ; dans ce cas on se servira encore de l'inégalité

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|.$$

4. σ-additivité et continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue. Au numéro précédent nous avons formulé les propriétés de l'inté-

grale de Lebesgue sur un ensemble fixé. Maintenant nous établirons quelques propriétés de l'intégrale de Lebesgue, en considérant l'expression

$$F(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

comme une fonction d'ensemble, définie sur la famille des ensembles mesurables. Etablissons tout d'abord la propriété suivante.

Théorème 3. *Si* $A = \bigcup_n A_n$, *où* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *pour* $i \neq j$, *alors*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu, \tag{15}$$

l'existence de l'intégrale du premier membre entraîne l'existence des intégrales et la convergence absolue de la série du second membre.

Démonstration. Vérifions d'abord l'affirmation du théorème pour une fonction simple f, prenant les valeurs

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

Soient

$$B_k = \{x : x \in A,\ f(x) = y_k\},$$
$$B_{nk} = \{x : x \in A_n,\ f(x) = y_k\}.$$

Alors

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{nk}) =$$
$$= \sum_n \sum_k y_k \mu(B_{nk}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu. \tag{16}$$

Comme, sous l'hypothèse d'intégrabilité de la fonction f sur A, la série $\sum y_k \mu(B_k)$ est absolument convergente et comme la mesure de chaque ensemble est non négative, toutes les autres séries dans la suite d'égalités (16) sont aussi absolument convergentes.

Dans le cas d'une fonction arbitraire f, le fait qu'elle est intégrable sur A implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction simple g, intégrable sur A, vérifiant la condition

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon. \tag{17}$$

Pour g on a

$$\int_A g(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} g(x)\, d\mu, \tag{18}$$

où g est intégrable sur chacun des ensembles A_n et la série (18) est absolument convergente. De cette dernière circonstance et de l'éva-

luation (17) il résulte que la fonction f est aussi intégrable sur chacun des ensembles A_n et que

$$\sum_n \left| \int_{A_n} f(x)\, d\mu - \int_{A_n} g(x)\, d\mu \right| \leqslant \sum_n \varepsilon\mu(A_n) = \varepsilon\mu(A),$$

$$\left| \int_A f(x)\, d\mu - \int_A g(x)\, d\mu \right| \leqslant \varepsilon\mu(A);$$

compte tenu de (18), on en déduit que la série $\sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu$ est absolument convergente et que

$$\left| \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu - \int_A f(x)\, d\mu \right| \leqslant 2\varepsilon\mu(A).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on a

$$\sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu.$$

C o r o l l a i r e. *Si la fonction f est intégrable sur A, elle est aussi intégrable sur tout ensemble mesurable $A' \subset A$.*

Nous avons montré que l'intégrabilité de la fonction f sur l'ensemble A implique que si $A = \bigcup_n A_n$ et $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors f est intégrable sur chaque A_n et l'intégrale sur A est égale à la somme des intégrales sur les ensembles A_n. Cette proposition admet la réciproque suivante.

T h é o r è m e 4. *Si $A = \bigcup_n A_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$ et la série*

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu \tag{19}$$

est convergente, alors la fonction f est intégrable sur A et

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu.$$

D é m o n s t r a t i o n. Ici, le seul fait nouveau par rapport au théorème précédent est l'affirmation que la convergence de la série (19) implique l'intégrabilité de f sur A.

Démontrons le théorème d'abord pour le cas d'une fonction simple f prenant les valeurs f_i. Posons

$$B_i = \{x : x \in A,\ f(x) = f_i\},\quad A_{ni} = A_n \cap B_i;$$

alors

$$\bigcup_n A_{ni} = B_i \quad \text{et} \quad \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu = \sum_i |f_i|\, \mu(A_{ni}).$$

La convergence de la série (19) implique la convergence des séries

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \mu(B_i).$$

La convergence de la dernière série entraîne l'existence de l'intégrale

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_i f_i \mu(B_i).$$

Dans le cas général, on approche la fonction f par une fonction simple $\tilde{f}$, de sorte que

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Alors

$$\int_{A_n} |\tilde{f}(x)|\, d\mu \leqslant \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu + \varepsilon\mu(A_n)$$

et, comme la série

$$\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$$

est convergente, de la convergence de la série (19) on déduit la convergence de la série

$$\sum_n \int_{A_n} |\tilde{f}(x)|\, d\mu,$$

ce qui signifie, d'après ce qu'on vient de démontrer, que la fonction simple $\tilde{f}$ est intégrable sur A. Mais alors, en vertu de l'inégalité (20), la fonction initiale f est aussi intégrable sur A.

Le théorème est démontré.

I n é g a l i t é d e T c h é b y c h e v. *Si* $\varphi(x) \geqslant 0$ *sur* A *et* $c > 0$, *alors*

$$\mu\{x : x \in A,\ \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int_A \varphi(x)\, d\mu. \tag{21}$$

En effet, soit

$$A' = \{x : x \in A,\ \varphi(x) \geqslant c\}.$$

Alors

$$\int_A \varphi(x)\, d\mu = \int_{A'} \varphi(x)\, d\mu + \int_{A \setminus A'} \varphi(x)\, d\mu \geqslant \int_{A'} \varphi(x)\, d\mu \geqslant c\mu(A').$$

C o r o l l a i r e. *Si*

$$\int_A |f(x)|\, d\mu = 0,$$

alors $f(x) = 0$ *presque partout.*

En effet, d'après l'inégalité de Tchébychev, on a

$$\mu\left\{x{:}x\in A,\ |f(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}\leqslant n\int_A |f(x)|\,d\mu=0$$

pour tous les n. Par conséquent,

$$\mu\{x{:}x\in A,\ f(x)\neq 0\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left\{x{:}x\in A,\ |f(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}=0.$$

Au numéro précédent nous avons montré que l'intégrale de Lebesgue de toute fonction f sur un ensemble de mesure nulle est égale à 0.

Cette proposition peut être considérée comme cas limite de l'important théorème suivant.

Théorème 5 (continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue). *Si $f(x)$ est une fonction sommable sur l'ensemble A, alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que*

$$\left|\int_e f(x)\,d\mu\right|<\varepsilon$$

pour tout ensemble mesurable $e\subset A$ tel que $\mu(e)<\delta$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le théorème est évident, lorsque la fonction f est bornée. Soit donc f une fonction arbitraire, sommable sur A. Posons

$$A_n=\{x{:}x\in A,\ n\leqslant|f(x)|<n+1\}$$

et

$$B_N=\bigcup_{n=0}^{N}A_n,\ C_N=A\setminus B_N.$$

Alors, en vertu du théorème 3,

$$\int_A |f(x)|\,d\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|\,d\mu.$$

Choisissons N de façon que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|f(x)|\,d\mu=\int_{C_N}|f(x)|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

et soit

$$0<\delta<\frac{\varepsilon}{2(N+1)}.$$

Si maintenant $\mu(e) < \delta$, alors

$$\left|\int_e f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,d\mu = \int_{e\cap B_N} |f(x)|\,d\mu + \int_{e\cap C_N} |f(x)|\,d\mu.$$

La première des intégrales figurant ici au second membre est inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$ (propriété V) ; quant à la deuxième, elle ne dépasse pas l'intégrale prise sur l'ensemble C_N tout entier et, par suite, est aussi inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, on a

$$\int_e |f(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Les propriétés de l'intégrale comme fonction d'ensemble, établies plus haut, conduisent au résultat suivant. *Soit f une fonction non négative, sommable sur l'espace X par rapport à la mesure μ. Alors la fonction*

$$F(A) = \int_A f(x)\,d\mu$$

est définie pour tous les ensembles mesurables $A \subset X$, est non négative et σ-additive, c.-à-d. vérifie la condition : si $A = \bigcup_n A_n$ et $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors $F(A) = \sum_n F(A_n)$. En d'autres termes, *l'intégrale d'une fonction non négative, considérée comme fonction d'ensemble, jouit de toutes les propriétés d'une mesure σ-additive.* Cette mesure est définie sur la même σ-algèbre que la mesure initiale μ ; elle est liée à μ par la condition ; si $\mu(A) = 0$, on a également $F(A) = 0$.

5. Passage à la limite sous le signe de l'intégrale de Lebesgue. La question du passage à la limite sous le signe somme ou, ce qui revient au même, la question de l'intégration terme à terme d'une série convergente, se pose souvent dans de nombreux problèmes.

Dans les cours d'analyse classique on montre qu'une condition suffisante pour qu'un tel passage à la limite soit possible est la convergence uniforme de la suite (la série) considérée.

Nous établirons ici quelques théorèmes sur le passage à la limite sous le signe de l'intégrale de Lebesgue qui représentent des généralisations à grande portée de théorèmes correspondants de l'analyse classique.

Théorème 6 (de Lebesgue). *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions sur A convergeant vers f. Si pour tous les n on a*

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x),$$

où φ *est une fonction intégrable sur* A, *alors la fonction limite* f *est intégrable sur* A *et*

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu.$$

Démonstration. De l'hypothèse du théorème on déduit facilement que $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$. Mais alors, comme nous l'avons remarqué au nº 3 (propriété VII), la fonction f est intégrable sur A. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 5 il existe $\delta > 0$ tel que $\mu(B) < \delta$ entraîne

$$\int_B \varphi(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{22}$$

En vertu du théorème d'Egorov, on peut choisir B de façon que $\mu(B) < \delta$ et que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $C = A \setminus B$. Donc, il existe N tel que pour $n \geqslant N$ et $x \in C$ on ait

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}.$$

Alors

$$\int_A f(x)\,d\mu - \int_A f_n(x)\,d\mu =$$

$$= \int_C [f(x) - f_n(x)]\,d\mu + \int_B f(x)\,d\mu - \int_B f_n(x)\,d\mu.$$

Comme $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, et $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, on en déduit, compte tenu de (22), que

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu - \int_A f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Le théorème est démontré.

Corollaire. *Si* $|f_n(x)| \leqslant M = \text{const}$ *et* $f_n \to f$, *alors*

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu.$$

Remarque. Comme la valeur de l'intégrale ne dépend pas des valeurs que la fonction prend sur un ensemble de mesure nulle, dans le théorème 6 il suffit d'exiger que $\{f_n\}$ converge vers f presque partout et que chacune des inégalités $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ soit vérifiée également presque partout.

Théorème 7 (de B. Levi). *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions intégrables sur* A *telle que*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$$

et dont les intégrales sont majorées dans leur ensemble par une constante K:

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \leqslant K.$$

Alors la suite $\{f_n\}$ *admet presque partout sur A une limite (finie)*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{23}$$

la fonction f est intégrable sur A et

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu.$$

Sur l'ensemble (de mesure nulle), où la limite (23) n'existe pas, la fonction f peut être définie de façon arbitraire, par exemple, en posant sur cet ensemble $f(x) = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons supposer $f_1(x) \geqslant 0$, car le cas général peut être facilement réduit à cela par passage aux fonctions

$$\overline{f}_n = f_n - f_1.$$

Considérons l'ensemble

$$\Omega = \{x : x \in A,\ f_n(x) \to \infty\}.$$

Il est aisé de voir que $\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, où

$$\Omega_n^{(r)} = \{x : x \in A,\ f_n(x) > r\}.$$

En vertu de l'inégalité de Tchébychev (21), on a

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leqslant \frac{K}{r}.$$

Etant donné que $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \ldots$, on peut écrire

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant \frac{K}{r}$$

comme pour tout r on a l'inclusion

$$\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)},$$

il s'ensuit que $\mu(\Omega) \leqslant \frac{K}{r}$. Puisque r est arbitraire, on en déduit que

$$\mu(\Omega) = 0.$$

Ceci prouve que la suite monotone $\{f_n(x)\}$ admet presque partout sur A une limite finie $f(x)$.

Désignons par A_r l'ensemble des points $x \in A$ pour lesquels

$$r - 1 \leqslant f(x) < r, \quad r = 1, 2, \ldots$$

et posons $\varphi(x) = r$ sur A_r.

Lorsqu'on aura démontré l'intégrabilité de $\varphi(x)$ sur A, notre théorème deviendra une conséquence immédiate du théorème 6. Posons

$$B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r.$$

Etant donné que sur B_s les fonctions f_n et f sont bornées et on a toujours $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$, on peut écrire

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, d\mu \leqslant \int_{B_s} f(x)\, d\mu + \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x)\, d\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A).$$

D'autre part,

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, d\mu = \sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r).$$

Du fait que ces sommes sont bornées on déduit la convergence de la série

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r) = \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Ainsi, l'intégrabilité de la fonction φ sur A est démontrée. Dans le théorème démontré, la condition de non-décroissance monotone des fonctions $f_n(x)$ peut être remplacée, évidemment, par la condition de non-croissance monotone.

Corollaire. *Si* $\psi_n(x) \geqslant 0$ *et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu < \infty,$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ *est convergente presque partout sur* A *et*

$$\int_A \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \Big)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu.$$

Théorème 8 (de Fatou). *Si une suite de fonctions mesurables non négatives* $\{f_n\}$ *converge vers* f *presque partout sur* A *et*

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K,$$

alors la fonction f est intégrable sur A et

$$\int_A f(x)\,d\mu \leqslant K.$$

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x);$$

les fonctions φ_n sont mesurables, car

$$\{x : \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x : f_k(x) < c\}.$$

D'autre part, $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$; c'est pourquoi les fonctions φ_n sont intégrables et on a

$$\int_A \varphi_n(x)\,d\mu \leqslant \int_A f_n(x)\,d\mu \leqslant K;$$

enfin,

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

presque partout. Donc, en appliquant le théorème précédent à la suite $\{\varphi_n\}$, on obtient le résultat annoncé.

6. Intégrale de Lebesgue sur un ensemble de mesure infinie. Jusqu'ici, en parlant de l'intégrale et de ses propriétés, on supposait toujours que les fonctions considérées étaient données sur des ensembles de mesure finie. Cependant, on est souvent amené à considérer des fonctions données sur un ensemble dont la mesure est infinie, par exemple, si cet ensemble est une droite, sur laquelle est définie la mesure de Lebesgue. C'est pourquoi il est important d'étendre la notion d'intégrale à ce cas également. Nous nous bornerons au cas pratiquement le plus important où l'ensemble considéré X peut être mis sous la forme d'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie:

$$X = \bigcup_n X_n, \quad \mu(X_n) < \infty. \tag{24}$$

Si l'ensemble X, dans lequel est donnée la mesure μ peut être représenté comme une réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie, la mesure μ sur X s'appelle mesure σ-finie (cf. n° 3, § 3). Par exemple, la mesure de Lebesgue sur la droite, sur le plan ou sur un espace à n dimensions, est σ-finie. Une mesure ne possédant pas la propriété d'être σ-finie peut être obtenue, par exemple, en attribuant à chaque point de la droite numérique le poids 1. Alors tous les sous-ensembles de cette droite peuvent être considérés comme

mesurables: les ensembles finis sont de mesure finie, les autres étant de mesure infinie.

Toute suite croissante $\{X_n\}$ de sous-ensembles mesurables d'un ensemble X qui satisfait à la condition (24) s'appelle *suite exhaustive*. Introduisons maintenant la définition suivante.

Définition 4. Une fonction mesurable f, définie sur un ensemble X, sur lequel est donnée une mesure σ-finie μ, est dite *sommable* sur X, si elle est sommable sur chaque sous-ensemble mesurable $A \subset X$ de mesure finie et si pour toute suite exhaustive $\{X_n\}$ la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)\, d\mu \tag{25}$$

existe et ne dépend pas du choix de cette suite. Cette limite s'appelle *intégrale de f sur l'ensemble* X et se note par le symbole

$$\int_X f(x)\, d\mu.$$

Il est clair que pour une fonction f, nulle en dehors d'un certain ensemble de mesure finie, la définition ci-dessus est équivalente à celle donnée au nº 3.

Remarque. La définition de l'intégrale d'une fonction simple, donnée au nº 2, peut être étendue mot à mot au cas où la mesure peut être infinie. Certainement, dans ce cas, pour la sommabilité d'une fonction simple on doit supposer que cette fonction prend chaque valeur non nulle seulement sur un ensemble de mesure finie. La définition de la sommabilité, donnée au nº 3, se trouve en relation directe avec l'hypothèse de finitude de la mesure de l'ensemble X. En effet, si $\mu(X) = \infty$, la convergence uniforme d'une suite de fonctions simples mesurables $\{\varphi_n\}$ n'entraîne pas, en général, la convergence de la suite de leurs intégrales (donner un exemple !).

Les résultats exposés aux nºs 3 et 4 pour le cas d'une mesure finie s'étendent, dans les grandes lignes, aux intégrales sur des ensembles de mesure infinie.

La différence essentielle réside dans le fait que si $\mu(X) = \infty$, les fonctions mesurables et bornées sur X ne sont pas nécessairement sommables. En particulier, dans ce cas, aucune constante non nulle n'est intégrable sur X.

Le lecteur vérifiera sans peine que les théorèmes de Lebesgue, B. Levi et Fatou restent vrais dans le cas d'une mesure infinie.

7. Comparaison de l'intégrale de Lebesgue à l'intégrale de Riemann. On se propose d'étudier le lien entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann. Nous nous bornerons ici au cas le plus simple quand la mesure considérée est celle de Lebesgue sur la droite numérique.

Théorème 9. *Si l'intégrale de Riemann*

$$I=(R)\int_a^b f(x)\,dx$$

existe, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ *au sens de Lebesgue et on a*

$$\int_{[a,\,b]} f(x)\,d\mu = I.$$

Démonstration. Considérons une partition du segment $[a, b]$ en 2^n parties par les points

$$x_k = a+\frac{k}{2^n}(b-a)$$

et les sommes de Darboux correspondant à cette partition:

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk},$$

$$\omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},$$

où M_{nk} et m_{nk} sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de la fonction f sur le segment

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k.$$

D'après la définition de l'intégrale de Riemann,

$$I=\lim_{n\to\infty}\Omega_n = \lim_{n\to\infty}\omega_n.$$

Posons

$$\overline{f}_n(x) = M_{nk} \text{ pour } x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k,$$
$$\underline{f}_n(x) = m_{nk} \text{ pour } x_{k-1} \leqslant x < x_k.$$

Au point $x = b$ les fonctions $\overline{f}_n$ et $\underline{f}_n$ peuvent être définies de façon arbitraire. On vérifie sans peine que

$$\int_{[a,\,b]} \overline{f}_n(x)\,d\mu = \Omega_n, \qquad \int_{[a,\,b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu = \omega_n.$$

Comme la suite $\{\overline{f}_n\}$ est non croissante et la suite $\{\underline{f}_n\}$ est non décroissante, on a presque partout

$$\overline{f}_n(x) \to f(x) \geqslant \overline{f}(x), \quad \underline{f}_n(x) \to \underline{f}(x) \leqslant f(x).$$

D'après le théorème de B. Levi,

$$\int\limits_{[a,\, b]} \bar{f}(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = I = \lim_{n\to\infty} \omega_n = \int\limits_{[a,\, b]} \underline{f}(x)\, d\mu,$$

d'où

$$\int\limits_{[a,\, b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)|\, d\mu = \int\limits_{[a,\, b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x))\, d\mu = 0.$$

Par conséquent, on a presque partout

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = 0,$$

c.-à-d.

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$$

et donc

$$\int\limits_{[a,\, b]} f(x)\, d\mu = I.$$

Le théorème est démontré.

Il est facile d'indiquer des exemples de fonctions bornées sur un segment quelconque qui soient intégrables au sens de Lebesgue et non intégrables au sens de Riemann (par exemple, la fonction de Dirichlet, déjà citée, c.-à-d. la fonction sur [0, 1] qui prend la valeur 1 pour tout x rationnel et la valeur 0 pour tout x irrationnel). Parmi les fonctions non bornées il n'y a aucune qui puisse être intégrable au sens de Riemann, mais il y en a beaucoup qui sont intégrables au sens de Lebesgue. En particulier, toute fonction $f(x) \geqslant 0$, dont l'intégrale de Riemann

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

existe pour tout $\varepsilon > 0$ et admet une limite finie I, lorsque $\varepsilon \to 0$, est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Lebesgue et on a

$$\int\limits_{[a,\, b]} f(x)\, d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx.$$

L'intégrale impropre

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx,$$

dans le cas où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|\, dx = \infty,$$

n'existe pas au sens de Lebesgue, car, d'après la propriété VIII nº 3, la sommabilité de la fonction $f(x)$ entraînerait la sommabilité de la fonction $|f(x)|$. Par exemple, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \, dx$$

existe comme intégrale impropre (semi-convergente) de Riemann et n'existe pas comme intégrale de Lebesgue.

Lorsqu'une fonction est considérée sur toute la droite numérique (ou sur une demi-droite), l'intégrale de Riemann d'une telle fonction ne peut exister qu'en tant qu'intégrale impropre. Là encore, si une telle intégrale est absolument convergente, l'intégrale de Lebesgue correspondante existe et a la même valeur; si, par contre, cette intégrale n'est que semi-convergente, alors la fonction considérée n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. Par exemple, la fonction

$$\frac{\sin x}{x}$$

n'est pas intégrable selon Lebesgue sur la droite toute entière, car

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty .$$

Pourtant, l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

existe, comme on le sait, et vaut π.

§ 6. Produits directs des familles d'ensembles et des mesures. Théorème de Fubini

En analyse un rôle important est joué par les théorèmes sur la réduction d'une intégrale double (ou, plus généralement, multiple) à des intégrales simples. Dans la théorie des intégrales multiples de Lebesgue le résultat fondamental est le théorème de Fubini qui sera démontré à la fin de ce paragraphe. Nous établirons préalablement quelques notions et faits auxiliaires qui présentent, d'ailleurs, de l'intérêt en eux-mêmes.

1. Produits des familles d'ensembles. L'ensemble Z des couples ordonnés (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$ s'appelle *produit direct* des ensembles X et Y et se note $X \times Y$. De manière analogue, l'ensemble Z des suites finies ordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_k \in X_k$ s'appelle

produit direct des ensembles $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et se note

$$Z = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \boxtimes X_k.$$

Dans le cas particulier où

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X,$$

l'ensemble Z est la puissance n-ième de l'ensemble X:

$$Z = X^n.$$

Par exemple, l'espace arithmétique à n dimensions $\mathbf{R}^n$ est la puissance n-ième de la droite numérique $\mathbf{R}^1$. Le cube unité I^n, c.-à-d. l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}^n$ dont les coordonnées vérifient les conditions

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

est la puissance n-ième du segment unité $I^1 = [0, 1]$.

Si $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ sont des familles de parties des ensembles $X_1, X_2, \ldots, X_n$, alors

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n$$

désigne la famille des parties de l'ensemble $X = \boxtimes X_k$ qui peuvent être mises sous la forme

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

avec $A_k \in \mathfrak{S}_k$.

Si $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \ldots = \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}$, alors $\mathfrak{R}$ est la puissance n-ième de la famille $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^n.$$

Par exemple, la famille des parallélépipèdes de $\mathbf{R}^n$ est la puissance n-ième de la famille des segments de $\mathbf{R}^1$.

Théorème 1. *Si $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ sont des demi-anneaux, alors $\mathfrak{R} = \boxtimes \mathfrak{S}_k$ est aussi un demi-anneau.*

Démonstration. Conformément à la définition du demi-anneau, il faut vérifier que si $A, B \in \mathfrak{R}$, alors $A \cap B \in \mathfrak{R}$, et si, en outre, $B \subset A$, alors $A = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$, où $C_1 = B$, $C_i \cap C_j = \varnothing$ pour $i \neq j$ et $C_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Bornons-nous au cas $n = 2$.

I. Soient $A \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, $B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$; cela signifie que

$$A = A_1 \times A_2, \quad A_1 \in \mathfrak{S}_1, \ A_2 \in \mathfrak{S}_2,$$
$$B = B_1 \times B_2, \quad B_1 \in \mathfrak{S}_1, \ B_2 \in \mathfrak{S}_2.$$

Alors

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),$$

et, puisque

$$A_1 \cap B_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad A_2 \cap B_2 \in \mathfrak{S}_2,$$

on a

$$A \cap B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2.$$

II. Supposons maintenant qu'on ait, en outre,

$$B_1 \subset A_1, \quad B_2 \subset A_2;$$

étant donné que $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont des demi-anneaux, on a les décompositions suivantes:

$$A_1 = B_1 \cup B_1^{(1)} \cup \ldots \cup B_1^{(k)},$$
$$A_2 = B_2 \cup B_2^{(1)} \cup \ldots \cup B_2^{(l)}.$$

Mais alors

$$\begin{aligned} A = A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1 \times B_2^{(l)}) \cup \\ \cup (B_1^{(1)} \times B_2) \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(l)}) \cup \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cup (B_1^{(k)} \times B_2) \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(l)}). \end{aligned}$$

Le premier terme de cette décomposition est $B_1 \times B_2 = B$ et tous les termes appartiennent à la famille $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$.

Le théorème est démontré.

Cependant, de l'hypothèse que les familles $\mathfrak{S}_k$ sont des anneaux (ou des σ-algèbres) il ne résulte pas, en général, que le produit $\boxtimes_k \mathfrak{S}_k$ est un anneau (respectivement, une σ-algébre).

2. Produits des mesures. Soient $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ des demi-anneaux, sur lesquels sont données les mesures

$$\mu_1(A_1), \; \mu_2(A_2), \; \ldots, \; \mu_n(A_n), \; A_k \in \mathfrak{S}_k.$$

Pour des raisons de simplicité ces mesures seront supposées finies, bien que les raisonnements et les résultats qui vont suivre s'étendent sans modifications considérables au cas des mesures σ-finies (cf., par exemple, [21]).

Sur le demi-anneau

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n \tag{1}$$

définissons la mesure

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n \tag{2}$$

par la formule

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2) \ldots \mu_n(A_n), \tag{3}$$

où

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n.$$

Il faut démontrer encore que $\mu(A)$ est réellement une mesure, c.-à-d. que cette fonction d'ensemble est additive. Faisons cela pour $n = 2$.

Soit donnée la décomposition

$$A = A_1 \times A_2 = \bigcup_k B^{(k)}, \quad B^{(i)} \cap B^{(j)} = \varnothing, \quad \text{si} \quad i \neq j,$$
$$B^{(k)} = B_1^{(k)} \times B_2^{(k)}.$$

D'après le lemme 2, § 5, chap. I, il existe des décompositions

$$A_1 = \bigcup_m C_1^{(m)}, \quad A_2 = \bigcup_n C_2^{(n)}$$

telles que les ensembles $B_1^{(k)}$ soient réunions de certains des $C_1^{(m)}$ et les ensembles $B_2^{(k)}$ soient réunions de certains des $C_2^{(n)}$. Il est évident que

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) = \sum_n \sum_m \mu_1(C_1^{(m)})\,\mu_2(C_2^{(n)}), \tag{4}$$

$$\mu(B^{(k)}) = \mu_1(B_1^{(k)})\,\mu_2(B_2^{(k)}) = \sum_m \sum_n \mu_1(C_1^{(m)})\,\mu_2(C_2^{(n)}), \tag{5}$$

où la somme dans (5) est étendue aux m et n tels que $C_1^{(m)} \subset B_1^{(k)}$, $C_2^{(n)} \subset B_2^{(k)}$ et le second membre de l'égalité (4) contient une fois et une seule chaque terme figurant aux seconds membres des égalités (5). Par conséquent,

$$\mu(A) = \sum_k \mu(B_k),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, on voit, en particulier, que l'additivité des mesures élémentaires sur l'espace euclidien à n dimensions résulte de l'additivité de la mesure linéaire sur la droite.

La mesure (2), définie sur le demi-anneau (1) au moyen de la formule (3) sera appelée *produit des mesures* $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

T h é o r è m e 2. *Si les mesures* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *sont* σ*-additives, la mesure produit* $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$ *est aussi* σ*-additive.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous nous bornerons au cas $n = 2$. Désignons par λ_1 le prolongement selon Lebesgue de la mesure μ_1. Soit $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, où les ensembles C et C_n sont des éléments de la famille $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, c.-à-d.

$$C = A \times B, \qquad A \in \mathfrak{S}_1, \qquad B \in \mathfrak{S}_2,$$
$$C_n = A_n \times B_n, \quad A_n \in \mathfrak{S}_1, \quad B_n \in \mathfrak{S}_2.$$

On suppose que les ensembles A et $A_1, A_2, \ldots$ sont contenus dans l'espace X. Posons pour $x \in X$

$$f_n(x) = \begin{cases} \mu_2(B_n), & \text{si } x \notin A_n, \\ 0, & \text{si } x \notin A_n. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que pour $x \in A$ on a

$$\sum_n f_n(x) = \mu_2(B).$$

C'est pourquoi, en vertu du théorème de B. Levi (théorème 7, § 5), on peut écrire

$$\sum_n \int_A f_n(x)\, d\lambda_1 = \int_A \mu_2(B)\, d\lambda_1 = \lambda_1(A) \cdot \mu_2(B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B).$$

Or

$$\int_A f_n(x)\, d\lambda_1 = \mu_2(B_n)\, \mu_1(A_n) = \mu(C_n)\,;$$

par conséquent,

$$\sum_n \mu(C_n) = \mu(C).$$

Si $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des mesures σ-additives, données respectivement sur les σ-algèbres $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ leur *produit* sera, par définition, le prolongement de la mesure $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$. Il sera noté par le symbole

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n \text{ ou } \otimes \mu_k.$$

En particulier, pour

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$$

on obtient la puissance n-ième de la mesure :

$$\mu^n = \otimes \mu_k, \quad \mu_k = \mu.$$

Par exemple, la mesure n-dimensionnelle de Lebesgue μ^n est la puissance n-ième de la mesure linéaire de Lebesgue μ.

Remarquons que la mesure produit est automatiquement complète (même si les mesures $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ne sont pas complètes).

3. Expression de la mesure d'un ensemble du plan par l'intégrale de la mesure linéaire de ses coupes. Définition géométrique de l'intégrale de Lebesgue. Soit G un domaine du plan (x, y) limité par les verticales $x = a$, $x = b$ et les courbes $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$.

Comme on le sait, l'aire du domaine G s'exprime par l'intégrale

$$V(G) = \int_a^b \{\varphi(x) - \psi(x)\}\, dx.$$

La différence $\varphi(x_0) - \psi(x_0)$ représente la longueur de la coupe du domaine G selon la verticale $x = x_0$. Le problème est d'étendre ce moyen de mesurer les aires au cas des mesures produits arbitraires

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y.$$

Dans ce qui suit nous supposerons les mesures μ_x et μ_y définies sur des σ-algèbres, σ-additives et satisfaisant à la condition de complétude (si $B \subset A$ et $\mu(A) = 0$, alors B est mesurable) qui, comme on l'a déjà indiqué plus haut, est vérifiée pour tout prolongement de Lebesgue.

Posons

$$A_x = \{y:(x, y) \in A\} \ (x \text{ fixé}),$$
$$A_y = \{x:(x, y) \in A\} \ (y \text{ fixé}).$$

Si X et Y sont des axes numériques (et donc $X \times Y$ est un plan), alors A_{x_0} est la projection sur l'axe Y de la coupe de l'ensemble A selon la droite $x = x_0$.

Théorème 3. *Sous les hypothèses énumérées plus haut, pour tout ensemble* μ-*mesurable* A on a [1])

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x)\, d\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y)\, d\mu_y.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer l'égalité

$$\mu(A) = \int_X \varphi_A(x)\, d\mu_x, \ \text{où} \ \varphi_A(x) = \mu_y(A_x), \tag{6}$$

car la deuxième partie du théorème est parfaitement analogue à la première. Il importe de remarquer que le théorème renferme automatiquement l'affirmation que *pour presque tous les* x (au sens de la mesure μ_x) *les ensembles* A_x *sont mesurables pour la mesure* μ_y et que la fonction $\varphi_A(x)$ *est mesurable par rapport à la mesure* μ_x. Sans cela la formule (6) n'aurait pas de sens.

La mesure μ est le prolongement selon Lebesgue de la mesure

$$m = \mu_x \times \mu_y$$

définie sur la famille $\mathfrak{S}_m$ des ensembles de la forme

$$A = A_{y_0} \times A_{x_0}.$$

Pour ces ensembles la formule (6) est évidente, car dans ce cas

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \mu_y(A_{x_0}) & \text{pour } x \in A_{y_0}, \\ 0 & \text{pour } x \notin A_{y_0}. \end{cases}$$

---

[1]) Remarquons que l'intégration sur X se réduit pratiquement à l'intégration sur l'ensemble $\bigcup_y A_y \subset X$, en dehors duquel la fonction à intégrer est nulle. De manière analogue,

$$\int_Y = \int_{\bigcup_x A_x}.$$

On étend sans peine la formule (6) également aux ensembles de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ qui peuvent être représentés par des réunions finies d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathfrak{S}_m$.

Dans le cas général, la démonstration de l'égalité (6) est fondée sur le lemme suivant qui à lui seul présente de l'intérêt pour la théorie des prolongements de Lebesgue.

L e m m e. *Pour tout ensemble μ-mesurable A il existe un ensemble B de la forme*

$$B=\bigcap_n B_n, \quad B_1\supset B_2\supset \ldots \supset B_n\supset \ldots,$$

$$B_n=\bigcup_k B_{nk}, \quad B_{n1}\subset B_{n2}\subset \ldots \subset B_{nk}\subset \ldots,$$

où les ensembles B_{nk} appartiennent à $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, *tel que $A\subset B$ et*

$$\mu(A)=\mu(B). \tag{7}$$

D é m o n s t r a t i o n. D'après la définition de la mesurabilité, pour tout n donné il est possible de plonger l'ensemble A dans un ensemble $C_n=\bigcup\limits_r \Delta_{nr}$, réunion d'ensembles Δ_{nr} de $\mathfrak{S}_m$, de sorte que

$$\mu(C_n)<\mu(A)+\frac{1}{n}.$$

Posons $B_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k$ et remarquons que les ensembles B_n sont de la forme $B_n=\bigcup\limits_s \delta_{ns}$, où $\delta_{ns}\in\mathfrak{S}_m$. En posant, enfin, $B_{nk}=\bigcup\limits_{s=1}^{k}\delta_{ns}$, on obtient une famille d'ensembles B_{nk} possédant les propriétés demandées.

Le lemme est démontré.

L'égalité (6) s'étend facilement des ensembles $B_{nk}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ aux ensembles B_n et B à l'aide du théorème de B. Levi (théorème 7, § 5), car

$$\varphi_{B_n}(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{B_{nk}}(x), \quad \varphi_{B_{n1}}\leqslant\varphi_{B_{n2}}\leqslant\ldots,$$

$$\varphi_B(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{B_n}(x), \quad \varphi_{B_1}\geqslant\varphi_{B_2}\geqslant\ldots$$

En vertu de la continuité de la mesure, ces égalités sont vraies en tout point x. Si $\mu(A)=0$, alors $\mu(B)=0$ et presque partout

$$\varphi_B(x)=\mu_y(B_x)=0.$$

Comme $A_x\subset B_x$, presque pour tous les x, l'ensemble A_x est mesurable et

$$\varphi_A(x)=\mu_y(A_x)=0,$$

$$\int \varphi_A(x)\,d\mu_x=0=\mu(A).$$

Donc, pour un ensemble A de mesure nulle la formule (6) est vraie. Dans le cas général, on met A sous la forme $A = B \setminus C$, où, en vertu de l'égalité (7),

$$\mu (C) = 0.$$

Comme la formule (6) est vraie pour les ensembles B et C, il est aisé de voir qu'elle est vraie aussi pour l'ensemble A. La démonstration du théorème 3 est ainsi achevée.

Soient maintenant Y un axe numérique, μ_y la mesure linéaire de Lebesgue et A un ensemble de points (x, y) de la forme

$$\{(x, y): x \in M,\ 0 \leqslant y \leqslant f (x)\}, \tag{8}$$

où M est un ensemble μ_x-mesurable quelconque et $f (x)$ est une fonction intégrable non négative. Dans ce cas

$$\mu_y (A_x) = \begin{cases} f (x) & \text{pour } x \in M, \\ 0 & \text{pour } x \notin M \end{cases}$$

et

$$\mu (A) = \int\limits_M f (x)\, d\mu_x.$$

Ainsi, nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 4. *L'intégrale de Lebesgue d'une fonction sommable non négative $f (x)$ est égale à la mesure $\mu = \mu_x \times \mu_y$ de l'ensemble A, défini par la relation* (8).

Lorsque X est un axe numérique, M est un segment et $f (x)$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, ce théorème traduit l'interprétation géométrique bien connue de l'intégrale comme aire de la figure située au-dessous du graphe de la fonction.

4. Théorème de Fubini. Considérons le produit $U = X \times Y \times Z$; si sur X, Y, Z sont données les mesures μ_x, μ_y, μ_z, alors la mesure

$$\mu_u = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu_z$$

peut être définie comme

$$(\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu_z$$

ou bien comme

$$\mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu_z).$$

Il est aisé de vérifier qu'en réalité ces définitions sont équivalentes.

Le théorème suivant est le plus important dans la théorie des intégrales multiples.

Théorème 5 (de Fubini). *Soient μ_x et μ_y deux mesures définies sur des σ-algèbres, toutes les deux σ-additives et complètes, et*

soit $f(x, y)$ une fonction intégrable pour la mesure

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

sur un ensemble

$$A \subset X \times Y. \tag{9}$$

Alors[1])

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x = \\ = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y)\, d\mu_x \right) d\mu_y. \tag{10}$$

L'énoncé du théorème renferme l'affirmation que les intégrales intérieures existent pour presque toutes les valeurs de la variable, par rapport à laquelle on prend les intégrales extérieures.

D é m o n s t r a t i o n. Effectuons la démonstration d'abord pour le cas $f(x, y) \geqslant 0$. A cet effet, considérons le produit

$$U = X \times Y \times Z$$

dont le troisième facteur est la droite numérique et la mesure produit

$$\lambda = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu^1 = \mu \otimes \mu^1,$$

où μ^1 est la mesure linéaire de Lebesgue.

Soit W un sous-ensemble de U, défini par la condition:

$$(x, y, z) \in W,$$

si

$$(x, y) \in A, \quad 0 \leqslant z \leqslant f(x, y).$$

D'après le théorème 4, on a

$$\lambda(W) = \int_A f(x, y)\, d\mu. \tag{11}$$

D'autre part, en vertu du théorème 3,

$$\lambda(W) = \int_X \xi(W_x)\, d\mu_x, \tag{12}$$

où $\xi = \mu \otimes \mu^1$ et W_x désigne l'ensemble des couples (y, z) tels que $(x, y, z) \in W$. En outre, d'après le théorème 4, on a encore

$$\xi(W_x) = \int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y. \tag{13}$$

---

[1]) Cf. note au bas de la page 308.

En comparant (11), (12) et (13), on obtient

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le cas général se réduit au cas précédent à l'aide des égalités:

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y),$$

$$f^+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2},$$

$$f^-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2}.$$

R e m a r q u e. Comme le montrent les exemples ci-dessous, l'existence des intégrales

$$\int_X \left(\int_{A_x} f\, d\mu_y \right) d\mu_x \quad \text{et} \quad \int_Y \left(\int_{A_y} f\, d\mu_x \right) d\mu_y \tag{14}$$

n'implique, en général, ni les égalités (10), ni l'intégrabilité de la fonction $f(x, y)$ sur A. Cependant, *si au moins l'une des intégrales*

$$\int_X \left(\int_{A_x} |f(x, y)|\, d\mu_y \right) d\mu_x, \quad \int_Y \left(\int_{A_y} |f(x, y)|\, d\mu_x \right) d\mu_y \tag{15}$$

existe, la fonction $f(x, y)$ est intégrable sur A et on a les égalités (10).

En effet, supposons, par exemple, que la première des intégrales (15) existe et soit égale à M. La fonction $f_n(x, y) = \min\{|f(x,y)|, n\}$ est mesurable, bornée et, donc, sommable sur A. D'après le théorème de Fubini,

$$\int_A f_n(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f_n(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x \leqslant M. \tag{16}$$

Les fonctions f_n forment une suite monotone non décroissante qui converge presque partout vers $|f(x, y)|$. D'après le théorème de B. Levi, on en déduit, compte tenu de l'inégalité (16), que la fonction $|f(x, y)|$ est sommable sur A. Mais alors la fonction $f(x, y)$ est aussi sommable et satisfait aux conditions du théorème de Fubini. D'où notre assertion.

Nous avons démontré le théorème de Fubini sous l'hypothèse que les mesures μ_x et μ_y (donc, μ aussi) sont finies. Cependant, le théorème est vrai aussi dans le cas des mesures σ-finies (cf., par exemple, [21]).

Considérons des exemples de fonctions pour lesquelles les intégrales (14) existent, mais les égalités (10) n'ont pas lieu.

1. Soient

$$A = [-1,1]^2$$

et

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Alors

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dx = 0 \quad \text{pour} \quad y \neq 0$$

et

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dy = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0.$$

Par conséquent,

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dy \right) dx = 0,$$

mais l'intégrale double au sens de Lebesgue sur le carré n'existe pas, car

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |f(x, y)|\, dx\, dy = \int_{0}^{1} dr \int_{0}^{2\pi} \frac{|\sin\varphi \cos\varphi|}{r}\, d\varphi = 2 \int_{0}^{1} \frac{dr}{r} = \infty.$$

2. Soient

$$A = [0, 1]^2$$

et

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n} \text{ pour } \dfrac{1}{2^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}; \quad \dfrac{1}{2^n} \leqslant y < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{2n+1} \text{ pour } \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant x < \dfrac{1}{2^n}; \quad \dfrac{1}{2^n} \leqslant y < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 \quad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On peut montrer que

$$\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1} f(x, y)\, dx \right) dy = 0$$

et

$$\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1} f(x, y)\, dy \right) dx = 1.$$

Intégrale indéfinie de Lebesgue. Théorie de la dérivation

Dans ce chapitre nous considérons l'intégrale de Lebesgue principalement pour des fonctions sur la droite, en supposant que la mesure, par rapport à laquelle on prend cette intégrale, est la mesure linéaire habituelle de Lebesgue.

Si f est une fonction sommable, définie sur un espace mesurable X, sur lequel est définie une mesure μ, l'intégrale

$$\int_A f(x)\, d\mu \qquad (*)$$

existe pour tout ensemble mesurable $A \subset X$ et, pour f fixée, représente une fonction d'ensemble, définie pour tous les ensembles mesurables $A \subset X$. Une telle intégrale s'appelle *intégrale indéfinie de Lebesgue*. En tant qu'espace X on peut prendre, en particulier, un segment de la droite numérique. Si, en outre, A est également un segment, l'intégrale (*) est une fonction de deux points, extrémités du segment A. On supposera, dans ce cas, que la mesure μ est celle de Lebesgue sur la droite et on écrira dt au lieu de $d\mu$. En fixant l'une des bornes, par exemple, la borne inférieure, on peut étudier les propriétés de l'intégrale $\int_a^x f(t)\, dt$, prise sur le segment $[a, x]$, en la considérant comme une fonction de la variable x. Ce problème nous amènera à considérer quelques classes importantes de fonctions sur la droite. Le problème général de l'étude de l'intégrale de Lebesgue (d'une fonction fixée f) comme fonction d'ensemble fait l'objet du § 5.

Du cours d'analyse élémentaire on connaît les égalités fondamentales suivantes qui expriment la relation entre les opérations de dérivation et d'intégration: si f est une fonction continue et F est une fonction continûment dérivable, on a

1) $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x),$$

2) $$\int_a^b F'(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Les questions suivantes se posent : l'égalité 1) est-elle vraie pour les fonctions sommables au sens de Lebesgue ? Quelle est la classe (aussi vaste que possible) des fonctions pour lesquelles l'égalité 2) a lieu ?

Ces questions sont étudiées dans les paragraphes suivants de ce chapitre.

§ 1. Fonctions monotones. Dérivabilité de l'intégrale par rapport à la borne supérieure

1. Propriétés fondamentales des fonctions monotones. Nous commencerons l'étude des propriétés de l'intégrale de Lebesgue

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

comme fonction de sa borne supérieure par la remarque évidente, mais importante, suivante : si la fonction f est non négative, alors $\Phi(x)$ est une fonction monotone non décroissante. D'autre part, toute fonction sommable est différence de deux fonctions sommables non négatives :

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t). \tag{2}$$

De ce fait, l'intégrale (1) peut être décomposée en une différence de deux fonctions monotones non décroissantes. Par conséquent, l'étude de l'intégrale de Lebesgue comme fonction de sa borne supérieure peut être réduite à l'étude des fonctions monotones du même type. Les fonctions monotones (indépendamment de leur provenance) possèdent une série de propriétés simples, mais importantes, que nous nous proposons d'exposer ici.

Rappelons d'abord certaines notions. Lorsqu'il ne sera pas fait mention expresse du contraire, nous ne considérerons que des fonctions données sur un segment.

Une fonction f est dite *monotone non décroissante*, si $x_1 \leqslant x_2$ implique

$$f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

de manière analogue on définit une fonction monotone non croissante.

Soit f une fonction arbitraire sur la droite. La limite [1])

$$\lim_{h \to 0+} f(x_0 + h)$$

(lorsqu'elle existe) s'appelle *limite à droite* de la fonction f au point x_0 et se note $f(x_0 + 0)$. De façon analogue on définit la *limite à*

[1]) Le symbole $h \to 0+$ signifie que h tend vers 0 en restant toujours positif.

gauche de la fonction f au point x_0, notée $f(x_0 - 0)$. L'égalité $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ signifie, évidemment, soit que la fonction f est continue au point x_0, soit qu'elle a en ce point une discontinuité non essentielle. Le point, où toutes ces deux limites existent, mais sont inégales, s'appelle *point de discontinuité de première espèce*; la différence $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ s'appelle *saut* de la fonction f en ce point.

Si $f(x_0) = f(x_0 - 0)$, la fonction f s'appelle fonction *continue à gauche* au point x_0; si $f(x_0) = f(x_0 + 0)$, on dit que f est *continue à droite* en ce point.

On se propose d'établir les propriétés fondamentales des fonctions monotones. Pour fixer les idées, nous parlerons des fonctions monotones non décroissantes, mais il est clair que tout ce qui sera dit plus bas s'étend automatiquement aux fonctions monotones non croissantes.

1. *Toute fonction f, monotone non décroissante sur* $[a, b]$, *est mesurable et bornée, donc sommable.*

En effet, par définition on a

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \text{ sur } [a, b].$$

D'autre part, pour toute constante c, l'ensemble

$$A_c = \{x : f(x) < c\}$$

est soit un segment, soit un intervalle semi-ouvert (soit un ensemble vide). En effet, supposons qu'il existe des points x tels que $f(x) < c$, et soit d la borne supérieure de ces points. Alors A_c représente soit le segment $[a, d]$, soit l'intervalle semi-ouvert $[a, d)$.

2. *Une fonction monotone ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.*

En effet, soit x_0 un point quelconque de $[a, b]$, et soit $x_n \to x_0$, où $x_n < x_0$. Alors la suite $\{f(x_n)\}$ est bornée inférieurement et supérieurement (par exemple, par $f(a)$ et $f(b)$). Par conséquent, elle a au moins un point d'accumulation. D'autre part, l'existence de plusieurs points d'accumulation pour une telle suite serait, évidemment, en contradiction avec la monotonie de la fonction f. Ainsi, $f(x_0 - 0)$ existe. De manière analogue on établit l'existence de $f(x_0 + 0)$.

Une fonction monotone n'est pas nécessairement continue. Cependant, on a la proposition suivante.

3. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.*

En effet, la somme de tout nombre fini de sauts d'une fonction monotone f sur le segment $[a, b]$ ne dépasse pas $f(b) - f(a)$. Par conséquent, pour chaque n le nombre des sauts plus grands que $\frac{1}{n}$

est fini. En faisant leur somme pour tous les $n = 1, 2, \ldots$, on trouve que le nombre total de sauts est fini ou infini-dénombrable.

Parmi les fonctions monotones les plus simples sont celles que l'on appelle *fonctions des sauts.* Elles peuvent être construites de la manière suivante. Supposons que sur le segment $[a, b]$ soit donnée une suite finie ou dénombrable de points

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

et qu'à chacun d'eux soit associé un nombre positif h_n de telle façon que $\sum\limits_n h_n < \infty$. Définissons une fonction f sur $[a, b]$, en posant

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n. \tag{3}$$

Il est clair que cette fonction est monotone non décroissante. En outre, elle est continue à g a u c h e [1]) en chaque point, l'ensemble de ses points de discontinuité n'est autre que $\{x_n\}$ et le saut en chaque point x_n vaut h_n [2]). En effet,

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n$$

et, comme tout x_n vérifiant la condition $x_n < x$ vérifie également la condition $x_n < x - \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la dernière limite est égale à $\sum\limits_{x_n < x} h_n = f(x)$. Ainsi,

$$f(x-0) = f(x).$$

Si le point x c o ï n c i d e avec l'un quelconque des points x_n, par exemple, avec $x = x_{n_0}$, alors

$$f(x_{n_0}+0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f(x_{n_0}+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{x_n < x_{n_0}+\varepsilon} h_n = \sum_{x_n \leqslant x_{n_0}} h_n,$$

c.-à-d.

$$f(x_{n_0}+0) - f(x_{n_0}-0) = h_{n_0}.$$

Enfin, si x n e c o ï n c i d e avec aucun des points x_n, la fonction des sauts est continue en ce point (démontrer !).

Dans la suite, nous entendrons par fonction des sauts toute fonction qui peut être obtenue à l'aide de la construction décrite plus

---

[1]) Si la fonction f était définie par la formule

$$f(x) = \sum_{x_n \leqslant x} h_n,$$

elle serait continue à d r o i t e. Dans la suite, sauf s'il y a mention explicite du contraire, toutes les fonctions seront supposées continues à gauche.

[2]) A condition qu'aucun des points x_n ne coïncide avec b, car $x_n = b$ n'intervient pas dans la somme (3). Pour tenir compte du saut au point b il faut, au lieu de $[a, b]$ considérer l'intervalle semi-ouvert $[a, b + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

haut. Les fonctions des sauts les plus simples sont les fonctions en escalier dont les points de discontinuité peuvent être disposés sous la forme d'une suite monotone

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$$

Dans le cas général, une fonction des sauts peut être douée d'une structure plus compliquée; par exemple, si $\{x_n\}$ est l'ensemble des points rationnels du segment $[a, b]$ et $h_n = \frac{1}{2^n}$, la formule (3) définit une fonction des sauts, discontinue pour x rationnel et continue pour x irrationnel.

Une autre classe de fonctions monotones, en quelque sorte opposées aux fonctions des sauts, est constituée par les fonctions continues monotones. On a la proposition suivante.

4. *Toute fonction monotone continue à gauche peut être représentée de façon unique comme la somme d'une fonction continue monotone et d'une fonction des sauts (continue à gauche).*

En effet, soient f une fonction non décroissante continue à gauche, $x_1, x_2, \ldots$ ses points de discontinuité et $h_1, h_2, \ldots$ ses sauts en ces points. Posons

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

La différence

$$\varphi = f - H$$

est une fonction c o n t i n u e non décroissante. Pour démontrer cela, considérons la différence

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [f(x'') - f(x')] - [H(x'') - H(x')],$$

où $x' < x''$. Le second membre de cette égalité représente la différence entre l'accroissement total de la fonction f sur le segment $[x', x'']$ et la somme de ses sauts sur ce segment. Il est clair que cette différence est non négative, ce qui prouve que la fonction φ est non décroissante. D'autre part, x^* étant un point arbitraire, on peut écrire

$$\varphi(x^*-0) = f(x^*-0) - H(x^*-0) = f(x^*-0) - \sum_{x_n < x^*} h_n,$$

$$\varphi(x^*+0) = f(x^*+0) - H(x^*+0) = f(x^*+0) - \sum_{x_n \leq x^*} h_n,$$

d'où

$$\varphi(x^*+0) - \varphi(x^*-0) = f(x^*+0) - f(x^*-0) - h^* = 0$$

(où h^* est le saut de la fonction H au point x^*). Il en résulte, compte tenu de la continuité à gauche de f et H, que φ est bien une fonction continue.

2. Dérivabilité d'une fonction monotone. Passons maintenant à la question de savoir si toute fonction monotone a une dérivée.

Théorème 1 (H. Lebesgue). *Toute fonction monotone f, définie sur un segment* $[a, b]$, *admet presque partout sur ce segment une dérivée finie.*

Introduisons tout d'abord certaines notions indispensables pour la démonstration de ce théorème.

Comme on le sait, la dérivée d'une fonction f en un point x_0 est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4}$$

quand $x \to x_0$. Cette limite peut, bien sûr, exister ou ne pas exister, mais les quatre grandeurs suivantes (qui peuvent prendre des valeurs finies ou infinies) ont toujours un sens :

Λ_d : la limite supérieure du rapport (4) quand x tend vers x_0 à droite (c.-à-d. de sorte que $x - x_0 > 0$). Cette grandeur s'appelle *nombre dérivé supérieur droit.*

λ_d (*nombre dérivé inférieur droit*) : la limite inférieure du rapport (4) quand $x \to x_0$ à droite.

Λ_g (*nombre dérivé supérieur gauche*) : la limite supérieure du rapport (4) quand $x \to x_0$ à gauche.

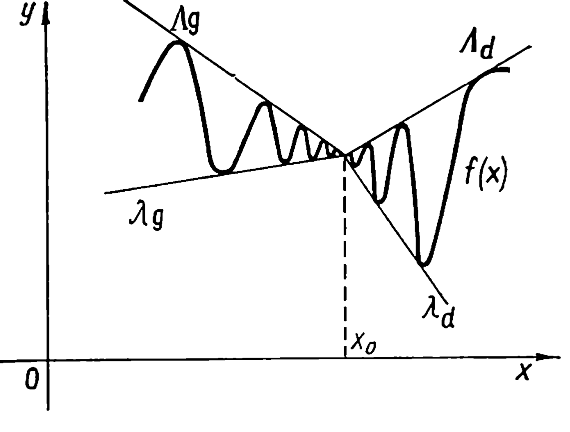


Fig. 19

λ_g (*nombre dérivé inférieur gauche*) : la limite inférieure du rapport (4) quand $x \to x_0$ à gauche.

Sur la figure 19 sont indiquées les droites ayant pour coefficients angulaires respectivement Λ_d, λ_d, Λ_g, λ_g. Il est clair qu'on a toujours

$$\lambda_d \leqslant \Lambda_d \text{ et } \lambda_g \leqslant \Lambda_g.$$

Si Λ_d et λ_d sont finis et égaux, leur valeur commune est la dérivée à droite de la fonction $f(x)$ au point x_0. De même, si $\Lambda_g = \lambda_g$, leur valeur commune est la dérivée à gauche. L'existence d'une dérivée finie de la fonction f en x_0 équivaut à ce que tous les nombres dérivés de la fonction f en ce point sont finis et égaux entre eux. C'est pourquoi le théorème de Lebesgue peut être formulé de la façon suivante : *pour une fonction monotone sur* $[a, b]$ *les relations*

$$-\infty < \lambda_g = \lambda_d = \Lambda_g = \Lambda_d < \infty$$

ont lieu presque partout sur $[a, b]$.

Exercice. Soit $f^* (x) = - f (x)$. Quelles relations existent entre les nombres dérivés de f^* et ceux de f?

Même question, si l'on passe de $f (x)$ à $f (-x)$.

La démonstration du théorème de Lebesgue est fondée sur le lemme ci-dessous que nous utiliserons encore dans la suite.

Introduisons la définition suivante. Soit $g (x)$ une fonction continue, donnée sur le segment $a \leqslant x \leqslant b$. Nous dirons qu'un point x_0 de ce segment est *invisible à droite* pour la fonction g, s'il existe un point ξ $(x_0 < \xi \leqslant b)$ tel que $g (x_0) < g (\xi)$ (fig. 20).

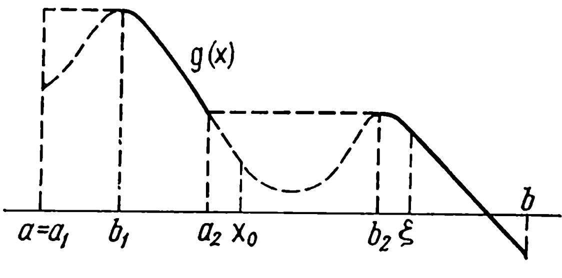


Fig. 20

Lemme (F. Riesz). *Pour toute fonction continue g, l'ensemble des points invisibles à droite est ouvert dans $[a, b]$ et, par conséquent, peut être représenté par une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (a_k, b_k) (et, peut être, d'un intervalle semi-ouvert contenant l'extrémité a). Pour chacun de ces intervalles on* a

$$g (a_k) \leqslant g (b_k). \tag{5}$$

Démonstration du lemme. Si x_0 est un point invisible à droite pour g, en vertu de la continuité de g, tous les points assez voisins de x_0 jouissent de la même propriété. Par conséquent, l'ensemble des points possédant cette propriété est ouvert dans $[a, b]$. Soit (a_k, b_k) l'un des intervalles composants de cet ensemble. Supposons que

$$g (a_k) > g (b_k); \tag{6}$$

il existe alors à l'intérieur de cet intervalle un point x_0 tel que $g (x_0) > g (b_k)$. Soit x^* le plus à droite des points de (a_k, b_k) pour lesquels $g (x) = g (x_0)$.

Comme $x^* \in (a_k, b_k)$, il existe un point $\xi > x^*$ tel que $g (\xi) > > g (x^*)$. Ce point ne peut pas appartenir à l'intervalle (a_k, b_k), parce que x^* est *le plus à droite* des points de cet intervalle pour lesquels $g (x) = g (x_0)$, tandis que $g (b_k) < g (x_0)$. D'autre part, l'inégalité $\xi > b_k$ est également impossible, car dans le cas contraire on aurait $g (b_k) < g (x_0) < g (\xi)$; or, b_k *n'est pas* un point invisible à droite. La contradiction obtenue montre que l'inégalité (6) est impossible. Par conséquent, $g (a_k) \leqslant g (b_k)$ et le lemme est

démontré. Le lecteur vérifiera sans peine qu'en réalité on a $g(a_k) = g(b_k)$, pourvu que $a_k \neq a$.

R e m a r q u e. Disons qu'un point x_0 est *invisible à gauche* pour la fonction continue $g(x)$, s'il existe un point $\xi < x_0$ tel que $g(\xi) > g(x_0)$. Un raisonnement analogue montre que l'ensemble des points invisibles à gauche est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints (a_k, b_k) et que

$$g(a_k) \geqslant g(b_k).$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème de Lebesgue. Effectuons d'abord la démonstration sous l'hypothèse que f est une fonction continue non décroissante. A cet effet, il suffit de démontrer que presque partout on a:

$$1)\ \Lambda_d < \infty, \quad 2)\ \lambda_g \geqslant \Lambda_d.$$

En effet, si l'on pose $f^*(x) = -f(-x)$, f^* sera une fonction monotone non décroissante, définie sur le segment $[-b, -a]$. Si Λ_d^* et λ_g^* sont les nombres dérivés, respectivement supérieur droit et inférieur gauche, de la fonction f^*, alors, comme on le vérifie aisément (cf. exercice, p. 320), pour tout $x \in (a, b)$ on a

$$\Lambda_g(x) = \Lambda_d^*(-x), \quad \lambda_d(x) = \lambda_g^*(-x).$$

Donc, en appliquant l'inégalité 2) à $f^*(x)$, on obtient

$$\lambda_d \geqslant \Lambda_g \tag{7}$$

presque partout sur $[a, b]$. En disposant les inégalités obtenues en chaîne et en tenant compte de la définition des nombres dérivés, on obtient

$$\Lambda_d \leqslant \lambda_g \leqslant \Lambda_g \leqslant \lambda_d \leqslant \Lambda_d,$$

ce qui signifie précisément que

$$\lambda_g = \lambda_d = \Lambda_g = \Lambda_d.$$

Montrons d'abord que $\Lambda_d < \infty$ presque partout. Si $\Lambda_d = \infty$ en un point x_0, pour toute constante C il existe un point $\xi > x_0$ tel que

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > C,$$

c.-à-d.

$$f(\xi) - f(x_0) > C(\xi - x_0)$$

ou

$$f(\xi) - C\xi > f(x_0) - Cx_0.$$

Autrement dit, x_0 est un point invisible à droite pour la fonction

$$g(x) = f(x) - Cx.$$

D'après le lemme de F. Riesz, l'ensemble des points possédant cette propriété est ouvert et pour chacun de ses intervalles composants (a_k, b_k) on a

$$f(a_k) - Ca_k \leqslant f(b_k) - Cb_k,$$

c.-à-d.

$$f(b_k) - f(a_k) \geqslant C(b_k - a_k).$$

En divisant par C et en faisant la somme des inégalités obtenues sur tous les intervalles (a_k, b_k), on obtient

$$\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{C} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

Comme la constante C peut être aussi grande que l'on veut, on en déduit que l'ensemble des points pour lesquels $\Lambda_d = \infty$ peut être recouvert par une famille d'intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut. Par conséquent, cet ensemble est de mesure nulle.

La même méthode, liée au lemme de F. Riesz, permet de démontrer que $\lambda_g \geqslant \Lambda_d$ presque partout, mais cette fois elle doit être appliquée deux fois. Considérons deux nombres rationnels c et C tels que $0 < c < C < \infty$ et posons $\rho = \frac{c}{C}$. Désignons par $E_{c, C}$ l'ensemble des x pour lesquels $\Lambda_d > C$ et $\lambda_g < c$. Lorsqu'on aura démontré que $\mu E_{c, C} = 0$, il s'ensuivra que $\lambda_g \geqslant \Lambda_d$ presque partout, car il est évident que l'ensemble des points pour lesquels $\lambda_g < \Lambda_d$ est une réunion finie ou dénombrable d'ensembles de la forme $E_{c, C}$.

Etablissons maintenant l'inégalité fondamentale.

Pour tout intervalle $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ *on a*

$$\mu(E_{c, C} \cap (\alpha, \beta)) \leqslant \rho(\beta - \alpha).$$

En effet, considérons d'abord l'ensemble des $x \in (\alpha, \beta)$ pour lesquels $\lambda_g < c$. A tout point x de cet ensemble on peut associer un point $\xi < x$ tel que

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c \quad \text{ou} \quad f(\xi) - c(\xi) > f(x) - cx.$$

Par conséquent, un tel point x est invisible à gauche pour la fonction $f(x) - cx$ et, d'après le lemme de F. Riesz (cf. remarque p. 321), l'ensemble de tous ces x est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$ et $f(\alpha_k) - c\alpha_k \geqslant f(\beta_k) - c\beta_k$, c.-à-d.

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k \leqslant c(\beta_k - \alpha_k). \tag{8}$$

Sur chacun des intervalles (α_k, β_k) considérons l'ensemble G_k des points x pour lesquels $\Lambda_d > C$. En appliquant de nouveau le lemme

de F. Riesz (cette fois, comme dans la démonstration de l'inégalité $\Lambda_d < \infty$, pour les points invisibles à droite), on peut conclure que G_k est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles disjoints $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$ et que

$$\beta_{kj}-\alpha_{kj} \leqslant \frac{1}{C}[f(\beta_{kj})-f(\alpha_{kj})]. \tag{9}$$

Il est clair que l'ensemble $E_{c,\,C} \cap (\alpha, \beta)$ peut être recouvert par la famille des intervalles $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$; en vertu des inégalités (8) et (9), on a

$$\sum_{k,\,j}(\beta_{kj}-\alpha_{kj}) \leqslant \frac{1}{C}\sum_{k,\,j}[f(\beta_{kj})-f(\alpha_{kj})] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{C}\sum_{k}[f(\beta_k)-f(\alpha_k)] \leqslant \frac{c}{C}\sum_{k}(\beta_k-\alpha_k) \leqslant \rho(\beta-\alpha)$$

et l'inégalité fondamentale est donc démontrée.

Maintenant il est aisé de démontrer que $\mu E_{c,\,C} = 0$.

Pour cela il suffit d'utiliser seulement la propriété de l'ensemble $E_{c,\,C}$ qui est décrite par l'inégalité fondamentale.

L e m m e. *Soit sur le segment* $[a, b]$ *un ensemble mesurable* A *tel que pour tout intervalle* $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ *on a l'inégalité*

$$\mu(A \cap (\alpha, \beta)) \leqslant \rho(\beta-\alpha),$$

où $0 < \rho < 1$. *Alors* $\mu A = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mu A = t$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble ouvert G, réunion dénombrable d'intervalles (a_m, b_m), tel que $A \subset G$ et $\sum_m (b_m - a_m) < t+\varepsilon$. Posons $t_m = \mu[A \cap (a_m, b_m)]$. Il est clair que $t = \sum_m t_m$. D'après l'hypothèse du lemme, $t_m \leqslant \rho(b_m - a_m)$. Par conséquent, $t \leqslant \rho \sum_m (b_m - a_m) < \rho(t+\varepsilon)$ et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $t \leqslant \rho t$. Mais $0 < \rho < 1$, c'est pourquoi $t = 0$.

Le lemme est démontré et par là même la démonstration du théorème 1 est achevée.

Ainsi, nous avons démontré le théorème 1, en supposant la fonction f continue. Les mêmes raisonnements s'étendent également au cas d'une fonction monotone discontinue, si l'on utilise la généralisation du lemme de F. Riesz aux fonctions ayant des discontinuités de première espèce.

Soit g une fonction définie sur le segment $[a, b]$, n'ayant que des discontinuités de première espèce. Nous dirons qu'un point $x_0 \in [a, b]$ est *invisible à droite* pour $g(x)$, s'il existe un point $\xi > x_0$ tel que

$$\max[g(x_0-0),\ g(x_0),\ g(x_0+0)] < g(\xi).$$

Alors, comme dans le cas d'une fonction continue g, *l'ensemble des points invisibles à droite pour g est ouvert et pour chacun de ses intervalles composants (a_k, b_k) on a*

$$g(a_k) \leqslant g(b_k).$$

Bien que sa démonstration soit très longue, le théorème 1 a un sens intuitif assez simple. Expliquons, par exemple, pourquoi le nombre Λ_d (de même que Λ_g) doit être fini presque partout. Le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ représente « le coefficient de dilatation » du segment $[a, b]$ au point donné x par l'application f. Comme cette application transforme le segment fini $[a, b]$ en un segment fini $[f(a), f(b)]$, cette « dilatation » ne peut pas être infinie sur un ensemble de mesure positive.

Il est souvent commode de se servir du théorème suivant sur la dérivation terme à terme d'une série de fonctions monotones, appelé parfois « petit théorème de Fubini ».

Théorème 2. *Une série partout convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x), \tag{10}$$

où F_n sont des fonctions monotones non décroissantes sur $[a, b]$, *est presque partout dérivable terme à terme:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x).$$

Démonstration. Etant donné la possibilité de remplacer $F_n(x)$ par $F_n(x) - F_n(a)$, on peut supposer que toutes les fonctions $F_n(x)$ sont non négatives et s'annulent pour $x = a$.

En vertu du théorème 1, il existe un ensemble $E \subset [a, b]$ de mesure $b - a$, sur lequel existent toutes les dérivées $F'_n(x)$ et $F'(x)$. Considérons deux points arbitraires $x \in E$ et $\xi \in [a, b]$. On a

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \{F_n(\xi) - F_n(x)\}}{\xi - x} = \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

Comme les différences $\xi - x$ et $F_n(\xi) - F_n(x)$ sont de même signe (les fonctions sont monotones !), pour tout N on a

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \{F_n(\xi) - F_n(x)\}}{\xi - x} \leqslant \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

En passant à la limite pour $\xi \to x$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} F'_n(x) \leqslant F'(x).$$

Etant donné que $F'_n(x) \geqslant 0$ pour tous les n, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) \leqslant F'(x). \qquad (11)$$

Ainsi, la série des dérivées $F'_n(x)$ est convergente partout sur E. Montrons que presque pour tous les x dans (11) il y a égalité. A chaque k on peut associer une somme partielle $S_{n_k}(x)$ de la série (10) telle que

$$0 \leqslant F(b) - S_{n_k}(b) < \frac{1}{2^k}.$$

Comme la fonction $F(x) - S_{n_k}(x) = \sum_{m > n_k} F_m(x)$ est non décroissante, on a

$$0 \leqslant F(x) - S_{n_k}(x) < \frac{1}{2^k}$$

pour tout x, ce qui implique que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F(x) - S_{n_k}(x)], \qquad (12)$$

formée de fonctions non décroissantes, converge (même uniformément) partout sur le segment $[a, b]$. Alors, d'après ce qui précède, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F'(x) - S'_{n_k}(x)], \qquad (13)$$

obtenue de (12) par dérivation terme à terme, est convergente presque partout. Donc, le terme général de la série (13) tend vers zéro presque partout, c.-à-d. $S'_{n_k}(x) - F'(x) \to 0$ presque partout. Mais si dans (11) il y avait inégalité stricte, aucune suite de sommes partielles ne pourrait converger vers $F'(x)$. Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x)$$

presque partout.

Le théorème est démontré.

Corollaire. *La fonction des sauts d'une fonction monotone a une dérivée nulle presque partout.*

En effet, une telle fonction est la somme d'une série convergente de fonctions non décroissantes de la forme

$$F_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \leqslant x_n, \\ h_n & \text{pour} \quad x > x_n \end{cases}$$

dont chacune a une dérivée presque partout nulle.

3. Dérivée d'une intégrale par rapport à sa borne supérieure. Comme l'intégrale

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt$$

de toute fonction sommable est différence de deux fonctions monotones, du théorème 1 on déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3. *Pour toute fonction sommable* φ, la dérivée

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)\,dt \tag{14}$$

existe presque pour tous les x.

Il importe de souligner que bien que nous ayons établi l'existence presque partout de la dérivée (14), la question concernant l'égalité

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)\,dt=\varphi(x)$$

n'a pas été abordée. En fait (cf. § 3), cette égalité est vraie presque partout pour toute fonction sommable φ.

§ 2. Fonctions à variation bornée

La question de la dérivabilité de l'intégrale de Lebesgue par rapport à sa borne supérieure nous a amené à considérer la classe des fonctions qui peuvent être représentées sous la forme des différences de fonctions monotones. Dans ce paragraphe nous donnerons une autre description de ces fonctions, sans faire appel à la notion de monotonie, et considérerons leurs propriétés fondamentales. Commençons par les définitions nécessaires.

Définition 1. Une fonction f, définie sur le segment $[a, b]$, s'appelle *fonction à variation bornée*, s'il existe une constante C telle que pour toute subdivision du segment $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

on ait

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| \leqslant C. \tag{1}$$

Toute fonction monotone est à variation bornée, car la somme figurant au premier membre de l'inégalité (1) pour une telle fonction ne dépend pas du choix de la subdivision et vaut toujours $|f(b)-f(a)|$.

D é f i n i t i o n 2. Soit f une fonction à variation bornée. La borne supérieure des sommes (1) pour toutes les subdivisions finies possibles du segment $[a, b]$ s'appelle *variation totale* de la fonction f sur le segment $[a, b]$ et se note $V_a^b[f]$. Ainsi,

$$V_a^b[f]=\sup \sum_{k=1}^{k} |f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

R e m a r q u e. Une fonction f, définie sur toute la droite numérique, s'appelle *fonction à variation bornée*, si les nombres

$$V_a^b[f]$$

forment un ensemble borné. Dans ce cas la limite

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} V_a^b[f]$$

s'appelle *variation totale* de la fonction f sur la droite $-\infty<x<\infty$ et se note $V_{-\infty}^{\infty}[f]$.

Considérons les propriétés fondamentales de la variation totale d'une fonction.

1. *Pour toute constante* α *on a*

$$V_a^b[\alpha f]=|\alpha|\, V_a^b[f].$$

Ceci résulte immédiatement de la définition de $V_a^b[f]$.

2. *Si f et g sont des fonctions à variation bornée, $f+g$ est aussi une fonction à variation bornée et*

$$V_a^b[f+g]\leqslant V_a^b[f]+V_a^b[g]. \tag{2}$$

En effet, pour chaque subdivision du segment $[a, b]$ on a

$$\sum_k |f(x_k)+g(x_k)-f(x_{k-1})-g(x_{k-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k |f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_k |g(x_k)-g(x_{k-1})|,$$

d'où, puisqu'on a toujours

$$\sup(A+B)\leqslant \sup A+\sup B,$$

on obtient l'inégalité annoncée.

Les propriétés 1 et 2 signifient que toute combinaison linéaire de fonctions à variation bornée (définies sur un segment donné $[a, b]$) est aussi une fonction à variation bornée. En d'autres termes, *les*

fonctions à variation bornée forment un espace vectoriel (à la différence de l'ensemble des fonctions monotones qui n'est pas un espace vectoriel).

3. *Si* $a < b < c$, *alors*

$$V_a^b[f] + V_b^c[f] = V_a^c[f]. \tag{3}$$

En effet, considérons d'abord une subdivision du segment $[a, c]$ telle que b soit l'un des points de subdivision, par exemple, $x_r = b$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{r} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \\ + \sum_{k=r+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{4}$$

Considérons maintenant une subdivision arbitraire du segment $[a, c]$. Il est clair que si l'on ajoute à cette subdivision un nouveau point, en particulier, le point b, la somme

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

ne diminue pas. Par conséquent, l'inégalité (4) est vérifiée pour toute subdivision du segment $[a, c]$, donc

$$V_a^c[f] \leqslant V_a^b[f] + V_b^c[f].$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des subdivisions des segments $[a, b]$ et $[b, c]$ telles que

$$\sum_i |f(x_i') - f(x_{i-1}')| > V_a^b[f] - \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\sum_j |f(x_j'') - f(x_{j-1}'')| > V_b^c[f] - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En réunissant ces deux subdivisions, on obtient une nouvelle subdivision du segment $[a, c]$ pour laquelle

$$\sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_i |f(x_i') - f(x_{i-1}')| + \\ + \sum_i |f(x_j'') - f(x_{j-1}'')| > V_a^b[f] + V_b^c[f] - \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on en déduit que

$$V_a^c[f] \geqslant V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{5}$$

De (4) et (5) on obtient (3).

Comme la variation totale de toute fonction sur tout segment est non négative, de la propriété 3 on déduit aussitôt la propriété suivante :

4. *La fonction*

$$v(x) = V_a^x[f]$$

est monotone non décroissante.

5. *Si la fonction f est continue à gauche en un point x^*, la fonction v est également continue à gauche en ce point.*

En effet, soit donné $\varepsilon > 0$. Choisissons $\delta > 0$ de façon que $|f(x^*) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, dès que $x^* - \delta < x \leqslant x^*$. Choisissons ensuite une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x^*$$

telle que

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que

$$x^* - x_{n-1} < \delta$$

(car sinon, on ajouterait à la subdivision considérée un nouveau point, ce qui ne peut que diminuer la différence figurant au premier membre de l'inégalité (6)). De ce fait,

$$|f(x^*) - f(x_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par conséquent,

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon.$$

Mais alors, à plus forte raison,

$$V_a^{x^*}[f] - V_a^{x_{n-1}}[f] < \varepsilon,$$

c.-à-d.

$$v(x^*) - v(x_{n-1}) < \varepsilon.$$

Comme v est une fonction monotone non décroissante, on en déduit que $v(x^*) - v(x) < \varepsilon$ pour tous les x tels que $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x^*$. Cela signifie précisément que la fonction v est continue à gauche en x^*.

Si la fonction f est continue à droite en un point x^*, par des raisonnements analogues on peut montrer que la fonction v est aussi continue à droite en ce point. Par conséquent, *si la fonction f est continue en un point* (ou sur le segment $[a, b]$ tout entier), *il en est de même de la fonction v.*

Soit f une fonction quelconque à variation bornée, définie sur le segment $[a, b]$, et soit v sa variation totale sur $[a, x]$. Considérons la différence

$$\varphi = v - f.$$

Cette différence est une fonction monotone non décroissante. En effet, soit $x' \leqslant x''$. Alors

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [v(x'') - v(x')] - [f(x'') - f(x')]. \quad (7)$$

D'autre part, on a toujours

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant v(x'') - v(x') = V_{x'}^{x''}[f],$$

ce qui implique que le second membre de l'égalité (7), donc son premier membre également, est non négatif.

Ainsi, puisque

$$f = v - \varphi,$$

nous avons obtenu le résultat suivant.

T h é o r è m e 1. *Toute fonction à variation bornée est différence de deux fonctions monotones non décroissantes.*

La proposition réciproque est évidente : toute fonction qui peut être représentée sous la forme d'une différence de deux fonctions monotones est à variation bornée. Par conséquent, l'ensemble des fonctions représentables sous la forme des différences de fonctions monotones, considéré au paragraphe précédent, n'est autre chose que l'ensemble des fonctions à variation bornée.

Du théorème 1 et du théorème de Lebesgue sur la dérivabilité des fonctions monotones, établi au paragraphe précédent, on déduit immédiatement que *toute fonction à variation bornée a presque partout une dérivée finie.*

Généralisons maintenant la notion de fonction des sauts. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ un ensemble fini ou dénombrable de points de $[a, b]$. Associons à chacun de ces points deux nombres g_n et h_n de façon que

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|) < \infty.$$

Supposons, en outre, que si $x_n = a$, on a $g_n = 0$ et si $x_n = b$, alors $h_n = 0$.

Posons

$$\psi(x) = \sum_{x_n \leqslant x} g_n + \sum_{x_n < x} h_n.$$

Nous appellerons la fonction ainsi définie fonction des sauts. La variation totale de cette fonction est égale à

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|).$$

Elle a comme points de discontinuité seulement les x_n, pour lesquels l'un des nombres g_n et h_n est différent de zéro ; dans ce cas

$$\psi(x_n) - \psi(x_n - 0) = g_n,$$
$$\psi(x_n + 0) - \psi(x_n) = h_n.$$

On a la proposition suivante :

Toute fonction f à variation bornée sur $[a, b]$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$f = \varphi + \psi,$$

où φ est une fonction continue et ψ est la fonction des sauts.

La démonstration est analogue à celle de la propriété 4 des fonctions monotones (nº 1, § 1). Pour construire la fonction ψ on posera

$$g_n = f(x_n) - f(x_n - 0),$$
$$h_n = f(x_n + 0) - f(x_n)$$

aux points de discontinuité de la fonction f.

Exercices. 1. Si f a sur $[a, b]$ une dérivée bornée (c.-à-d. si $f'(x)$ existe partout et $|f'(x)| < C$), alors f est une fonction à variation bornée et

$$V_a^b[f] \leqslant C(b-a).$$

2. Soit $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Montrer que la variation totale de f sur $[0, 1]$ est infinie.

Seules les constantes sont des fonctions dont la variation totale est nulle. Posons

$$\|f\| = V_a^b[f]. \tag{8}$$

La quantité $V_a^b[f]$ satisfait aux axiomes 2) et 3) de la norme (cf. page 134), mais ne satisfait pas à l'axiome 1). Cependant, si l'on ne considère que les fonctions vérifiant la condition supplémentaire $f(a) = 0$, elles forment également un espace vectoriel et dans ce cas la quantité $V_a^b[f]$ satisfait à tous les axiomes de la norme. L'espace $V^0[a, b]$ des fonctions à variation bornée vérifiant la condition $f(a) = 0$, muni des opérations habituelles d'addition et de multiplication par un nombre, ainsi que de la norme (8), s'appelle *espace des fonctions à variation bornée*. (Démontrer que cet espace est complet.)

§ 3. Dérivée de l'intégrale indéfinie de Lebesgue

Au § 1 nous avons montré que l'intégrale de Lebesgue

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

comme fonction de x a presque partout une dérivée finie. Cependant, nous n'avons pas encore établi la relation entre cette dérivée et la

fonction figurant sous le signe somme. Nous établirons maintenant le résultat suivant, mentionné déjà à la fin du § 1.

Théorème 1. *Pour toute fonction sommable f on a presque partout l'égalité suivante:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Démonstration. Posons

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Montrons d'abord que

$$f(x) \geqslant \Phi'(x)$$

presque partout. En effet, si $f(x) < \Phi'(x)$, il existe deux nombres rationnels α et β tels que

$$f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x). \tag{1}$$

Désignons par $E_{\alpha\beta}$ l'ensemble des points x pour lesquels a lieu l'inégalité (1). Cet ensemble est mesurable, parce que les fonctions f et Φ' sont mesurables. Montrons que la mesure de chacun des ensembles $E_{\alpha\beta}$ est nulle. Comme ces ensembles sont en infinité dénombrable, il s'ensuivra que

$$\mu\,\{x : f(x) < \Phi'(x)\} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, et soit $\delta > 0$ tel que

$$\left|\int_e f(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

dès que $\mu(e) < \delta$ (un tel δ existe pour tout ε en vertu de la continuité absolue de l'intégrale). Choisissons maintenant un ensemble ouvert $G \subset [a, b]$ tel que

$$G \supset E_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \mu(G) < \mu(E_{\alpha\beta}) + \delta.$$

Si $x \in E_{\alpha\beta}$, alors

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x)}{\xi - x} > \beta \tag{2}$$

pour tous les $\xi > x$ suffisamment voisins de x. En recopiant l'inégalité (2) sous la forme

$$\Phi(\xi) - \beta\xi > \Phi(x) - \beta x,$$

on remarque que x est un point invisible à droite pour la fonction $\Phi(x) - \beta x$ sur chacun des intervalles composants de l'ensemble G.

Par conséquent, en utilisant le lemme de F. Riesz, on peut indiquer un ensemble ouvert $S = \bigcup_k (a_k, b_k)$ tel que $E_{\alpha\beta} \subset S \subset G$ et

$$\Phi(b_k) - \beta b_k \geqslant \Phi(a_k) - \beta a_k,$$

c.-à-d.

$$\Phi(b_k) - \Phi(a_k) \geqslant \beta(b_k - a_k),$$

ou

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\, dt \geqslant \beta(b_k - a_k).$$

En faisant la somme de telles inégalités pour tous les intervalles (a_k, b_k) composant S, on obtient

$$\int_S f(t)\, dt \geqslant \beta\mu(S). \tag{3}$$

D'autre part,

$$\int_S f(t)\, dt = \int_{E_{\alpha\beta}} f(t)\, dt + \int_{S \setminus E_{\alpha\beta}} f(t)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\mu(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon \leqslant \alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta. \tag{4}$$

En comparant (3) et (4), on obient

$$\alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta \geqslant \beta\mu(S),$$

d'où

$$\mu(S) \leqslant \frac{\varepsilon + |\alpha|\delta}{\beta - \alpha}.$$

Ainsi, l'ensemble $E_{\alpha\beta}$ peut être enfermé dans un ensemble ouvert de mesure arbitrairement petite (nous pouvons supposer, par exemple, que $|\alpha|\delta \leqslant \varepsilon$), ce qui signifie que $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$. Par là même nous avons démontré que

$$f(x) \geqslant \Phi'(x)$$

presque partout. En remplaçant $f(x)$ par $-f(x)$, on peut montrer de la même façon que presque partout on a

$$-f(x) \geqslant -\Phi'(x),$$

c.-à-d.

$$f(x) \leqslant \Phi'(x).$$

Par conséquent,

$$f(x) = \Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt$$

presque partout.

Le théorème est démontré.

§ 4. Recherche d'une fonction connaissant sa dérivée. Fonctions absolument continues

Ainsi, nous avons répondu à la première des deux questions posées au début de ce chapitre, en établissant que l'égalité

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

est vraie presque partout pour toute fonction f sommable sur $[a, b]$. Considérons maintenant la seconde de ces deux questions, c.-à-d. cherchons comment peut être généralisée au cas de l'intégrale de Lebesgue la formule de Newton-Leibniz

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt, \tag{1}$$

bien connue de l'analyse élémentaire pour les fonctions continûment dérivables.

Il est naturel de se borner à des fonctions F manifestement dérivables presque partout (autrement, l'égalité (1) n'a pas de sens). Comme on le sait déjà, telles sont, en particulier, les fonctions à variation bornée.

D'autre part, l'intégrale figurant au second membre de l'égalité (1) est une fonction à variation bornée. Pour cette raison, l'égalité (1) ne peut pas être vraie pour une classe de fonctions plus vaste. Etant donné que toute fonction à variation bornée est différence de deux fonctions monotones non décroissantes, ce sont précisément les fonctions monotones qu'il faut étudier en premier lieu.

Mais pour des fonctions monotones arbitraires l'égalité (1) n'est pas, en général, vraie. Cependant, on a le théorème suivant.

Théorème 1. *La dérivée f' d'une fonction monotone non décroissante f est sommable et*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Démonstration. Par définition, la dérivée de la fonction f au point x est la limite du rapport [1])

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{2}$$

[1]) Pour que l'expression $f(x+h)$ ait un sens pour tout $x \in [a, b]$, on peut supposer que $f(x) = f(b)$ pour $x > b$ et $f(x) = f(a)$ pour $x < a$.

quand $h \to 0$. La monotonie de f entraîne sa sommabilité, donc la sommabilité de chacune des fonctions φ_h. Par suite, l'égalité (2) peut être intégrée membre à membre. On obtient

$$\int_a^b \varphi_h(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{h}\int_a^{b+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx.$$

Le second membre de cette égalité tend vers $f(b) - f(a+0)$, quand $h \to +0$. Donc, en appliquant le théorème de Fatou, on obtient

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant \lim_{h\to 0}\int_a^b \varphi_h(x)\,dx = f(b) - f(a+0) \leqslant f(b) - f(a)$$

(l'existence de l'intégrale de f' est assurée également par le théorème de Fatou).

Le théorème est démontré.

Il est facile de donner un exemple de fonction monotone pour laquelle on ait l'inégalité stricte

$$\int_a^b f'(x)\,dx < f(b) - f(a).$$

Il suffit de poser

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{pour} \quad \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Il est intéressant de remarquer qu'il y a des fonctions c o n t i n u e s monotones pour lesquelles l'inégalité stricte

$$\int_a^x f'(t)\,dt < f(x) - f(a)$$

a lieu pour tous les $x > a$. En voici un exemple simple. Considérons sur le segment $[0, 1]$ l'ensemble triadique de Cantor et définissons f d'abord sur ses intervalles contigus, en posant

$$f(t) = \frac{2k-1}{2^n}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$$

sur le k-ième intervalle contigu de rang n (y compris ses extrémités), les intervalles étant numérotés de gauche à droite. Alors

$$f(t)=\frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3},$$

$$f(t)=\frac{1}{4} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{9}\leqslant t\leqslant\frac{2}{9},$$

$$f(t)=\frac{3}{4} \quad \text{pour} \quad \frac{7}{9}\leqslant t\leqslant\frac{8}{9}$$

et ainsi de suite (fig. 21). De cette façon, la fonction f se trouve définie partout sur le segment [0, 1], excepté les points de deuxième espèce de l'ensemble de Cantor (c.-à-d. les points n'appartenant ni aux intervalles contigus, ni à leurs extrémités). Définissons maintenant f dans les points restés de la manière suivante. Soit t^* l'un de ces points, et soit $\{t_n\}$ une suite croissante de points de première espèce de l'ensemble triadique de Cantor (c.-à-d. d'extrémités des intervalles contigus) convergeant vers t^*. Alors la limite

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) \tag{3}$$

existe. Il en est de même de la limite

$$\lim_{n\to\infty} f(t'_n), \tag{4}$$

où $\{t'_n\}$ est une suite décroissante de points de première espèce convergeant vers t^* ; de plus, les limites (3) et (4) sont égales. En prenant leur valeur commune pour $f(t^*)$, nous obtiendrons une fonction monotone, définie et continue partout sur le segment [0, 1], appelée « escalier de Cantor ». Sa dérivée est, évidemment, égale à zéro en tout point appartenant à un intervalle contigu quelconque, c.-à-d. presque partout. Par conséquent, pour cette fonction on a

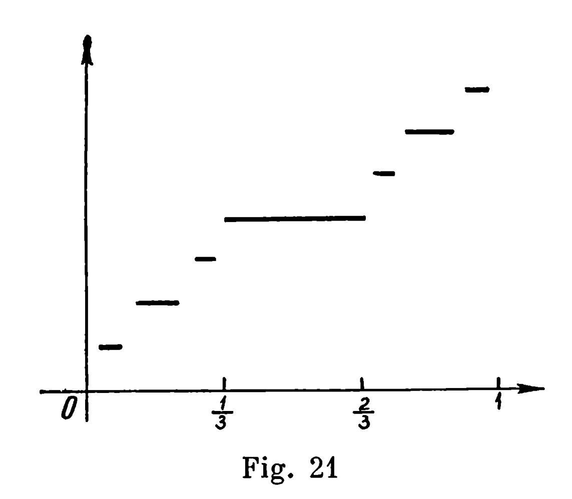


Fig. 21

$$0=\int_0^x f'(t)\,dt<f(x)-f(0)=f(x),$$

quel que soit $x \in (0, 1]$.

Notons, entre autres, que dans le cas d'une fonction monotone $f(x)$ l'égalité

$$\int_a^b f'(t)\,dt=f(b)-f(a)$$

entraîne

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

pour tout $x \in (a, b]$.

Afin de décrire la classe des fonctions pour lesquelles a lieu l'égalité

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a),$$

introduisons la définition suivante.

Définition. Une fonction f, donnée sur un segment $[a, b]$, est dite *absolument continue* sur $[a, b]$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints

$$(a_k,\ b_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

dont la somme des longueurs est inférieure à δ,

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

on a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Il est clair que toute fonction absolument continue est uniformément continue. La réciproque est, en général, fausse : par exemple, « l'escalier de Cantor », décrit plus haut, est une fonction continue (donc, uniformément continue) sur le segment $[0, 1]$, mais elle n'est pas absolument continue. En effet, l'ensemble de Cantor peut être recouvert par une famille finie d'intervalles (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut. Toutefois, pour une telle famille d'intervalles on a, évidemment, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 1.$$

Indiquons les propriétés fondamentales des fonctions absolument continues.

1. Notons tout d'abord que dans la définition 1 ci-dessus au lieu de toute famille finie d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à δ on peut considérer toute famille finie ou dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à δ. En effet, supposons que pour $\varepsilon > 0$ donné on ait

choisi $\delta > 0$ de façon que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

pour toute famille finie d'intervalles (a_k, b_k) vérifiant la condition

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

et soit (α_k, β_k) une famille dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs ne dépasse pas δ. Alors, pour tout n on a

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon;$$

en passant dans cette inégalité à la limite pour $n \to \infty$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon.$$

2. *Toute fonction absolument continue est à variation bornée.*

En effet, la continuité absolue d'une fonction f sur un segment $[a, b]$ signifie, en particulier, que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir $\delta > 0$ de façon que la variation totale de f sur tout segment de longueur inférieure à δ ne dépasse pas ε. Comme le segment $[a, b]$ peut être partagé en un nombre fini de segments de longueur inférieure à δ, la variation totale de f sur $[a, b]$ est finie.

3. *La somme de deux fonctions absolument continues et le produit d'une telle fonction par un nombre sont des fonctions absolument continues.*

Ceci résulte immédiatement de la définition de la continuité absolue et des propriétés du module de la somme et du produit.

Les propriétés 2 et 3 signifient que *dans l'espace des fonctions à variation bornée les fonctions absolument continues forment une variété linéaire.*

4. *Toute fonction absolument continue est différence de deux fonctions absolument continues non décroissantes.*

En effet, une fonction absolument continue, comme toute fonction à variation bornée, peut être représentée sous la forme

$$f = v - g,$$

où

$$v(x) = V_a^x[f] \text{ et } g(x) = v(x) - f(x)$$

sont des fonctions non décroissantes. Montrons que chacune de ces deux fonctions est absolument continue. Vérifions cela pour v. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ comme l'exige la continuité absolue de la fonction f. Prenons une famille de n intervalles (a_k, b_k)

dont la somme des longueurs soit inférieure à δ et considérons la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (v(b_k) - v(a_k)). \tag{5}$$

Cette somme représente la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} |f(x_{k,l}) - f(x_{k,l-1})| \tag{6}$$

pour toutes les subdivisions finies possibles

$$\begin{gathered}
a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < x_{1,2} < \ldots < x_{1,m_1} = b_1, \\
a_2 = x_{2,0} < x_{2,1} < x_{2,2} < \ldots < x_{2,m_2} = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,m_n} = b_n
\end{gathered}$$

des intervalles $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$. Comme la somme des longueurs des intervalles $(x_{k,l-1}, x_{k,l})$ auxquels s'étend la somme (6) ne dépasse pas $\delta > 0$, toutes les valeurs de la somme (6) sont inférieures ou égales à ε. Par conséquent, la somme (5), qui est la borne supérieure de l'ensemble de ces valeurs, est aussi inférieure ou égale à ε.

Les deux théorèmes suivants établissent un lien étroit entre la notion de continuité absolue et l'intégrale indéfinie de Lebesgue.

T h é o r è m e 2. *Si f est une fonction sommable, l'intégrale indéfinie*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une fonction absolument continue.

D é m o n s t r a t i o n. Si $\{(a_k, b_k)\}$ est une famille quelconque d'intervalles deux à deux disjoints, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f(t)|\,dt = \int_{\bigcup_k (a_k, b_k)} |f(t)|\,dt.$$

En vertu de la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue, la dernière expression tend vers zéro, lorsque la longueur totale des intervalles (a_k, b_k) tend vers zéro.

Théorème 3 (Lebesgue). *La dérivée $f = F'$ d'une fonction absolument continue, donnée sur un segment $[a, b]$, est sommable sur ce segment et pour tout x $(a \leqslant x \leqslant b)$ on a*

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Les théorèmes 2 et 3 montrent que les fonctions absolument continues, et celles-ci seulement, peuvent être rétablies à un terme constant près à partir de leurs dérivées au moyen de l'opération d'intégration.

Pour la démonstration du théorème 3 nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme. *Si la dérivée d'une fonction absolument continue non décroissante f est nulle presque partout, cette fonction est une constante.*

Démonstration du lemme. Comme la fonction f est continue et monotone, son domaine des valeurs est le segment $[f(a), f(b)]$. Montrons que la longueur de ce segment est égale à zéro, si $f'(x) = 0$ presque partout. Par là même le lemme sera démontré. Partageons l'ensemble des points du segment $[a, b]$ en deux parties: l'ensemble E des points où $f'(x) = 0$ et son complémentaire Z. Par l'hypothèse du lemme, $\mu(Z) = 0$. Choisissons un réel quelconque $\varepsilon > 0$ et associons-lui un réel $\delta > 0$ en accord avec la continuité absolue de la fonction f. Enfermons l'ensemble Z dans un ensemble ouvert de mesure inférieure à δ (cela est possible, parce que $\mu(Z) = 0$). En d'autres termes, on recouvre Z par une famille finie ou dénombrable d'intervalles (a_k, b_k) dont la somme des longueurs est inférieure à δ. Conformément au choix de δ, on a

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, la famille des intervalles (a_k, b_k) (et, à plus forte raison, l'ensemble Z, contenu dans leur réunion) se trouve transformée par la fonction f en un ensemble dont la mesure est inférieure à ε. Ainsi, $\mu(f(Z)) = 0$.

Considérons maintenant l'ensemble $E = [a, b] \setminus Z$. Soit $x_0 \in E$. Alors, puisque $f'(x_0) = 0$, pour tous les x assez voisins de x_0 on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon,$$

c.-à-d. (pour fixer les idées, on suppose que $x > x_0$)

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon(x - x_0)$$

ou

$$\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon x - f(x);$$

cela signifie que x_0 est un point invisible à droite pour la fonction $g(x) = \varepsilon x - f(x)$. Par conséquent, en vertu du lemme de F. Riesz, l'ensemble E est contenu dans une famille finie ou dénombrable d'intervalles (α_k, β_k) dont les extrémités vérifient la condition

$$\varepsilon\beta_k - f(\beta_k) \geqslant \varepsilon\alpha_k - f(\alpha_k),$$

c.-à-d.

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leqslant \varepsilon(\beta_k - \alpha_k),$$

d'où

$$\sum_k (f(\beta_k) - f(\alpha_k)) \leqslant \varepsilon \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Autrement dit, l'ensemble E est transformé par la fonction f en un ensemble qui peut être recouvert par une famille d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à $\varepsilon(b - a)$. Comme ε peut être arbitrairement petit, on en déduit que $\mu(f(E)) = 0$.

Ainsi, les ensembles $f(E)$ et $f(Z)$ sont de mesure nulle. Or, leur réunion donne justement le segment $[f(a), f(b)]$. Donc, la longueur de ce segment est nulle, ce qui prouve que $f(x) = \text{const}$.

Maintenant il est facile de démontrer le théorème 3. Il suffit de se borner au cas où $F(x)$ est une fonction non décroissante. Dans ce cas

$$\Phi(x) = F(x) - \int_a^x f(t)\,dt \tag{7}$$

est également une fonction monotone non décroissante. En effet, si $x'' > x'$, on a

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = F(x'') - F(x') - \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \geqslant 0.$$

D'autre part, la fonction Φ est absolument continue (comme différence de deux fonctions absolument continues) et $\Phi'(x) = 0$ presque partout (en vertu du théorème 1, § 3). Donc, d'après le lemme ci-dessus, Φ est une constante. En faisant $x = a$ dans (7), on obtient que cette constante est égale à $F(a)$.

Le théorème est démontré.

Nous avons vu plus haut que toute fonction à variation bornée f est somme d'une fonction des sauts H et d'une fonction continue à variation bornée φ:

$$f = H + \varphi.$$

Considérons maintenant une fonction continue, mais non absolument continue, à variation bornée φ et posons

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi'(t)\,dt.$$

La différence

$$\chi = \varphi - \psi$$

est une fonction continue à variation bornée et

$$\frac{d}{dx}\chi(x) = \varphi'(x) - \frac{d}{dx}\int_a^x \varphi'(t)\,dt = 0$$

presque partout.

Nous dirons qu'une fonction continue à variation bornée est *singulière*, si sa dérivée est nulle presque partout. On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

toute fonction à variation bornée peut être décomposée en une somme de trois fonctions

$$f = H + \psi + \chi, \tag{8}$$

où H est une fonction des sauts, ψ est absolument continue et χ est singulière.

Il est aisé de montrer que chaque terme de la décomposition (8) est défini par la fonction f de façon unique à une constante additive près. Si, en outre, toutes les fonctions figurant dans l'égalité (8) sont normées de façon que chacune d'elles s'annule au point $x = a$, alors la décomposition (8) est strictement unique. En dérivant les deux membres de (8), on obtient que

$$f'(x) = \psi'(x)$$

presque partout (car H' et χ's'annulent presque partout). Par conséquent, en intégrant la dérivée d'une fonction à variation bornée, ce n'est pas la fonction même qu'on rétablit, mais seulement sa composante absolument continue. En ce qui concerne les deux autres composantes (la fonction des sauts et la fonction singulière), elles disparaissent « sans laisser de traces ».

Il y a intérêt à comparer les résultats de ce paragraphe à ce que donne la théorie des distributions. De même que dans le chap. IV, nous entendrons par distribution une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace K des fonctions indéfiniment dérivables à support borné. A une fonction localement sommable habituelle f on associe alors la fonctionnelle qui agit sur les éléments $\varphi \in K$ selon la formule

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Cette fonctionnelle a pour dérivée au sens des distributions la fonctionnelle qui à chaque élément $\varphi \in K$ fait correspondre le nombre

$$(f', \varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Puisque dans l'ensemble des distributions l'équation $y' = 0$ n'a que des solutions habituelles (constantes), toute distribution peut être rétablie à partir de sa dérivée à une constante près. En particulier, toute fonction localement sommable f peut être presque partout rétablie à une constante près à partir de sa d é r i v é e a u s e n s d e s d i s t r i b u t i o n s f'. Supposons maintenant que la fonction f ait presque partout une dérivée; à cet effet, supposons, par exemple, que la fonction f soit monotone. Désignons par $f_1 = \frac{df}{dx}$ la dérivée habituelle de la fonction f. (Nous avons déjà vu que $\frac{df}{dx}$ peut être nulle presque partout, quoique $f(x) \not\equiv$ const !) La fonction $\frac{df}{dx}$ est localement sommable (f est supposée monotone); par conséquent, on peut lui faire correspondre la fonctionnelle (distribution)

$$(f_1, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} \varphi(x)\, dx.$$

L'essentiel est que la *distribution* f_1 *ne coïncide pas, en général, avec la distribution* f'. Par exemple, si

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0, \\ 0 \text{ pour } x \leqslant 0, \end{cases}$$

alors $f_1 = 0$ et $f' = \delta$ (cf. exemple 1, page 200).

A proprement parler, le théorème 3 exprime précisément le fait que parmi toutes les fonctions à variation bornée les fonctions absolument continues sont les seules dont la dérivée au sens habituel coïncide avec la dérivée au sens des distributions.

Nous nous heurtons ici de nouveau à la situation déjà rencontrée au § 4, chap. IV: pour que les opérations fondamentales de l'analyse (dans notre cas il s'agit du rétablissement d'une fonction à partir de sa dérivée) soient réalisables, il faut ou bien se borner, en restant dans les limites des définitions classiques, à une classe de fonctions assez restreinte (fonctions absolument continues), ou bien, au contraire, généraliser essentiellement la notion de fonction (et en même temps celle de dérivée).

E x e r c i c e s. 1. Déterminer la dérivée au sens des distributions de l'« escalier de Cantor ».

2. Soient f une fonction à variation bornée, f' sa dérivée au sens des distributions et f_1 la fonctionnelle (distribution), définie par la dérivée « habituelle » $\frac{df}{dx}$ de la fonction f. Démontrer que

a) si f est absolument continue, alors $f' = f_1$;

b) si $f' = f_1$, la fonction f est équivalente à une fonction absolument continue, c.-à-d. coïncide avec une telle fonction presque partout. En particulier, si $f' = f_1$ et f est continue, alors f est absolument continue.

§ 5. L'intégrale de Lebesgue comme fonction d'ensemble. Le théorème de Radon-Nikodym

1. Charges. Décompositions de Hahn et de Jordan. Les notions et les faits, exposés dans les paragraphes précédents pour des fonctions sur la droite, s'étendent en grande mesure à des fonctions données sur un espace mesuré arbitraire.

Soit X un espace quelconque, sur lequel est définie une mesure finie μ, et soit f une fonction sommable pour cette mesure sur X. La fonction f est alors sommable sur toute partie mesurable A de l'ensemble X ; par conséquent, l'intégrale

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu \tag{1}$$

(avec f fixée) est une fonction d'ensemble, définie et σ-additive sur la σ-algèbre $\mathfrak{S}_\mu$ de tous les ensembles mesurables de l'espace X. Ainsi, pour toute décomposition

$$A = \bigcup_k A_k$$

d'un ensemble mesurable A en une réunion finie ou dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, on a l'égalité

$$\Phi(A) = \sum_k \Phi(A_k).$$

Autrement dit, la fonction Φ, définie par l'égalité (1), possède toutes les propriétés d'une mesure σ-additive, sauf, peut-être, celle de non-négativité. (Pour f non négative Φ est aussi non négative.)

Définition 1. Une fonction d'ensemble σ-additive (finie) Φ, définie sur une σ-algèbre de sous-ensembles de l'espace donné X, s'appelle *mesure de signe arbitraire* ou, plus brièvement, *charge*.

La notion de charge est une généralisation naturelle de la notion de mesure σ-additive et, comme nous le verrons plus tard, se réduit en un certain sens à cette dernière.

Exercice. Démontrer que pour toute charge (finie) Φ, donnée sur une σ-algèbre d'ensembles $\mathfrak{S}$, il existe une constante c telle que $|\Phi(A)| \leqslant c$ pour tous les $A \in \mathfrak{S}$.

Si l'on considère une charge électrique réelle disposée, par exemple, sur une surface quelconque, alors cette surface peut être partagée en deux zones : l'une portant une charge positive (c.-à-d. telle que chacune de ses parties est chargée positivement) et la seconde portant une charge négative. L'équivalent mathématique de ce fait est fourni par le théorème 1, énoncé plus bas.

Introduisons préalablement la terminologie suivante. Soit Φ une charge définie sur une σ-algèbre $\mathfrak{S}$ de sous-ensembles de l'espace X. Un ensemble $E \in \mathfrak{S}$ est dit *négatif* par rapport à Φ, si $\Phi(E \cap F) \leqslant$

$\leqslant 0$ pour tout $F \in \mathfrak{S}$; de manière analogue, E est dit *positif*, si $\Phi(E \cap F) \geqslant 0$ pour tous les $F \in \mathfrak{S}$.

Théorème 1. *Si Φ est une charge définie sur X, il existe un ensemble mesurable $A^- \subset X$ tel que A^- est négatif et $A^+ = X \setminus A^-$ est positif* (par rapport à Φ).

Démonstration. Posons

$$a = \inf \Phi(A),$$

où la borne inférieure est étendue à tous les ensembles négatifs A. Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles négatifs telle que

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(A_n) = a.$$

Alors il est aisé de voir que $A^- = \bigcup_n A_n$ est un ensemble négatif tel que

$$\Phi(A^-) = a.$$

Montrons que A^- est l'ensemble cherché, c.-à-d. que

$$A^+ = X \setminus A^-$$

est un ensemble positif. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, c.-à-d. que A^+ contienne un sous-ensemble mesurable C_0 tel que $\Phi(C_0) < < 0$. L'ensemble C_0 ne peut pas être négatif, car alors en l'ajoutant à A^-, on obtiendrait un ensemble négatif $\widetilde{A}$ pour lequel

$$\Phi(\widetilde{A}) < a,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, il existe un entier minimal k_1 pour lequel dans C_0 on peut trouver un sous-ensemble C_1 vérifiant la condition

$$\Phi(C_1) \geqslant \frac{1}{k_1}.$$

Bien entendu, $C_1 \neq C_0$. Pour l'ensemble $C_0 \setminus C_1$ on peut reprendre le raisonnement fait pour C_0; on obtiendra alors un ensemble C_2 vérifiant la condition

$$\Phi(C_2) \geqslant \frac{1}{k_2} \quad (k_2 \geqslant k_1)$$

et ainsi de suite. Enfin, posons

$$F_0 = C_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i.$$

L'ensemble F_0 n'est pas vide, car $\Phi(C_0) < 0$ et $\Phi(C_i) > 0$ pour $i \geqslant 1$. D'après la construction faite, l'ensemble F_0 est négatif. Donc, en l'ajoutant à A^-, on aboutit de nouveau à une contradiction

avec la définition de a. Par conséquent, pour tous les ensembles mesurables $E \subset X \setminus A^-$ on a

$$\Phi(E) \geqslant 0,$$

ce qui signifie que $X \setminus A^-$ est positif.

Le théorème est démontré.

La décomposition de l'espace X en une partie négative A^- et une partie positive A^+ s'appelle *décomposition de Hahn.*

La décomposition de Hahn n'est pas en général unique. Cependant, si

$$X = A_1^- \cup A_1^+ \quad \text{et} \quad X = A_2^- \cup A_2^+$$

sont deux décompositions de Hahn, alors pour tout $E \in \mathfrak{S}$ on a

$$\begin{aligned} \Phi(E \cap A_1^-) &= \Phi(E \cap A_2^-), \\ \Phi(E \cap A_1^+) &= \Phi(E \cap A_2^+). \end{aligned} \tag{2}$$

En effet,

$$E \cap (A_1^- \setminus A_2^-) \subset E \cap A_1^-, \tag{3}$$

d'où l'on déduit que

$$\Phi(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)) \leqslant 0.$$

D'autre part,

$$E \cap (A_1^- \setminus A_2^-) \subset E \cap A_2^+, \tag{4}$$

d'où

$$\Phi(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)) \geqslant 0.$$

Par conséquent,

$$\Phi(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)) = 0.$$

De la même façon on montre que

$$\Phi(E \cap (A_2^- \setminus A_1^-)) = 0.$$

De ces deux dernières égalités on déduit que

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-).$$

La deuxième des égalités (2) se démontre exactement de la même façon.

Ainsi, la charge Φ définit sur $\mathfrak{S}$ de façon unique deux fonctions d'ensemble non négatives:

$$\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A^+)$$

et

$$\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A^-),$$

appelées respectivement *variation supérieure* et *variation inférieure* de la charge Φ. En outre, il est évident que:

1) $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$,

2) Φ^+ et Φ^- sont des fonctions d'ensembles σ-additives et non négatives, c.-à-d. des mesures.

La fonction $|\Phi| = \Phi^+ + \Phi^-$ est évidemment aussi une mesure ; on l'appelle *variation totale* de la charge Φ. La représentation de Φ comme différence de sa variation supérieure et sa variation inférieure s'appelle *décomposition de Jordan* de la charge Φ.

R e m a r q u e. Nous avons considéré plus haut des charges finies, c.-à-d. des fonctions Φ dont les valeurs sont bornées inférieurement aussi bien que supérieurement (cf. exercice, page 344). Dans ce cas, Φ^+ et Φ^- sont des mesures finies. Tout ce qui a été dit à leur égard peut être généralisé aux charges bornées seulement d'un côté, c.-à-d. telles que l'une au moins des quantités $\inf \Phi(A)$ et $\sup \Phi(A)$ est finie.

2. Les pricipaux types de charges. Soit μ une mesure σ-additive définie dans l'espace X sur une σ-algèbre $\mathfrak{S}$. Les ensembles appartenant à $\mathfrak{S}$ seront dits *mesurables.* Introduisons les notions suivantes.

Nous dirons qu'une charge Φ, définie pour les ensembles $E \in \mathfrak{S}$, est *concentrée sur un ensemble mesurable* A_0, si $\Phi(E) = 0$ pour tout $E \subset X \setminus A_0$. L'ensemble A_0 est alors appelé *support* de la charge Φ.

Une charge Φ est dite *continue*, si $\Phi(E) = 0$ pour tout ensemble E comportant un seul point. Une charge Φ est dite *discrète*, si elle est concentrée sur un ensemble fini ou dénombrable. En d'autres termes, une charge Φ est discrète, s'il existe un ensemble fini ou dénombrable de points $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ tel que pour tout $E \subset X$ on a

$$\Phi(E) = \sum_{c_k \in E} \Phi(c_k).$$

Une charge Φ est dite *absolument continue* (par rapport à une mesure donnée μ), si $\Phi(A) = 0$ pour tout ensemble mesurable A tel que $\mu(A) = 0$.

Une charge Φ est dite *singulière* (par rapport à la mesure μ), si elle est concentrée sur un ensemble de μ-mesure nulle. Il est clair que si une charge est à la fois absolument continue et singulière par rapport à la mesure μ, alors elle est nulle.

3. Charges absolument continues. Théorème de Radon-Nikodym. Un exemple de charge absolument continue par rapport à une mesure donnée μ est fourni par l'intégrale de Lebesgue

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

(d'une fonction sommable fixée f), considérée comme fonction d'ensemble. Il se trouve que cet exemple épuise toutes les charges absolument continues. En d'autres termes, on a le théorème suivant.

Théorème 2 (de Radon-Nikodym). *Soit μ une mesure (finie) σ-additive, définie sur une σ-algèbre de sous-ensembles de X, et soit Φ une charge absolument continue par rapport à μ et définie sur la même σ-algèbre. Alors il existe une fonction f, définie sur X et sommable par rapport à μ, telle que*

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

pour tout ensemble mesurable A. Cette fonction, appelée dérivée de la charge Φ par rapport à la mesure μ, est définie de façon unique à la μ-équivalence près.

Démonstration. Toute charge peut être représentée sous la forme d'une différence de deux charges non négatives (cf. n° 2); de plus, toute charge absolument continue peut être représentée sous la forme d'une différence de deux charges non négatives absolument continues. Pour cette raison, il suffit de démontrer le théorème pour des charges non négatives, c.-à-d. pour des mesures. Soit donc Φ une mesure absolument continue par rapport à la mesure donnée μ. Démontrons le lemme suivant.

Lemme. *Soit Φ une mesure absolument continue par rapport à μ et non identiquement nulle. Alors il existe un entier naturel n et un ensemble mesurable B tels que $\mu(B) > 0$ et B est positif relativement à la charge $\Phi - \frac{1}{n}\mu$.*

Démonstration du lemme. Soit $X = A_n^- \cup A_n^+$ la décomposition de Hahn pour la charge $\Phi - \frac{1}{n}\mu$, $n = 1, 2, \ldots$, et soit

$$A_0^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^-, \quad A_0^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^+.$$

Alors

$$\Phi(A_0^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A_0^-)$$

pour tous les n, c.-à-d. $\Phi(A_0^-) = 0$; par conséquent, $\Phi(A_0^+) > 0$ et donc $\mu(A_0^+) > 0$ (en vertu de la continuité absolue de Φ par rapport à μ). Pour cette raison, il existe n tel que $\mu(A_n^+) > 0$. Ce nombre n et l'ensemble $B = A_n^+$ vérifient les conditions du lemme.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit K l'ensemble des fonctions f sur X possédant les propriétés suivantes: elles sont non négatives, intégrables par rapport à μ et

$$\int_A f(x)\, d\mu \leqslant \Phi(A)$$

pour tout ensemble mesurable A. Soit

$$M = \sup \left\{ \int_X f(x)\, d\mu : f \in K \right\}.$$

Considérons une suite $\{f_n\}$ de fonctions de K telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = M.$$

Posons

$$g_n(x) = \max (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

Montrons que $g_n \in K$, c.-à-d. que pour tout ensemble mesurable E on a

$$\int_E g_n(x)\, d\mu \leqslant \Phi(E).$$

En effet, E peut être mis sous la forme

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k,$$

où E_k sont des ensembles disjoints et $g_n(x) = f_k(x)$ sur E_k ; par conséquent,

$$\int_E g_n(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_k(x)\, d\mu \leqslant \sum_{k=2}^{n} \Phi(E_k) = \Phi(E).$$

Posons

$$f(x) = \sup \{f_n(x)\}.$$

Il est clair qu'alors $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ et donc, d'après le théorème de B. Levi, on a

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\, d\mu = M.$$

Montrons maintenant que

$$\Phi(E) - \int_E f(x)\, d\mu = 0.$$

D'après la construction, la fonction d'ensemble

$$\lambda(E) = \Phi(E) - \int_E f(x)\, d\mu$$

est non négative et jouit de toutes les propriétés d'une mesure. Elle est, en outre, absolument continue par rapport à μ. Si $\lambda \not\equiv 0$,

d'après le lemme il existe $\varepsilon > 0$ et B tels que $\mu(B) > 0$ et

$$\varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant \lambda(E \cap B)$$

pour tout ensemble mesurable E. Alors, en posant $h(x) = f(x) + \varepsilon\chi_B(x)$, où χ_B est la fonction caractéristique de l'ensemble B, on obtiendrait pour tout ensemble mesurable E

$$\int_E h(x)\,d\mu = \int_E f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E \setminus B} f(x)\,d\mu + \Phi(E \cap B) \leqslant \Phi(E).$$

Cela signifierait que la fonction h appartient à l'ensemble K défini plus haut. Mais, d'autre part,

$$\int_X h(x)\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(B) > M,$$

ce qui contredit la définition de M. Ainsi, l'existence de la fonction f telle que

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\,d\mu$$

est démontrée. Démontrons l'unicité de cette fonction. Si pour tous les $A \in \mathfrak{S}$

$$\Phi(A) = \int_A f_1(x)\,d\mu = \int_A f_2(x)\,d\mu,$$

alors, quel que soit n, pour

$$A_n = \left\{x\colon f_2(x) - f_1(x) > \frac{1}{n}\right\}$$

on a

$$\mu(A_n) \leqslant n \int_{A_n} (f_1(x) - f_2(x))\,d\mu = 0.$$

De même, pour

$$B_m = \left\{x\colon f_1(x) - f_2(x) > \frac{1}{m}\right\}$$

on a

$$\mu(B_m) = 0.$$

Comme

$$\{x\colon f_1(x) \neq f_2(x)\} = (\bigcup_n A_n) \cup (\bigcup_m B_m),$$

on en déduit que

$$\mu\{x\colon f_1(x) \neq f_2(x)\} = 0.$$

Cela signifie que $f_1(x) = f_2(x)$ presque partout. La démonstration est achevée.

R e m a r q u e. Le théorème de Radon-Nikodym est évidemment une généralisation naturelle du théorème de Lebesgue affirmant que toute fonction absolument continue est égale à l'intégrale de sa dérivée. Cependant, si dans le cas des fonctions sur la droite nous disposons d'une méthode effective de recherche de la dérivée telle que le calcul de la limite du rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, le théorème de Radon-Nikodym ne fait qu'établir l'existence de la dérivée $\frac{d\Phi}{d\mu}$ d'une charge absolument continue Φ par rapport à la mesure μ, sans indiquer une méthode de calcul de cette dérivée. Une telle méthode peut être indiquée, mais nous n'insisterons pas là-dessus. Dans ses grandes lignes, elle consiste à calculer la limite du rapport $\frac{\Phi(A)}{\mu(A)}$, quand A parcourt une famille d'ensembles « convergeant », en un certain sens, vers un point donné. Ces questions sont exposées en détail, par exemple, dans [53].

§ 6. Intégrale de Stieltjes

1. Mesures de Stieltjes. Dans le § 1 du chapitre précédent, en parlant de la construction des mesures de Lebesgue sur la droite, nous avons déjà mentionné la construction suivante. Soit F une fonction monotone non décroissante, donnée sur un segment $[a, b]$, que nous supposerons, pour fixer les idées, continue à gauche. En définissant la mesure de tous les intervalles fermés, ouverts et semi-ouverts contenus dans le segment donné $[a, b]$ à l'aide des égalités

$$\left.\begin{aligned} m(\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha + 0), \\ m[\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha), \\ m(\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha + 0), \\ m[\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

nous pouvons étendre ensuite cette mesure, moyennant le procédé de prolongement d'une mesure selon Lebesgue, à une σ-algèbre $\mathfrak{a}_F$ contenant tous les sous-ensembles ouverts et fermés (donc, tous les sous-ensembles boréliens) du segment $[a, b]$. La mesure μ_F obtenue à l'aide d'une telle construction s'appelle *mesure de Lebesgue-Stieltjes* engendrée par la fonction F; la fonction F elle-même s'appelle *fonction génératrice* de cette mesure [1]).

---

[1]) Lorsque la fonction non décroissante F n'est pas continue à gauche, on peut aussi définir une mesure, en modifiant convenablement les formules (1): il faut, par exemple, poser $m[\alpha, \beta] = F(\beta + 0) - F(\alpha - 0)$, etc.

Considérons quelques cas particuliers des mesures de Lebesgue-Stieltjes.

1. Soient F une fonction des sauts, $x_1, x_2, \ldots$ ses points de discontinuité et $h_1, h_2, \ldots$ les valeurs de ses sauts en ces points. Alors la mesure μ_F engendrée par cette fonction est telle que tous les sous-ensembles du segment $[a, b]$ sont mesurables et la mesure d'un ensemble A est égale à

$$\mu_F(A) = \sum_{x_i \in A} h_i. \tag{2}$$

En effet, de la définition d'une mesure de Lebesgue-Stieltjes il suit aussitôt que la mesure de chaque ensemble $\{x_i\}$ est égale à h_i et la mesure du complémentaire de l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots\}$ est nulle. En vertu de l'additivité dénombrable de la mesure μ_F, on en déduit l'égalité (2) pour tout $A \subset [a, b]$. La mesure μ_F, obtenue à partir d'une fonction des sauts, s'appelle *mesure discrète.*

2. Soit F une fonction absolument continue non décroissante sur $[a, b]$ et soit $f = F'$ sa dérivée. Alors la mesure correspondante μ_F est manifestement définie pour tous les sous-ensembles du segment $[a, b]$ mesurables au sens de Lebesgue et pour tout ensemble A de ce type on a

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)\, dx. \tag{3}$$

En effet, d'après le théorème de Lebesgue, pour tout intervalle (α, β)

$$\mu_F(\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

Comme le prolongement selon Lebesgue de toute mesure σ-additive est défini de façon unique par ses valeurs sur le demi-anneau initial, on en déduit que l'égalité (3) est vraie pour tous les ensembles $A \subset \subset [a, b]$ mesurables au sens de Lebesgue. La mesure μ_F associée à une fonction absolument continue F s'appelle mesure *absolument continue.*

3. Si F est une fonction continue singulière, la mesure correspondante μ_F est concentrée entièrement sur l'ensemble de mesure de Lebesgue nulle où F' est différente de zéro ou n'existe pas. Dans ce cas la mesure μ_F est dite *singulière.*

Il est clair que si $F = F_1 + F_2$, alors $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$. Par conséquent, du fait que toute fonction monotone est somme d'une fonction des sauts, d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière, il résulte que *toute mesure de Lebesgue-Stieltjes peut être représentée sous la forme d'une somme de trois composantes, dont l'une est discrète, la seconde absolument continue et la troisième*

singulière. Rappelons que la décomposition d'une fonction monotone en somme de trois composantes est définie à des termes constants près. On en déduit que la représentation de toute mesure de Lebesgue-Stieltjes comme somme d'une mesure discrète, d'une mesure absolument continue et d'une mesure singulière est u n i q u e.

Tout ce qu'on vient de dire se rapporte aux mesures de Lebesgue-Stieltjes sur un s e g m e n t. Soit maintenant F une fonction monotone non décroissante et bornée (supérieurement et inférieurement), définie sur toute la droite numérique. En définissant la mesure de tout intervalle fermé, ouvert ou semi-ouvert de la droite à l'aide des formules analogues aux égalités (1), on obtiendra une mesure finie sur la droite numérique toute entière que nous appellerons également *mesure de Lebesgue-Stieltjes*. En particulier, la mesure de la droite toute entière dans ce cas sera égale à

$$F(\infty) - F(-\infty),$$

où

$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x), \quad F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x)$$

(l'existence des limites résulte du fait que F est monotone et bornée).

La notion de mesure de Lebesgue-Stieltjes épuise en réalité toutes les mesures (c.-à-d. toutes les fonctions d'ensemble finies, σ-additives et non négatives) sur la droite. En effet, soit μ une telle mesure, choisie arbitrairement. En posant

$$F(x) = \mu(-\infty, x),$$

on obtient une fonction monotone dont la mesure de Lebesgue-Stieltjes correspondante coïncide avec la mesure initiale μ. Ainsi, le terme « mesure de Lebesgue-Stieltjes » ne met pas en évidence une classe spéciale de mesures sur la droite; il indique seulement une méthode particulière de construction de telles mesures: à partir d'une fonction génératrice donnée.

2. Intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Soit μ_F une mesure sur le segment $[a, b]$, engendrée par une fonction monotone F. Pour cette mesure on définit comme d'habitude la classe des fonctions sommables et la notion d'intégrale de Lebesgue

$$\int_a^b f(x)\, d\mu_F.$$

Une telle intégrale, prise par rapport à la mesure μ_F engendrée par la fonction F, s'appelle *intégrale de Lebesgue-Stieltjes* et se note

$$\int_a^b f(x)\, dF(x).$$

Considérons quelques cas particuliers.

1. Si F est une fonction des sauts (c.-à-d. si μ_F est une mesure discrète), l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dF(x)$$

se réduit, évidemment, à la somme

$$\sum_i f(x_i)\,h_i,$$

où x_i sont les points de discontinuité de la fonction F et h_i sont les sauts de F en ces points.

2. Si F est une fonction absolument continue, l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\,dF(x)$$

est égale à

$$\int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx,$$

c.-à-d. à l'intégrale de $f(x)\,F'(x)$, prise par rapport à la mesure habituelle de Lebesgue. En effet, si $f(x) = \text{const}$ sur un ensemble mesurable $A \subset [a, b]$ et $f(x) = 0$ en dehors de A, l'égalité

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx \tag{4}$$

est une conséquence de l'égalité (3). En vertu de l'additivité dénombrable des intégrales, l'égalité (4) s'étend également aux fonctions simples, sommables pour la mesure μ_F. Soit maintenant $\{f_n\}$ une suite de fonctions simples, convergeant uniformément vers f. On peut supposer que la suite $\{f_n\}$ est non décroissante. Alors $\{f_n(x)\}$ est une suite non décroissante, presque partout convergeant vers $f(x)\,F'(x)$, et, en vertu du théorème de B. Levi, dans l'égalité

$$\int_a^b f_n(x)\,dF(x) = \int_a^b f_n(x)\,F'(x)\,dx$$

on peut passer à la limite pour $n \to \infty$.

D'après ce qui précède, il est clair que si F est somme d'une fonction des sauts et d'une fonction absolument continue, l'intégrale de Lebesgue-Sieltjes pour la mesure μ_F se réduit à une série (ou somme finie) et une intégrale par rapport à la mesure habituelle de

Lebesgue. Si F contient, en outre, une composante singulière, une telle réduction est impossible.

La notion d'intégrale de Lebesgue-Stieltjes peut être étendue de façon naturelle, en passant des fonctions monotones à des fonctions arbitraires à variation bornée. Soit Φ une telle fonction. Mettons-la sous la forme d'une différence de deux fonctions monotones

$$\Phi = v - g,$$

où v est la variation totale de la fonction Φ sur le segment $[a, x]$. Définissons maintenant l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à Φ en posant

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\, dv(x) - \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

On vérifie sans peine que si Φ est représentée d'une autre façon par une différence de deux fonctions monotones, soit

$$\Phi = w - h,$$

alors

$$\int_a^b f(x)\, dv(x) - \int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dw(x) - \int_a^b f(x)\, dh(x).$$

Autrement dit, pour calculer l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à une fonction donnée Φ, on peut se servir de n'importe quelle représentation de cette fonction par une différence de deux fonctions monotones.

3. Quelques applications de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes en théorie des probabilités. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes est employée non seulement en analyse, mais aussi dans beaucoup de questions des mathématiques appliquées. En particulier, cette notion est largement utilisée en théorie des probabilités. Rappelons qu'on appelle *fonction de répartition* d'une variable aléatoire ξ la fonction F, définie pour chaque x par l'égalité

$$F(x) = P(\xi < x),$$

c.-à-d. $F(x)$ est la probabilité pour que la variable aléatoire ξ prenne une valeur inférieure à x. Il est évident que chaque fonction de répartition est monotone non décroissante, continue à gauche et vérifie les conditions

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Réciproquement, toute fonction possédant ces propriétés peut être considérée comme fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Les caractéristiques essentielles d'une variable aléatoire sont son espérance mathématique

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) \tag{5}$$

et sa variance

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2\,dF(x). \tag{6}$$

Parmi les variables aléatoires on distingue habituellement celles que l'on appelle respectivement discrètes et continues. Une variable aléatoire est dite *discrète*, si elle ne peut prendre qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

(par exemple, le nombre d'appels à un central téléphonique pendant un certain intervalle de temps est une variable aléatoire discrète).

Si $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ sont les probabilités avec lesquelles la variable ξ prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, la fonction de répartition de ξ est, évidemment, une fonction des sauts. Pour une telle fonction les intégrales (5) et (6) se réduisent respectivement aux sommes

$$M\xi = \sum_i x_i p_i$$

et

$$D\xi = \sum_i (x_i - a)^2 p_i \quad (a = M\xi).$$

Une variable aléatoire ξ est dite *continue*, si sa fonction de répartition F est absolument continue. La dérivée F' de cette fonction s'appelle *densité de répartition des probabilités* de la variable aléatoire ξ. Conformément à ce qui a été dit au numéro précédent, pour une variable aléatoire continue les intégrales de Lebesgue-Stieltjes exprimant son espérance mathématique et sa variance se réduisent aux intégrales suivantes, prises par rapport à la mesure habituelle de Lebesgue :

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx,$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 p(x)\,dx,$$

où $p = F'$ est la densité de répartition des probabilités de ξ et $a = M\xi$.

Dans les cours élémentaires de théorie des probabilités on se borne habituellement aux variables aléatoires discrètes et continues qui sont pratiquement les seules que l'on rencontre dans les questions des mathématiques appliquées. Toutefois, la fonction de répartition d'une variable aléatoire peut contenir encore une composante singulière, de sorte que les variables aléatoires discrètes et continues ne sont pas, en général, les seules composantes d'une variable aléatoire arbitraire.

Soient ξ une variable aléatoire, F sa fonction de répartition et $\eta = \varphi(\xi)$ une autre variable aléatoire, fonction borélienne de la première. L'espérance mathématique $M\eta$ de la variable η peut s'écrire, par définition, sous la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, d\Phi(x),$$

où Φ est la fonction de répartition de η. Mais l'essentiel est que si la fonction φ est sommable pour la mesure engendrée sur la droite par la fonction F, l'espérance mathématique de la variable η peut s'exprimer aussi par la fonction de répartition F de la variable ξ:

$$M_\eta = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dF(x).$$

En effet, la fonction $y = \varphi(x)$ définit une application de la droite $(-\infty < x < \infty)$ avec la mesure μ_F (engendrée par F) dans la droite $(-\infty < y < \infty)$ avec la mesure μ_Φ, transformée de μ_F par l'application $y = \varphi(x)$. Or, d'après les résultats du chapitre V, si (X, μ) et (Y, ν) sont deux espaces mesurés, φ est une application de (X, μ) dans (Y, ν) conservant la mesure (c.-à-d. telle que $\nu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$) et f est une fonction sommable sur (Y, ν), alors

$$\int_Y f(y) \, d\nu = \int_X f(\varphi(x)) \, d\mu$$

(changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue). En posant ici $f(y) = y$, $\mu = \mu_F$ et $\nu = \mu_\Phi$, on obtient l'égalité désirée. Ainsi, pour calculer l'espérance mathématique (et, bien sûr, la variance) d'une f o n c t i o n de la variable ξ, il suffit de connaître seulement la fonction de répartition de cette variable.

4. Intégrale de Riemann-Stieltjes. A côté de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes, considérée plus haut et représentant en fait la différence de deux intégrales de Lebesgue d'une fonction donnée f, prises par rapport à deux mesures données sur la droite, on peut introduire encore l'intégrale dite de Riemann-Stieltjes. Elle est définie comme limite des sommes intégrales analogues aux sommes intégrales habituelles de Riemann.

Soit de nouveau Φ une fonction à variation bornée continue à gauche, définie sur un intervalle semi-ouvert $[a, b)$, et soit f une fonction arbitraire, définie sur le même intervalle semi-ouvert $[a, b)$. Considérons une partition de $[a, b)$ réalisée par les points

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Sur chaque élément $[x_{i-1}, x_i)$ de cette partition [1]) choisissons un point arbitraire ξ_i et formons la somme

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})], \tag{7}$$

où par $\Phi(x_n)$ on sous-entend $\Phi(b-0)$. Si pour $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$ cette somme tend vers une certaine limite (qui ne dépend ni des partitions choisies de l'intervalle $[a, b)$, ni du choix des points ξ_i sur les éléments de ces partitions), cette limite s'appelle *intégrale de Riemann-Stieltjes* de la fonction f par rapport à la fonction Φ sur $[a, b)$ et se note

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x). \tag{8}$$

Théorème 1. *Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors son intégrale de Riemann-Stieltjes* (8) *existe et coïncide avec l'intégrale correspondante de Lebesgue-Stieltjes.*

Démonstration. La somme (7) peut être considérée comme l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes de la fonction en escalier

$$f_n(x)=f(\xi_i) \text{ pour } x_{i-1} \leqslant x < x_i.$$

Lorsqu'on fait diminuer les éléments de la partition de l'intervalle $(a, b]$, on obtient une suite de telles fonctions qui converge uniformément vers f. C'est pourquoi la limite des sommes en question existe et coïncide avec l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes de la fonction limite f (théorème du passage à la limite sous le signe d'intégration). D'autre part, c'est précisément cette limite que nous avons appelée intégrale de Riemann-Stieltjes (8).

Le théorème est démontré.

On se propose maintenant d'établir quelques propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann-Stieltjes. Partout ici la fonction f sera supposée continue sur $[a, b)$.

1. *On a l'évaluation* (théorème de la moyenne)

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\Phi(x)\right| \leqslant \max|f(x)|\,V_a^b[\Phi], \tag{9}$$

où $V_a^b[\Phi]$ désigne la variation totale de la fonction Φ sur $[a, b)$.

---

[1]) Comme dans l'intégrale de Stieltjes l'apport des points séparés peut être différent de zéro, les éléments de la partition ne doivent pas avoir des points communs. C'est pourquoi nous prenons ici des intervalles semi-ouverts.

En effet, pour toute partition de l'intervalle $[a, b)$ on a l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1}))\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\cdot|\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \max|f(x)|\cdot\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i)-\Phi(x_{i-1})| \leqslant \max|f(x)|\, V_a^b[\Phi].$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient l'évaluation (9). Pour $\Phi(x) = x$ elle donne l'évaluation bien connue

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\max|f(x)|$$

pour l'intégrale de Riemann.

2. *Si* $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, *alors*

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,d\Phi_1(x) + \int_a^b f(x)\,d\Phi_2(x).$$

En effet, pour toute partition de l'intervalle $[a, b)$ l'égalité correspondante est vraie pour les sommes intégrales; par conséquent, elle est conservée aussi à la limite, c.-à-d. pour les intégrales.

Nous avons défini l'intégrale de Riemann-Stieltjes (8), en supposant que la fonction $\Phi(x)$ est continue à gauche. Pourtant, la définition de cette intégrale comme limite de la somme (7) est valable pour toute fonction $\Phi(x)$ à variation bornée. Dans ce cas on a la proposition suivante.

3. *Si* Φ_1 *et* Φ_2 *sont deux fonctions à variation bornée sur* $[a, b)$ *coïncidant partout, sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points intérieurs de cet intervalle, alors*

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\,d\Phi_2(x)$$

pour toute fonction f *continue sur* $[a, b]$.

Pour démontrer cette proposition, considérons d'abord le cas, où $\Phi_2 \equiv 0$, c.-à-d. démontrons l'assertion suivante.

3′. *Si* ψ *est une fonction à variation bornée, nulle partout, sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points intérieurs de l'intervalle* (a, b), *alors*

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = 0$$

pour toute fonction f *continue sur* $[a, b]$.

En effet, cela est évident pour toute fonction qui ne diffère de zéro qu'en un seul point x_0 (en faisant diminuer indéfiniment les éléments de la partition de $[a, b)$, sans que x_0 soit un point de subdivision, on obtient des sommes intégrales nulles); par conséquent, grâce à l'additivité, cette propriété est vraie aussi pour toute fonction différente de zéro en un nombre fini de points. Soit maintenant ψ une fonction différente de zéro aux points

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

et soient

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

ses valeurs en ces points. Puisque ψ est à variation bornée, on a $\sum_n |y_n| < \infty$. Choisissons un entier naturel N de façon que $\sum_{n>N} |y_n| < \varepsilon$ et écrivons ψ sous la forme

$$\psi = \psi_N + \tilde{\psi},$$

où ψ_N est une fonction prenant aux points $r_1, \ldots, r_N$ respectivement les valeurs $y_1, \ldots, y_N$ et nulle partout ailleurs, tandis que $\tilde{\psi}$ ne diffère de 0 qu'aux points $r_{N+1}, r_{N+2}, \ldots$ D'après la propriété précédente, on a

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi_N(x) + \int_a^b f(x)\, d\tilde{\psi}(x).$$

La première de ces intégrales est nulle d'après ce qu'on a déjà démontré; la seconde, en vertu de la propriété 1, admet l'évaluation

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\tilde{\psi}(x) \right| < \max |f(x)| \cdot 2\varepsilon$$

(car il est évident que $V_a^b[\tilde{\psi}] = 2 \sum_{n>N} |y_n| < 2\varepsilon$). Comme ε est arbitrairement petit, on en déduit la proposition annoncée.

Maintenant, pour démontrer la propriété 3, considérons la différence $\psi = \Phi_1 - \Phi_2$. Elle ne diffère de zéro que sur un ensemble fini ou dénombrable de points appartenant à (a, b). Il reste à appliquer les propriétés 2 et 3'. En particulier, comme une fonction à variation bornée a au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité, on obtient la propriété suivante.

4. *Si f est une fonction continue, l'intégrale de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(x)\, d\Phi(x)$ ne dépend pas des valeurs que la fonction Φ prend en ses points de discontinuité situés à l'intérieur de (a, b).*

Etant donné que l'intégrale de Riemann-Stieltjes d'une fonction continue coïncide avec l'intégrale correspondante de Lebesgue-Stieltjes, pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes d'une fonction continue $f(x)$ on a les égalités :

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \sum_i f(x_i)\, h_i,$$

si Φ est une fonction des sauts, et

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\, \Phi'(x)\, dx, \qquad (10)$$

si Φ est une fonction absolument continue. Si, en outre, la fonction Φ' est intégrable au sens de Riemann, l'intégrale du second membre de (10) peut être considérée comme une intégrale de Riemann.

Tout ce qu'on vient de dire au sujet de l'intégrale de Riemann-Stieltjes sur un intervalle fini s'étend sans difficulté au cas où l'intégrale est prise sur la droite toute entière ou sur une demi-droite.

R e m a r q u e. Nous avons défini l'intégrale de Stieltjes sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b)$. De manière analogue on peut définir l'intégrale sur $(a, b]$, de même que sur $[a, b]$ et (a, b). A la différence de l'intégrale habituelle de Riemann, les valeurs de l'intégrale de Stieltjes sur les intervalles (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ et $(a, b]$ sont, en général, différentes. Par exemple, si a est un point de discontinuité de la fonction Φ, l'intégrale de Stieltjes sur $[a, b]$ est égale à l'intégrale correspondante sur $(a, b]$ plus un terme de la forme $f(a)\, h$, où $h = \Phi(a + 0) - \Phi(a)$.

5. Passage à la limite sous le signe de l'intégrale de Stieltjes. Au chap. V nous avons démontré quelques théorèmes concernant le passage à la limite sous le signe de l'intégrale de Lebesgue. La question était posée alors de la manière suivante : étant donné une suite de fonctions $\{f_n\}$ et les intégrales de ces fonctions par rapport à une mesure donnée, étudier la possibilité du passage à la limite sous le signe d'intégration. Dans le cas de l'intégrale de Stieltjes, il y a encore une autre position du problème qui présente de l'intérêt : étant donné une suite de fonctions à variation bornée $\{\Phi_n\}$, à quelles conditions peut-on passer à la limite sous le signe de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x),$$

où f est une fonction fixée?

Dans ce cas on a le théorème suivant.

Théorème 2 (premier théorème de Helly). *Soit* $\{\Phi_n\}$ *une suite de fonctions à variation bornée sur le segment* $[a, b]$, *convergeant sur ce segment vers une fonction* Φ *et telle que les variations totales des fonctions* Φ_n *sont bornées dans leur ensemble :*

$$V_a^b[\Phi_n] \leqslant C \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Alors la fonction limite Φ *est aussi à variation bornée et pour toute fonction continue* f *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x). \tag{11}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que la variation totale de la fonction limite Φ ne dépasse pas la constante C qui sert à majorer l'ensemble des $V_a^b[\Phi_n]$. En effet, pour toute subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$$

du segment $[a, b]$, on a

$$\sum_{k=1}^m |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m |\Phi_n(x_k - \Phi_n(x_{k-1})| \leqslant C,$$

c.-à-d.

$$V_a^b[\Phi] \leqslant C.$$

Montrons maintenant que la relation (11) est vraie dans le cas où f est une fonction en escalier. Soient h_k les valeurs de f sur les intervalles (x_{k-1}, x_k). Alors

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) = \sum_k h_k [\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})]$$

et

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \sum_k h_k [\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})].$$

Il est clair que la première de ces deux expressions tend vers la seconde, quand $n \to \infty$.

Soient f une fonction continue et ε un réel positif arbitraire. Choisissons une fonction en escalier f_ε telle que

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

On a alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\Phi(x)-\int_a^b f(x)\,d\Phi_n(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_a^b f(x)\,d\Phi(x)-\int_a^b f_\varepsilon(x)\,d\Phi(x)\right|+$$

$$+\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\,d\Phi(x)-\int_a^b f_\varepsilon(x)\,d\Phi_n(x)\right|+$$

$$+\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\,d\Phi_n(x)-\int_a^b f(x)\,d\Phi_n(x)\right|.$$

En vertu du théorème de la moyenne pour l'intégrale de Stieltjes, le premier et le troisième termes sont inférieurs à $\frac{\varepsilon}{3}$; le deuxième est inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$ pour tous les n suffisamment grands. Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on en déduit ce qu'il fallait démontrer.

R e m a r q u e. Ce théorème s'étend également au cas où dans les intégrales

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi_n(x)$$

l'une des bornes ou toutes les deux sont infinies. Mais dans ce cas, la fonction f doit tendre à l'infini vers une limite finie (ceci permet de l'approcher uniformément sur tout l'intervalle infini considéré par des fonctions en escalier ne prenant qu'un nombre fini de valeurs).

Si le premier théorème de Helly établit à quelles conditions doit satisfaire une suite $\{\Phi_n\}$ de fonctions à variation bornée, pour que dans l'intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport à ces fonctions on puisse passer à la limite, le deuxième établit les conditions assurant l'existence même d'une suite vérifiant les conditions du premier théorème.

T h é o r è m e 3 (d e u x i è m e t h é o r è m e d e H e l l y). *De tout ensemble infini M de fonctions Φ, données sur un segment quelconque $[a, b]$ et vérifiant les conditions*

$$\max|\Phi(x)|\leqslant C,\quad V_a^b[\Phi]\leqslant K \tag{12}$$

(où C et K sont des constantes, les mêmes pour toutes les fonctions $\Phi\in M$), *on peut extraire une suite qui soit convergente en tout point de* $[a, b]$.

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de démontrer ce théorème pour des fonctions monotones. En effet, soit

$$\Phi = v - g,$$

où $v(x)$ est la variation totale de Φ sur le segment $[a, x]$. Alors les fonctions v correspondant à toutes les $\Phi \in M$ vérifient les inégalités

$$\max|v(x)| \leqslant K, \quad V_a^b[v] = V_a^b[\Phi] \leqslant K,$$

c.-à-d. vérifient les conditions du théorème et sont monotones. En supposant le théorème démontré pour des fonctions monotones, choisissons une suite $\{\Phi_n\}$ de fonctions de M telle que la suite des fonctions correspondantes v_n converge vers une limite v. D'autre part, les fonctions

$$g_n = v_n - \Phi_n$$

sont aussi monotones et vérifient les conditions du théorème. C'est pourquoi, de $\{\Phi_n\}$ on peut extraire une sous-suite $\{\Phi_{n_k}\}$ telle que la suite correspondante $\{g_{n_k}\}$ converge vers une limite g. Mais alors

$$\Phi_{n_k}(x) \to \Phi(x) = v(x) - g(x).$$

Ainsi donc, démontrons le théorème pour une famille M de fonctions monotones. Soient

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

tous les points rationnels du segment $[a, b]$. En vertu des inégalités (12), les nombres $\Phi(r_1)$ (où Φ parcourt l'ensemble M tout entier) forment un ensemble borné. Par conséquent, il existe une suite $\{\Phi_n^{(1)}\}$ convergente au point r_1. De cette suite on peut extraire une sous-suite $\{\Phi_n^{(2)}\}$ convergente au point r_2 (et, bien entendu, au point r_1). De $\{\Phi_n^{(2)}\}$ on peut extraire une sous-suite convergente au point r_3 et ainsi de suite. La suite diagonale $\{\Phi_n^{(n)}\}$ sera, évidemment, convergente en tous les points rationnels du segment $[a, b]$. Sa limite est une fonction non décroissante Φ, définie pour le moment seulement aux points $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ Achevons de définir cette fonction sur le segment $[a, b]$, en posant pour les x irrationnels $\Phi(x) = \lim\limits_{r \to x-0} \Phi(r)$ (où r ne prend que des valeurs rationnelles). Montrons que la fonction non décroissante Φ ainsi obtenue est en chacun de ses points de continuité la limite de la suite $\{\Phi_n^{(n)}\}$. Soit x^* l'un de ces points. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\Phi(x^*) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{6}, \text{ dès que } |x^* - x| < \delta. \tag{13}$$

Choisissons deux points rationnels r' et r'' de façon que $r' < x^* < r''$ et $r' > x^* - \delta$, $r'' < x^* + \delta$. Soit maintenant n_0 tellement grand

que pour tous les $n > n_0$ on ait les inégalités

$$|\Phi_n(r') - \Phi(r')| < \frac{\varepsilon}{6} \text{ et } |\Phi_n(r'') - \Phi(r'')| < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{14}$$

De (13) et (14) il résulte que

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(r'')| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Comme la fonction Φ_n est non décroissante, on a $\Phi_n(r') \leqslant \Phi_n(x^*) \leqslant \leqslant \Phi_n(r'')$. Par conséquent,

$$|\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*)| \leqslant |\Phi(x^*) - \Phi(r')| + \\ + |\Phi(r') - \Phi_n(r')| + |\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{4\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x^*) = \Phi(x^*)$.

Ainsi, nous avons construit une suite de fonctions de M convergeant vers une fonction limite Φ partout, sauf, peut-être, aux points de discontinuité de la fonction Φ. Comme l'ensemble de tels points est au plus dénombrable, en appliquant de nouveau le procédé diagonal, on peut extraire de la suite $\{\Phi_n\}$ une sous-suite convergeant en ces points également, c.-à-d. partout sur $[a, b]$.

6. Forme générale des fonctionnelles linéaires continues sur l'espace de fonctions continues. Plus haut nous avons indiqué certaines applications de l'intégrale de Stieltjes. Considérons maintenant encore un problème lié à cette notion, plus précisément, déterminons la forme générale d'une fonctionnelle linéaire sur l'espace $C[a, b]$.

Théorème 4 (F. Riesz). *Toute fonctionnelle linéaire continue F sur l'espace $C[a, b]$ peut s'écrire sous la forme*

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x), \tag{15}$$

où Φ est une fonction à variation bornée [1]). *En outre,*

$$\|F\| = V_a^b[\Phi].$$

Démonstration. L'espace $C[a, b]$ peut être considéré comme un sous-espace de l'espace $M[a, b]$ de toutes les fonctions bornées sur le segment $[a, b]$, muni de la même norme que $C[a, b]$:

$$\|f\| = \sup |f(x)|.$$

Soit F une fonctionnelle linéaire continue sur $C[a, b]$. En vertu du théorème de Hahn-Banach, elle peut être prolongée, en conservant la norme, de $C[a, b]$ à l'espace $M[a, b]$ tout entier. En particulier, la

[1]) Ici il s'agit d'une intégrale sur le segment $[a, b]$.

fonctionnelle ainsi prolongée sera définie pour toutes les fonctions de la forme

$$h_a(x) \equiv 0, \quad h_\tau(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \leqslant \tau, \\ 0 & \text{pour} \quad x > \tau, \end{cases} (\tau > a). \tag{16}$$

Posons

$$\Phi(\tau) = F(h_\tau) \tag{17}$$

et montrons que la fonction Φ est à variation bornée sur le segment $[a, b]$. En effet, considérons une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \tag{18}$$

de ce segment et posons

$$\alpha_k = \operatorname{sgn}(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) = F\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (h_{x_k} - h_{x_{k-1}})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \|F\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) \right\|.$$

Or, la fonction $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (h_{x_k} - h_{x_{k-1}})$ ne prend que les valeurs ± 1 et 0. Par conséquent, sa norme est inférieure ou égale à 1. Donc,

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leqslant \|F\|.$$

Comme cela est vrai pour toute subdivision du segment $[a, b]$, on en déduit que

$$V_a^b[\Phi] \leqslant \|F\|.$$

Ainsi, nous avons construit à partir de la fonctionnelle F une fonction Φ à variation bornée. Montrons que c'est à l'aide de cette fonction que la fonctionnelle F s'écrit sous la forme de l'intégrale de Stieltjes (15).

Soit f une fonction arbitraire continue sur $[a, b]$. Donnons-nous un réel positif ε et choisissons $\delta > 0$ de façon que $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, si $|x'' - x'| < \delta$. Choisissons maintenant la subdivision (18) de façon que chaque partie ait la longueur inférieure à δ et considé-

rons la fonction en escalier f_ε définie de la façon suivante:

$$f_\varepsilon(x)=f(x_k) \quad \text{pour} \quad x_{k-1}<x\leqslant x_k, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
$$f_\varepsilon(a)=f(x_1).$$

Elle peut, évidemment, s'écrire sous la forme

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,[h_{x_k}(x)-h_{x_{k-1}}(x)],$$

où h_τ est la fonction définie par l'égalité (16). Il est clair que $|f(x)-f_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ pour tous les x $(a\leqslant x\leqslant b)$, de sorte que

$$\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|<\varepsilon.$$

Cherchons la valeur de la fonctionnelle F correspondant à l'élément f_ε. En vertu de la définition de la fonction h_τ et de la linéarité de cette fonctionnelle, sa valeur est égale à

$$F(f_\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,[F(h_{x_k})-F(h_{x_{k-1}})]=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,[\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})],$$

c.-à-d. représente la somme intégrale pour l'intégrale

$$\int^{b} f(x)\,d\Phi(x).$$

Donc, si le segment $[a,\ b]$ est partagé en parties suffisamment petites, on a

$$\left|F(f_\varepsilon)-\int f(x)\,d\Phi(x)\right|<\varepsilon.$$

Mais, d'autre part,

$$|F(f)-F(f_\varepsilon)|\leqslant\|F\|\cdot\|f-f_\varepsilon\|\leqslant\|F\|\cdot\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\left|F(f)-\int_a^b f(x)\,d\Phi(x)\right|<\varepsilon(1+\|F\|);$$

comme $\varepsilon>0$ est arbitrairement petit, on en déduit que

$$F(f)=\int_a^b f(x)\,d\Phi(x).$$

Nous avons montré que la variation totale de la fonction Φ, définie par la formule (17), vérifie l'inégalité

$$V_a^b[\Phi]\leqslant\|F\|. \tag{19}$$

D'autre part, du théorème de la moyenne pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes il résulte immédiatement que

$$\| F \| \leqslant V_a^b [\Phi]. \tag{20}$$

En comparant (17) et (20), on obtient l'égalité

$$\| F \| = V_a^b [\Phi].$$

Le théorème est entièrement démontré.

R e m a r q u e. Il est clair qu'en prenant une fonction arbitraire à variation bornée Φ sur le segment $[a, b]$ et en posant

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x),$$

nous obtiendrons une fonctionnelle linéaire sur l'espace $C[a, b]$. Il est clair aussi que deux fonctions Φ_1 et Φ_2 coïncidant sur $[a, b]$ partout, sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points intérieurs à ce segment, définissent la même fonctionnelle linéaire. Réciproquement, si Φ_1 et Φ_2 définissent une même fonctionnelle sur l'espace $C[a, b]$, c.-à-d. si

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi_2(x)$$

pour toute fonction continue f, il est aisé de voir que $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$ en tous les points de continuité de la fonction $\Phi_1 - \Phi_2$, c.-à-d. partout, sauf, peut-être, sur un ensemble fini ou dénombrable de points.

En rapportant à une même classe d'équivalence n'importe quelles deux fonctions à variation bornée sur $[a, b]$ dont la différence ne diffère d'une constante que sur un ensemble fini ou dénombrable de points intérieurs à $[a, b]$, nous obtiendrons une correspondance biunivoque entre ces classes et les fonctionnelles linéaires sur l'espace $C[a, b]$. Autrement dit, toute fonctionnelle linéaire sur $C[a, b]$ s'écrit sous forme d'une intégrale de Stieltjes par rapport à une certaine c h a r g e. Cette charge peut être donnée par une fonction à variation bornée, mais la correspondance entre les charges et ces fonctions n'est biunivoque qu'à l'équivalence ci-dessus près.

Pour une fonction arbitraire Φ de la classe correspondant à une fonctionnelle donnée F on a

$$\| F \| \leqslant V_a^b [\Phi];$$

l'égalité ici peut ne pas avoir lieu, mais, comme le montre la démonstration du théorème, dans chacune de ces classes il y a au moins une fonction pour laquelle cette égalité est réalisée.

Espaces de fonctions sommables

Une classe importante d'espaces normés est constituée par les espaces de fonctions sommables. Parmi ces derniers on doit mentionner en premier lieu l'espace L_1 de toutes les fonctions sommables et l'espace L_2 des fonctions à carré sommable. Nous allons étudier les propriétés fondamentales de ces espaces. Le contenu de ce chapitre s'appuie d'une part sur les propriétés générales des espaces métriques et des espaces vectoriels normés, exposées aux chapitres II-IV, et d'autre part, sur la notion d'intégrale de Lebesgue, introduite au chap. V.

§ 1. L'espace L_1

1. Définition et propriétés fondamentales de l'espace L_1. Soit X un espace sur lequel est définie une mesure μ ; la mesure de l'espace X tout entier peut être finie ou infinie. La mesure μ sera supposée c o m p l è t e (ce qui revient à dire que tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est mesurable). Considérons l'ensemble de toutes les fonctions f sommables sur X. Etant donné que toute combinaison linéaire de fonctions sommables est une fonction sommable, cet ensemble, muni des opérations habituelles donnant la somme de deux fonctions et le produit d'une fonction par un nombre, constitue un espace vectoriel. Nous désignerons cet espace par $L_1(X, \mu)$ ou, plus brièvement, par L_1. Introduisons dans L_1 une norme, en posant [1])

$$\|f\| = \int |f(x)|\, d\mu. \tag{1}$$

Il est clair qu'alors

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$$

et

$$\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Pour que la dernière propriété de la norme, à savoir

$$\|f\| > 0, \text{ si } f \neq 0,$$

[1]) Ici et dans la suite le symbole $\int$ désigne l'intégration sur l'espace X tout entier.

24—0167

soit aussi réalisée, il faut considérer les fonctions équivalentes sur X non comme des fonctions distinctes, mais comme constituant le même élément de l'espace L_1. En particulier, l'élément nul dans L_1 est alors la classe des fonctions presque partout nulles. Dans ces conditions l'expression (1) jouira de toutes les propriétés de la norme. On est donc amené à la définition suivante.

D é f i n i t i o n 1. On appelle *espace* L_1 l'espace normé ayant pour éléments les classes de fonctions sommables équivalentes entre elles; l'addition des éléments de L_1 et leur multiplication par des nombres sont définies comme d'habitude pour les fonctions[1]), la norme sur L_1 étant définie par la formule

$$\| f \| = \int | f(x) | \, d\mu.$$

Dans L_1, comme dans tout espace normé, on introduit la distance à l'aide de la formule

$$\rho(f, g) = \| f - g \|.$$

La convergence d'une suite de fonctions sommables au sens de cette distance s'appelle *convergence en moyenne*. L'espace L_1 peut être considéré comme formé des fonctions complexes (L_1 complexe) ou uniquement des fonctions réelles (L_1 réel). Le contenu de ce paragraphe se rapporte à tous les deux cas.

Dans beaucoup de questions de l'analyse un fait très important est le suivant.

T h é o r è m e 1. *L'espace* L_1 *est complet.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans L_1, c.-à-d.

$$\| f_n - f_m \| \to 0 \text{ quand } n, m \to \infty.$$

Il existe alors une suite croissante d'indices $\{n_k\}$ telle que

$$f_{n_k} - f_{n_{k+1}} = \int | f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) | \, d\mu < \frac{1}{2^k}.$$

De cette inégalité et du théorème de B. Levi, il résulte que la série

$$| f_{n_1} | + | f_{n_2} - f_{n_1} | + \dots$$

est convergente presque partout sur X. Mais alors la série

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \dots$$

[1]) Plus précisément: chaque élément de L_1 est une classe de fonctions sommables, équivalentes entre elles; pour additionner deux de ces classes, on choisit dans chacune d'elles un représentant, on fait la somme des représentants choisis et on prend pour somme des deux classes considérées la classe qui contient la somme des représentants choisis. Il est clair que le résultat ne dépend pas du choix des représentants. On procède de même pour multiplier un élément de L_1 par un nombre.

converge aussi presque partout sur X vers une fonction

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

Ainsi, toute suite de Cauchy dans L_1 contient une sous-suite convergente presque partout.

Montrons maintenant que la sous-suite $\{f_{n_k}\}$ converge en moyenne vers la même fonction f. Comme $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy, quel que soit $\varepsilon > 0$, pour k et l assez grands on a

$$\int |f_{n_k}(x)-f_{n_l}(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

D'après le théorème de Fatou, dans cette inégalité on peut passer à la limite sous le signe somme pour $l \to \infty$. On obtient alors

$$\int |f_{n_k}(x)-f(x)|\,d\mu \leqslant \varepsilon,$$

d'où l'on déduit que $f \in L_1$ et que $f_{n_k} \to f$. Or, si une suite de Cauchy contient une sous-suite convergeant vers une certaine limite, elle converge elle-même vers cette limite.

Le théorème est démontré.

2. Ensembles partout denses dans L_1. Pour toute fonction f sommable sur X, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction simple sommable $\varphi(x)$ telle que

$$\int |f(x)-\varphi(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

D'autre part, comme l'intégrale d'une fonction simple sommable prenant les valeurs $y_1, y_2, \ldots$ sur les ensembles $E_1, E_2, \ldots$, est définie comme la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(E_n)$$

(à condition qu'elle soit absolument convergente), il est clail que toute fonction simple sommable peut être considérée comme la limite (en moyenne) d'une suite de fonctions simples dont chacune ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Par conséquent, *les fonctions qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs* (c.-à-d. qui représentent des combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques) *forment un ensemble partout dense dans L_1.*

Soit R un espace métrique sur lequel est définie une mesure vérifiant la condition suivante (qui est vérifiée par la mesure de Lebesgue sur un espace euclidien, ainsi que dans beaucoup d'autres cas qui présentent de l'intérêt pratique): *tous les ensembles ouverts et tous les ensembles fermés dans R sont mesurables et pour tout ensem-*

ble mesurable $M \subset R$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble ouvert $G \supset M$ tel que

$$\mu (G \setminus M) < \varepsilon. \tag{2}$$

Alors on a le théorème suivant:

Théorème 2. *L'ensemble de toutes les fonctions continues sommables est partout dense dans $L_1 (R, \mu)$.*

Démonstration. D'après ce qui précède, il suffit de démontrer que toute fonction simple prenant un nombre fini de valeurs est la limite, au sens de la convergence en moyenne, d'une suite de fonctions continues. Or, comme toute fonction simple sommable prenant un nombre fini de valeurs est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques $\chi_M (x)$ des ensembles mesurables de mesure finie, il suffit de faire la démonstration pour ces derniers. Soit M un ensemble mesurable de l'espace métrique R et soit $\mu (M) < \infty$. Alors de la condition (2) on déduit immédiatement que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé F_M et un ensemble ouvert G_M tels que

$$F_M \subset M \subset G_M \text{ et } \mu (G_M \setminus F_M) < \varepsilon.$$

Définissons maintenant une fonction $\varphi_\varepsilon (x)$, en posant[1])

$$\varphi_\varepsilon (x) = \frac{\rho (x, R \setminus G_M)}{\rho (x, R \setminus G_M) + \rho (x, F_M)}.$$

Cette fonction est égale à 0 pour $x \in R \setminus G_M$ et à 1 pour $x \in F_M$. Elle est continue, car chacune des fonctions $\rho (x, F_M)$ et $\rho (x, R \setminus G_M)$ est continue et leur somme ne s'annule nulle part. La fonction $\chi_M - \varphi_\varepsilon$ ne dépasse pas 1 sur $G_M \setminus F_M$ et s'annule en dehors de cet ensemble. Par conséquent,

$$\int | \chi_M (x) - \varphi_\varepsilon (x) | d\mu < \varepsilon,$$

d'où l'on déduit l'affirmation du théorème.

Il est clair que l'espace $L_1 (X, \mu)$ dépend aussi bien du choix de l'espace X, que du choix de la mesure μ sur cet espace. Par exemple, si la mesure μ est concentrée en un nombre fini de points, $L_1 (X, \mu)$ sera simplement un espace de dimension finie. En analyse, le rôle fondamental revient aux espaces L_1 de dimension infinie contenant un sous-ensemble dénombrable et partout dense. Pour caractériser les espaces L_1 de ce genre, introduisons encore une notion qui, au fond, se rapporte à la théorie générale de la mesure.

Définition 2. La mesure μ s'appelle *mesure à base dénombrable*, s'il existe une famille dénombrable

$$\mathcal{A} = \{A_n\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

---

[1]) $\rho (x, A)$ désigne la distance du point x à l'ensemble A.

de sous-ensembles mesurables de l'espace X (*base dénombrable* de la mesure μ) telle que pour tout ensemble mesurable $M \subset X$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $A_k \in \mathscr{A}$ tel que

$$\mu(M \triangle A_k) < \varepsilon.$$

En particulier, la mesure μ a une base dénombrable, si on peut la considérer comme le prolongement selon Lebesgue d'une mesure m, définie sur un demi-anneau dénombrable $\mathfrak{S}$. En effet, dans ce cas l'anneau $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ (évidemment, dénombrable) est précisément la base cherchée. De là on voit, par exemple, que la mesure de Lebesgue sur un segment a une base dénombrable, car pour cette mesure on peut prendre en qualité de demi-anneau initial l'ensemble des intervalles semi-ouverts à extrémités rationnelles.

Le produit $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ de deux mesures à bases dénombrables est aussi une mesure à base dénombrable, car les réunions finies de produits d'éléments appartenant à la base de la mesure μ_1 par des éléments appartenant à la base de la mesure μ_2 forment, comme il est aisé de le vérifier, une base de la mesure $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. On en déduit que la mesure de Lebesgue sur le plan (aussi bien que dans un espace à n dimensions) a une base dénombrable.

Soit

$$A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*, \ldots \tag{3}$$

une base dénombrable de la mesure μ. Il est aisé de voir que la famille (3) peut être élargie de façon à obtenir une nouvelle base dénombrable de cette mesure

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{4}$$

close par rapport à la soustraction et aux réunions et intersections finies d'ensembles, c.-à-d. possédant la structure d'anneau.

Théorème 3. *Si la mesure μ a une base dénombrable, dans $L_1(X, \mu)$ il existe un ensemble dénombrable et partout dense de fonctions.*

Démonstration. Montrons que les sommes finies

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x), \tag{5}$$

où c_k sont des nombres rationnels et f_k sont des fonctions caractéristiques des éléments appartenant à la base dénombrable de la mesure μ, forment un ensemble dénombrable et partout dense dans $L_1(X, \mu)$.

La dénombrabilité d'un tel ensemble est évidente ; montrons qu'il est partout dense dans $L_1(X, \mu)$. Comme nous l'avons déjà montré, l'ensemble des fonctions en escalier ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est partout dense dans L_1. Comme toute fonction de ce

type peut être approchée avec la précision que l'on veut par des fonctions du même type, mais ne prenant que des valeurs rationnelles, il suffit de montrer que toute fonction en escalier f prenant sur les ensembles

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n\ \ (\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X, \quad E_i \cap E_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j)$$

respectivement les valeurs

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

(où tous les y_i sont des nombres rationnels) peut être approchée au sens de la métrique de L_1 avec la précision que l'on veut par des fonctions de la forme (5). Compte tenu de la remarque faite plus haut, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que la base de la mesure μ est un anneau.

D'après la définition 2, quel que soit $\varepsilon > 0$, la base dénombrable de la mesure μ contient des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels que

$$\mu\ (E_k \triangle A_k) < \varepsilon.$$

Posons

$$A'_k = A_k \setminus \bigcup_{i<k} A_i \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

et

$$f^*(x) = \begin{cases} y_k & \text{pour} \quad x \in A'_k, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A'_i. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que pour ε suffisamment petit la mesure

$$\mu\ \{x : f(x) \neq f^*(x)\}$$

devient aussi petite que l'on veut. Par conséquent, l'intégrale

$$\int |f(x) - f^*(x)|\, d\mu \leqslant (2 \max |y_k|)\, \mu\, \{x : f(x) \neq f^*(x)\}$$

est aussi petite que l'on veut, si ε est suffisamment petit.

En vertu des suppositions faites par rapport à la base de μ, la fonction f^* est de la forme (5).

Le théorème est démontré.

Dans le cas particulier, où X est un segment de la droite numérique et la mesure μ est celle de Lebesgue, on peut obtenir un ensemble dénombrable et partout dense dans L_1 d'une manière plus simple, par exemple, en prenant l'ensemble de tous les polynômes à coefficients rationnels. En effet, cet ensemble est partout dense dans l'ensemble des fonctions continues (même au sens de la convergence uniforme) et ce dernier est partout dense dans $L_1(X, \mu)$.

§ 2. L'espace L_2

1. Définition et propriétés fondamentales. L'espace L_1 est, comme nous l'avons vu, un espace vectoriel normé complet (c.-à-d. un espace de Banach). Pourtant il n'est pas euclidien : la norme dont il est muni ne peut pas être définie à l'aide d'un produit scalaire. Ceci résulte du « théorème du parallélogramme », établi au n° 8, § 4, chap. III. Par exemple, pour les fonctions $f \equiv 1$ et $g = \sin x$, intégrables sur le segment $[0, 2\pi]$, la relation

$$\| f + g \|^2 + \| f - g \|^2 = 2 (\| f \|^2 + \| g \|^2)$$

n'est pas vérifiée dans L_1.

Un espace fonctionnel non seulement normé, mais aussi euclidien, peut être construit, en considérant l'ensemble des fonctions à carré intégrable. Introduisons les définitions correspondantes. Nous allons considérer d'abord des fonctions réelles f, définies sur un espace X sur lequel est donnée une mesure μ. Toutes les fonctions sont supposées mesurables et définies presque partout sur X. Les fonctions équivalentes entre elles ne sont pas considérées comme distinctes.

D é f i n i t i o n 1. Une fonction f est dite *fonction à carré intégrable sur X*, si l'intégrale

$$\int f^2(x)\, d\mu$$

existe (est finie). Nous désignerons l'ensemble de toutes les fonctions vérifiant cette condition par $L_2(X, \mu)$ ou, plus brièvement, par L_2.

Etablissons les propriétés fondamentales des fonctions à carré intégrable.

1. *Le produit de deux fonctions à carré intégrable est une fonction intégrable.*

Ceci résulte immédiatement de l'inégalité

$$| f(x)\, g(x) | \leqslant \frac{1}{2} [f^2(x) + g^2(x)]$$

et des propriétés de l'intégrale de Lebesgue.

C o r o l l a i r e. *Toute fonction f à carré intégrable sur un espace de mesure finie est intégrable.*

En effet il suffit de poser $g(x) \equiv 1$ et d'utiliser la propriété 1.

2. *La somme de deux fonctions de L_2 est aussi une fonction de L_2.*

En effet,

$$(f(x) + g(x))^2 \leqslant f^2(x) + 2 \,| f(x)\, g(x) |\, + g^2(x);$$

d'après la propriété 1, chacune des trois fonctions figurant au second membre de cette inégalité est intégrable.

3. *Si $f \in L_2$ et α est un nombre quelconque alors $\alpha f \in L_2$.*

En effet, si $f \in L_2$, on a

$$\int [\alpha f(x)]^2 \, d\mu = \alpha^2 \int f^2(x) \, d\mu < \infty.$$

Les propriétés 2 et 3 expriment le fait que toute combinaison linéaire de fonctions de L_2 appartient encore à L_2. En outre, il est évident que l'addition des fonctions de L_2 et leur multiplication par des nombres vérifient toutes les conditions énumérées dans la définition de l'espace vectoriel (chap. III, § 1). Par conséquent, l'*ensemble L_2 des fonctions à carré intégrable est un espace vectoriel.*

Définissons maintenant le produit scalaire dans L_2, en posant

$$(f, g) = \int f(x) g(x) \, d\mu.$$

Il est clair que toutes les conditions indiquées dans la définition du produit scalaire (cf. § 4, chap. III), à savoir:

1) $(f, g) = (g, f)$,
2) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$,
3) $(\alpha f, g) = \alpha (f, g)$,
4) $(f, f) > 0$, si $f \neq 0$,

sont vérifiées. En particulier, la condition 4) est vérifiée, grâce à la convention de ne pas considérer comme distinctes les fonctions équivalentes l'une à l'autre (de cette façon, en qualité d'élément nul on prendra l'ensemble des fonctions sur X, équivalentes à $f \equiv 0$).

Ainsi donc, en définissant pour les fonctions à carré intégrable les opérations d'addition et de multiplication par un nombre, ainsi que le produit scalaire, on est conduit à la définition définitive suivante.

D é f i n i t i o n 2. On appelle *espace euclidien* L_2 l'espace vectoriel ayant pour éléments les classes des fonctions équivalentes à carré intégrable et muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int f(x) g(x) \, d\mu.$$

Dans L_2, comme dans tout espace euclidien on a l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky et l'inégalité triangulaire qui dans ce cas ont respectivement la forme

$$\left(\int f(x) g(x) \, d\mu \right)^2 \leqslant \int f^2(x) \, d\mu \int g^2(x) \, d\mu$$

et

$$\sqrt{\int (f(x) + g(x))^2 \, d\mu} \leqslant \sqrt{\int f^2(x) \, d\mu} + \sqrt{\int g^2(x) \, d\mu}.$$

En particulier, pour $\mu(X) < \infty$, en posant dans l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky $g(x) \equiv 1$, on obtient l'estimation utile

suivante:

$$\left(\int f(x)\,d\mu\right)^2 \leqslant \mu(X) \int f^2(x)\,d\mu. \qquad (1)$$

La norme sur L_2 est définie par la formule

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int f^2(x)\,d\mu}\,;$$

la distance de deux éléments f et g de L_2 est définie par la formule

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int (f(x) - g(x))^2\,d\mu}.$$

La quantité

$$\int (f(x) - g(x))^2\,d\mu = \|f - g\|^2$$

s'appelle encore *écart quadratique moyen* des fonctions f et g.

La convergence d'une suite de fonctions au sens de la métrique de l'espace L_2 s'appelle *convergence en moyenne quadratique*. Si une confusion de cette convergence avec la convergence dans L_1, définie au paragraphe précédent, n'est pas possible, nous employerons dans ce cas aussi le terme plus court « convergence en moyenne ».

Théorème 1. Si $\mu(X) < \infty$, *l'espace* $L_2(X, \mu)$ *est complet.*

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans L_2, c.-à-d.

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad \text{quand} \quad n, m \to \infty.$$

Alors, en vertu de l'estimation (1), on a

$$\int |f_n(x) - f_m(x)|\,d\mu \leqslant [\mu(X)]^{1/2} \left\{\int (f_n(x) - f_m(x))^2\,d\mu\right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon [\mu(X)]^{1/2}, \qquad (2)$$

ce qui signifie que $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy pour la métrique de l'espace L_1 également. En recommençant les raisonnements que nous avons usés pour démontrer la complétude de l'espace L_1, choisissons dans $\{f_n\}$ une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ convergeant presque partout vers une fonction f. En vertu du théorème de Fatou, dans l'inégalité

$$\int (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2\,d\mu < \varepsilon,$$

vraie pour les termes de cette sous-suite, si k et l sont assez grands, on peut passer à la limite pour $l \to \infty$. On obtient alors

$$\int (f_{n_k}(x) - f(x))^2\,d\mu \leqslant \varepsilon,$$

d'où l'on déduit que $f \in L_2$ et que $f_{n_k} \to f$. Pour achever la démonstration, il suffit, comme dans la démonstration du théorème 1, § 1, d'utiliser le fait que si une suite de Cauchy contient une sous-suite convergente, elle converge vers la même limite.

2. Cas d'un espace de mesure infinie. Dans le numéro précédent nous avons étudié des fonctions à carré intégrable, définies sur un espace X de mesure finie. Lors de cette étude nous nous sommes basés effectivement sur la condition $\mu(X) < \infty$: nous avons fait appel à cette condition d'abord pour démontrer que toute fonction à carré intégrable est intégrable et ensuite pour démontrer l'inégalité (2), sur laquelle est fondée la démonstration du fait que l'espace L_2 est complet. Si l'on considère des fonctions définies sur un espace de mesure infinie (par exemple, sur la droite numérique avec la mesure de Lebesgue), une fonction appartenant à L_2 n'appartient pas nécessairement à L_1. Par exemple, la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ n'est pas intégrable sur la droite numérique toute entière, bien que son carré soit intégrable. D'autre part, dans le cas où $\mu(X) < \infty$ on a l'inégalité (1) qui signifie que la convergence d'une suite de fonctions dans L_2 implique sa convergence dans L_1. Pour $\mu(X) = \infty$ cela n'est plus vrai: par exemple, la suite des fonctions

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pour} \quad |x| \leqslant n, \\ 0 & \text{pour} \quad |x| > n \end{cases}$$

converge vers 0 dans l'espace $L_2(-\infty, \infty)$ des fonctions à carré sommable sur la droite numérique et ne converge vers aucune limite dans $L_1(-\infty, \infty)$. Cependant, *le théorème de la complétude de l'espace L_2 reste vrai pour $\mu(X) = \infty$* [1]).

Démontrons cette assertion. Comme dans le n° 6, § 5, chap. V, où l'on a introduit la notion d'intégrale sur un ensemble de mesure infinie, nous allons supposer que l'espace X peut être représenté par une réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie. Soit

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad \mu(X_n) < \infty, \quad X_n \cap X_m = \varnothing \quad \text{pour} \quad n \neq m$$

une telle représentation, et soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $L_2(X, \mu)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que

$$\int [f_k(x) - f_l(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon$$

[1]) La démonstration de la complétude de l'espace L_1, exposée au § 1, ne dépend évidemment pas de l'hypothèse que la mesure de l'espace X est finie.

pour tous les $k,\ l \geqslant N$. Posons

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{pour} \quad x \in X_n, \\ 0 & \text{pour les autres } x. \end{cases}$$

En vertu de l'additivité dénombrable de l'intégrale de Lebesgue, on a

$$\int [f_k(x) - f_l(x)]^2 \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f_l^{(n)}(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon.$$

Donc, pour tout M fini on a, à plus forte raison,

$$\sum_{n=1}^{M} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f_l^{(n)}(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon. \tag{3}$$

L'ensemble des fonctions à carré intégrable sur chaque X_n est un ensemble complet. En posant

$$f^{(n)}(x) = \lim_{l \to \infty} f_l^{(n)}(x)$$

(au sens de la convergence dans l'espace $L_2(X_n,\ \mu)$), on peut passer dans l'inégalité (3) à la limite pour $l \to \infty$. On obtient alors

$$\sum_{n=1}^{M} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tous les M, on peut passer à la limite pour $M \to \infty$. Ceci conduit à l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

En posant

$$f(x) = f^{(n)}(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_n,$$

on peut récrire cette inégalité sous la forme

$$\int [f_n(x) - f(x)]^2 \, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que $f \in L_2(X,\ \mu)$ et que la suite $\{f_k\}$ converge vers f.

Exercice. On définit $L_p(X,\ \mu)$ comme l'ensemble des classes de fonctions équivalentes, pour lesquelles $\int |f(x)|^p \, d\mu < \infty$ où $1 \leqslant p < \infty$. Démontrer que $L_p(X,\ \mu)$ est un espace de Banach relativement à la norme $\|f\| = \left(\int |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$.

3. Ensembles partout denses dans L_2. Théorème de l'isomorphisme. Ainsi, l'espace $L_2(X, \mu)$ des fonctions à carré intégrable est un espace euclidien complet. A l'exception des cas de dégénérescence, la dimension de cet espace est infinie. Pour diverses applications en analyse, il importe de savoir, à quelles conditions l'espace $L_2(X, \mu)$ est séparable, c.-à-d. contient un ensemble dénombrable partout dense. Au § 1 nous avons montré que l'espace $L_1(X, \mu)$ est séparable, si la mesure μ a une base dénombrable. Il est aisé de voir que cette condition assure également la séparabilité de $L_2(X, \mu)$. En effet, toute fonction de $L_2(X, \mu)$ peut être approchée avec la précision que l'on veut par des fonctions dont chacune est nulle en dehors d'un certain ensemble de mesure finie [1]). Or, les mêmes raisonnements que dans la démonstration du théorème 3, § 1, montrent que dans l'ensemble de telles fonctions on peut choisir un sous-ensemble dénombrable partout dense.

Ainsi, lorsque la mesure μ a une base dénombrable, $L_2(X, \mu)$ est un espace euclidien complet et séparable. Autrement dit, en laissant de côté le cas où $L_2(X, \mu)$ est de dimension finie, on obtient le résultat suivant: *si la mesure μ a une base dénombrable, $L_2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert séparable.*

En vertu du théorème de l'isomorphisme des espaces de Hilbert, cela signifie que tous les espaces $L_2(X, \mu)$ possédant la propriété en question sont isomorphes entre eux. En particulier, chacun de ces espaces est isomorphe à l'espace l_2 des suites numériques $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Ce dernier espace peut être considéré comme $L_2(X, \mu)$, où X est un ensemble dénombrable, la mesure μ est définie sur tous ses sous-ensembles et vaut 1 pour chaque point. *Dans la suite nous nous bornerons aux espaces $L_2(X, \mu)$ tels que la mesure μ soit à base dénombrable.* S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, nous désignerons un tel espace simplement par L_2.

Comme, d'après ce qui précède, L_2 est la réalisation d'un espace de Hilbert, toutes les notions et tous les résultats, établis au § 4, chap. III, pour un espace de Hilbert abstrait, s'étendent à L_2.

En particulier, d'après le théorème de Riesz, toute fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert H s'écrit sous la forme d'un produit scalaire

$$F(h) = (h, a),$$

où a est un vecteur fixé de H. Par conséquent, *toute fonctionnelle linéaire sur L_2 est de la forme*

$$F(f) = \int f(x)\, g(x)\, d\mu,$$

où g est une fonction fixée à carré intégrable sur X.

---

[1]) Lorsque $\mu(X) < \infty$, cette opération est superflue.

4. Espace L_2 complexe. Nous venons de considérer l'espace L_2 réel. Les résultats exposés plus haut s'étendent sans difficulté au cas d'un espace complexe. Une fonction complexe f, définie sur un espace X, sur lequel est définie une mesure μ, s'appelle *fonction à carré intégrable*, si l'intégrale

$$\int_X |f(x)|^2 \, d\mu$$

est finie. Si l'on définit l'addition de telles fonctions et leur multiplication par des nombres comme d'habitude et le produit scalaire par la formule

$$(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} \, d\mu,$$

on obtient un espace euclidien que l'on appelle *espace L_2 complexe*. (De même que dans le cas réel, nous considérons ici toutes les fonctions équivalentes entre elles comme le même élément de l'espace.) Cet espace est complet et si la mesure μ a une base dénombrable, il est aussi séparable. Ainsi donc (le cas de la dimension finie étant laissé de côté), on a le résultat suivant: *l'espace L_2 complexe correspondant à une mesure à base dénombrable est un espace de Hilbert complexe séparable.* Tous les espaces de ce type sont isomorphes entre eux et jouissent de toutes les propriétés établies au § 4, chap. III.

5. La convergence en moyenne quadratique et sa liaison avec d'autres types de convergence des suites de fonctions. En introduisant la norme dans l'espace L_2, par là même nous avons défini pour les fonctions à carré intégrable la notion de convergence suivante:

$$f_n \to f,$$

si

$$\lim_{n \to \infty} \int [f_n(x) - f(x)]^2 \, d\mu = 0.$$

Cette convergence a été appelée convergence en moyenne quadratique. On se propose maintenant de trouver la liaison de cette convergence avec d'autres types de convergence des suites de fonctions. Considérons d'abord le cas où l'espace X est de mesure finie.

1. *Si une suite $\{f_n\}$ de fonctions de l'espace $L_2(X, \mu)$ est convergente pour la métrique de $L_2(X, \mu)$, elle est convergente aussi pour la métrique de $L_1(X, \mu)$.*

En effet, grâce à l'inégalité (2), on a

$$\int |f_n(x)-f(x)|\,d\mu \leqslant \left[\mu(X)\int (f_n(x)-f(x))^2\,d\mu\right]^{1/2},$$

d'où notre affirmation.

2. *Si une suite* $\{f_n\}$ *est uniformément convergente, elle est aussi convergente en moyenne quadratique.*

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous les n suffisamment grands on a

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

et donc

$$\int [f_n(x)-f(x)]^2\,d\mu < \varepsilon^2\mu(X),$$

d'où l'on déduit l'affirmation annoncée.

3. *Si une suite de fonctions sommables* $\{f_n\}$ *est convergente en moyenne, elle est aussi convergente en mesure sur* X.

Cette assertion résulte immédiatement de l'inégalité de Tchébychev (page 293).

De là et du théorème 8, § 4, chap. V, on déduit la proposition suivante :

4. *Si une suite* $\{f_n\}$ *est convergente en moyenne, on peut en extraire une sous-suite* $\{f_{n_k}\}$, *convergente presque partout.*

Notons que nous avons déjà établi ce résultat lors de la complétude de l'espace L_1, sans utiliser le théorème 8, § 4, chap. V.

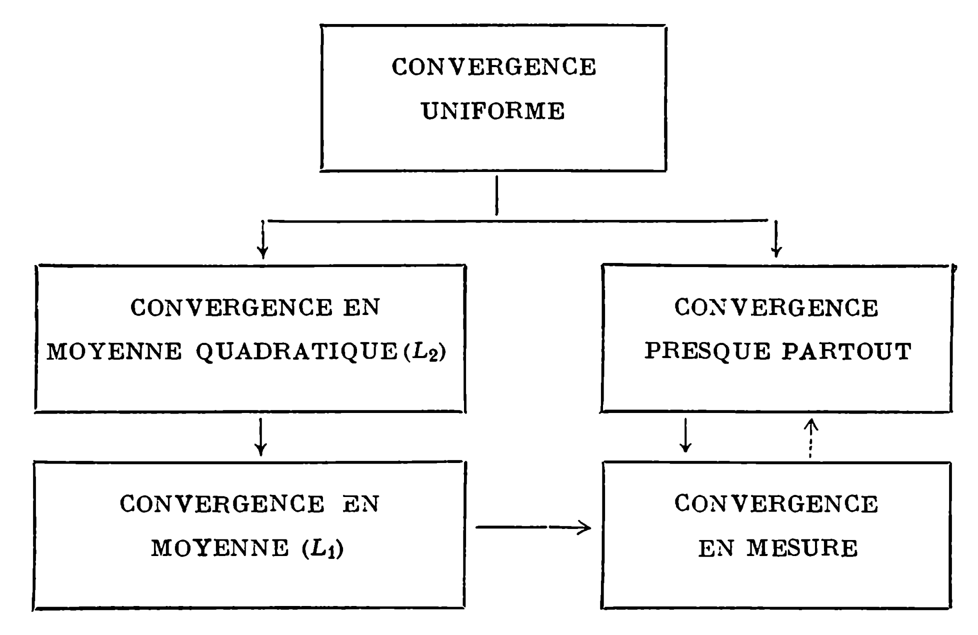
Il est aisé de voir que la convergence d'une suite en moyenne (et même en moyenne quadratique) n'implique pas, en général, sa convergence presque partout. En effet, la suite $\{f_n\}$ construite au n° 6, § 4, chap. V, converge en moyenne (et même en moyenne quadratique) vers $f \equiv 0$ et néanmoins, comme nous l'avons vu, elle ne converge vers 0 en aucun point. Inversement, une suite $\{f_n\}$ peut être convergente presque partout (et même partout) sans toutefois être convergente en moyenne. Considérons, par exemple, la suite $\{f_n\}$ de fonctions sur le segment $[0, 1]$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{pour} \quad x \in \left(0, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{pour les autres } x. \end{cases}$$

Il est évident que $f_n(x) \to 0$ pour tous les $x \in [0, 1]$. Tout de même,

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = 1 \quad \text{pour tous les } n.$$

La liaison entre les différents types de convergence dans le cas $\mu(X) < \infty$ peut être exprimée sous la forme du schéma suivant:



où la flèche pointillée indique la possibilité d'extraire d'une suite convergente en mesure une sous-suite convergente presque partout.

Dans le cas $\mu(X) = \infty$ (par exemple, pour les fonctions définies sur toute la droite numérique, la mesure sur cette droite étant celle de Lebesgue) les liaisons établies ci-dessus n'ont plus lieu. Par exemple, la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{pour } |x| \leqslant n, \\ 0 & \text{pour } |x| > n \end{cases}$$

converge uniformément sur toute la droite numérique vers $f \equiv 0$ et pourtant elle ne converge ni en moyenne, ni en moyenne quadratique. En outre, comme nous l'avons déjà indiqué, pour $\mu(X) = \infty$ la convergence d'une suite en moyenne quadratique (c.-à-d. dans L_2) n'implique pas la convergence de cette suite en moyenne (c.-à-d. dans L_1).

Remarquons enfin que ni pour $\mu(X) < \infty$, ni pour $\mu(X) = \infty$, la convergence en moyenne n'implique pas, en général, la convergence en moyenne quadratique.

§ 3. Systèmes orthogonaux de fonctions dans L_2. Séries par rapport à un système orthogonal

Les théorèmes généraux, établis au § 4, chap. III, pour les espaces euclidiens, montrent que dans L_2 il existe des systèmes orthogonaux complets (en particulier, des systèmes orthonormés) de fonc-

tions. Un tel système peut être obtenu, par exemple, en appliquant à un système complet de fonctions le procédé d'orthogonalisation décrit au même endroit. Si un système orthogonal complet $\{\varphi_n\}$ est choisi dans L_2, tout élément $f \in L_2$ peut être considéré conformément aux résultats généraux du § 4, chap. III, comme la somme de la série de Fourier de la fonction f par rapport au système orthogonal $\{\varphi_n\}$:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Les coefficients c_n, c.-à-d. les coefficients de Fourier de la fonction f par rapport au système $\{\varphi_n\}$, sont définis par les formules

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int f(x)\, \varphi_n(x)\, d\mu \quad \left(\|\varphi_n\|^2 = \int \varphi_n^2(x)\, d\mu\right).$$

Dans ce paragraphe nous considérerons les exemples les plus usuels de systèmes orthogonaux dans L_2 et les développements qui leur correspondent.

1. Système trigonométrique. Série trigonométrique de Fourier. Considérons l'espace $L_2[-\pi, \pi]$ des fonctions à carré intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$, la mesure sur ce segment étant la mesure habituelle de Lebesgue. Dans cet espace les fonctions

$$1, \ \cos nx, \quad \sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

forment un système orthogonal complet, dit *système trigonométrique*. L'orthogonalité est facile à vérifier par calcul direct; par exemple, pour $n \neq m$ on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \frac{n+m}{2}\, x + \cos \frac{n-m}{2}\, x\right] dx = 0,$$

etc. La complétude du système (1) résulte du théorème de Weierstrass sur l'approximation d'une fonction périodique continue quelconque par des polynômes trigonométriques [1]). Le système (1) n'est pas normé. Le système normé correspondant est constitué par les fonctions

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soit f une fonction de $L_2[-\pi, \pi]$; ses coefficients de Fourier par rapport aux fonctions 1, $\cos nx$, $\sin nx$ sont désignés usuellement par $\frac{a_0}{2}$, a_n et b_n. Donc, conformément aux formules générales pour

[1]) Au § 2, chap. VIII, nous démontrerons le théorème de Fejér qui est un renforcement du théorème de Weierstrass. De cette façon nous obtiendrons en même temps une démonstration de la complétude du système trigonométrique (indépendante, bien sûr, des résultats exposés ici).

les coefficients de Fourier, on a

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \text{c.-à-d.} \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

et

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

La série de Fourier correspondante est

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

et, quelle que soit la fonction $f\in L_2$, elle converge en moyenne quadratique précisément vers cette fonction. Si

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

est une somme partielle de la série de Fourier, l'écart quadratique moyen de S_n et f peut être calculé à l'aide de la formule

$$\|f(x)-S_n(x)\|^2=\|f\|^2-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right).$$

Parmi tous les polynômes trigonométriques de degré n

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

la somme partielle de la série de Fourier S_n fournit la meilleure approximation de la fonction f (pour la métrique de L_2). L'inégalité de Bessel pour le système trigonométrique a la forme

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

mais, comme le système trigonométrique est complet, pour toute fonction de L_2 on a en réalité la relation de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Quelle que soit la fonction $f \in L_2$, les carrés de ses coefficients de Fourier forment une série convergente. Réciproquement, si les nombres a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente, alors la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est aussi convergente (dans L_2) et sa somme est une fonction dont les coefficients de Fourier coïncident avec les nombres a_0, a_n, b_n.

Toutes ces propositions (qui découlent immédiatement des résultats généraux du § 4, chap. III) s'étendent facilement aux fonctions définies sur un segment de longueur aribtraire $[-l, l]$. Si f est une fonction à carré sommable sur $[-l, l]$, le changement de variable $x = \frac{\pi t}{l}$, soit $t = \frac{lx}{\pi}$, conduit à remplacer $f(t)$ par la fonction $f^*(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$, définie sur le segment $[-\pi, \pi]$.

On en déduit que

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\, dt, \quad n = 0, 1, \ldots$$

et

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

La série de Fourier pour une fonction f, définie sur un segment de longueur $2l$, a donc la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l}\right).$$

R e m a r q u e s. 1. Les séries trigonométriques ont été utilisées par le mathématicien français J. Fourier dans ses travaux sur la physique mathématique et plus particulièrement sur la propagation de la chaleur. Par ailleurs, les formules servant à calculer les coefficients a_n et b_n étaient connues déjà à Euler. Par la suite la théorie des séries trigonométriques a été développée dans les travaux de Riemann, Dirichlet, etc. Primitivement les termes « série de Fourier », « coefficients de Fourier », etc., furent employés uniquement pour le cas du système trigonométrique et ce n'est que beaucoup plus tard qu'on commença à les utiliser au sens général, décrit dans le § 4, chap. III (c.-à-d. pour un système orthogonal a r b i t r a i r e dans un espace euclidien q u e l c o n q u e).

2. Du fait que le système trigonométrique est complet et des théorèmes généraux du § 4, chap. III, il résulte que pour toute fonction $f \in L_2$ sa série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge vers cette fonction en moyenne. Mais pour des problèmes concrets de l'analyse il importe de savoir les conditions qui assurent d'autres types de convergence de cette série vers f, par exemple, la convergence en chaque point ou la convergence uniforme. Les questions de ce genre seront étudiées au chapitre suivant.

2. Systèmes trigonométriques sur le segment $[0, \pi]$. Les fonctions

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots \tag{2}$$

et

$$\sin x, \sin 2x, \ldots \tag{3}$$

forment dans leur ensemble un système orthogonal complet sur le segment $[-\pi, \pi]$. Montrons que chacun des deux systèmes (2) et (3) est orthogonal et complet sur le segment $[0, \pi]$. L'orthogonalité peut être vérifiée par calcul direct. Démontrons la complétude du système (2). Soit f une fonction à carré intégrable sur $[0, \pi]$. Achevons de définir cette fonction sur le segment $[-\pi, \pi]$, en posant pour $x \in [-\pi, 0)$

$$f(x) = f(-x),$$

et développons-la en série de Fourier par rapport au système

$$1, \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Comme la fonction f, définie maintenant sur $[-\pi, \pi]$, est paire, tous les coefficients des sinus dans ce développement sont nuls. Cela se voit aussitôt, si l'on considère la formule servant à calculer ces coefficients : pour une fonction paire f et pour $n \geqslant 1$ on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = 0.$$

En d'autres termes, sur le segment $[-\pi, \pi]$ (et à plus forte raison sur $[0, \pi]$) cette fonction peut être approchée en moyenne quadrati-

que avec la précision que l'on veut par des combinaisons linéaires des éléments du système (2). On en déduit que le système (2) est complet. La complétude du système (3) sur $[0, \pi]$ peut être démontrée de manière analogue, moyennant un prolongement impair de la fonction f, définie sur $[0, \pi]$, à l'intervalle semi-fermé $[-\pi, 0)$ par la formule

$$f(-x) = -f(x).$$

La fonction sur $[-\pi, \pi]$, obtenue à la suite d'un tel prolongement, est impaire et admet sur ce segment un développement ne contenant que des sinus.

3. Série de Fourier sous forme complexe. L'écriture d'une série trigonométrique peut être condensée, si l'on fait usage des formules d'Euler

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

En portant ces expressions dans la série de Fourier, on obtient

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

où $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et pour $n \geqslant 1$

$$\left.\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2}, \\ c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

L'expression

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

s'appelle *série trigonométrique de Fourier sous forme complexe*. Les coefficients c_n de cette série s'expriment par a_n et b_n à l'aide des égalités (4); mais il est facile d'établir aussi des formules directes pour ces coefficients. En effet, un calcul immédiat montre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m, \\ 2\pi & \text{pour } n = m. \end{cases}$$

C'est pourquoi, en multipliant l'égalité

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{5}$$

par e^{-imx} ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) et en intégrant, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx = 2\pi c_m,$$

c.-à-d.

$$c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

Le développement (5) est valable également pour les fonctions complexes à carré intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$. Autrement dit, les fonctions e^{inx} forment une base de l'espace $L_2[-\pi, \pi]$ des fonctions complexes ayant le carré du module intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$. Dans cet espace complexe les expressions (6) représentent les produits scalaires de f par e^{imx}.

En remplaçant les fonctions e^{imx} par $e^{i\frac{n\pi}{l}x}$, on peut étendre tout ce qui a été dit plus haut à l'espace $L_2[-l, l]$ des fonctions complexes sur un segment de longueur arbitraire $2l$.

4. Polynômes de Legendre. Les combinaisons linéaires des fonctions

$$1, x, x^2, \ldots \tag{7}$$

donnent l'ensemble de tous les polynômes. Par conséquent, le système (7) est complet dans l'espace L_2 des fonctions sur un segment quelconque [1]. En orthogonalisant le système (7) sur le segment $[-1, 1]$ relativement au produit scalaire

$$(f, g)=\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx,$$

nous obtiendrons un système orthogonal complet

$$Q_0(x), \quad Q_1(x), \quad Q_2(x), \quad \ldots,$$

où Q_n est un polynôme de degré n. Montrons que chacun des polynômes $Q_n(x)$ coïncide, à un facteur constant près, avec le polynôme

$$R_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

[1] La complétude du système des polynômes dans l'espace $L_2[a, b]$ des fonctions à carré intégrable sur un segment quelconque $[a, b]$ découle du théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes. Cf. n°2, § 2, chap. VIII.

En effet, premièrement, le système $\{R_n\}$ est orthogonal. Soit $n \geqslant m$. Comme

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = 0$$

pour tous les $k = 0, 1, \ldots, n-1$, en intégrant par parties, on obtient

$$\int_{-1}^{1} R_m(x)\, R_n(x)\, dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m\right](x^2-1)^n\, dx. \quad (8)$$

Si $m < n$, l'expression figurant sous le dernier signe d'intégration est identiquement nulle, ce qui prouve que le système $\{R_n\}$ est orthogonal.

Deuxièmement, il est clair que le polynôme R_n est de degré n, c.-à-d. que chaque R_n appartient au sous-espace engendré par les $n+1$ premiers éléments du système (7). Ainsi, les systèmes $\{R_n\}$ et $\{Q_n\}$ jouissent tous les deux des propriétés suivantes:

1) ils sont orthogonaux,

2) le n-ième élément du système appartient au sous-espace engendré par les éléments $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

Or, ces deux propriétés définissent chaque élément du système à un facteur numérique près (cf. théorème 1, § 4, chap. III). Cherchons maintenant les facteurs normalisants des polynômes $R_n(x)$. Pour $n = m$ l'égalité (8) donne

$$\int_{-1}^{1} R_n^2(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n\, dx =$$

$$= (2n\,!) \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = \frac{(n\,!)^2 \cdot 2^{2n+1}}{2n+1}\ ^{1)}.$$

Autrement dit, la norme du polynôme R_n est égale à $n!\, 2^n \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$. On en déduit que le système des polynômes

$$\frac{1}{n!\, 2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, R_n(x)$$

est non seulement orthogonal, mais encore normé.

[1]) La dernière intégrale peut être facilement calculée à l'aide des formules de récurrence ou par réduction à la fonction bêta.

Au lieu de ces polynômes normés on considère d'habitude les polynômes définis par la formule

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

On les appelle *polynômes de Legendre*, la formule étant appelée *formule de Rodrigues*. Des calculs effectués il résulte que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{pour } n = m. \end{cases}$$

Voici les expressions explicites des cinq premiers polynômes de Legendre:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2},$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x,$$
$$P_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}.$$

Le développement d'une fonction f sur le segment $[-1, 1]$ suivant les polynômes de Legendre a la forme suivante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

où

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx.$$

5. Systèmes orthogonaux dans un produit d'espaces. Séries de Fourier multiples. Soient X' et X'' deux ensembles, sur lesquels sont définies les mesures μ' et μ''. Désignons les espaces des fonctions à carré intégrable sur ces ensembles respectivement par L_2' et L_2''. Sur le produit

$$X = X' \times X''$$

considérons la mesure

$$\mu = \mu' \times \mu''$$

et désignons par L_2 l'espace correspondant des fonctions à carré intégrable. Les fonctions de L_2 seront considérées comme fonctions de deux variables.

Théorème 1. *Si* $\{\psi_m\}$ *et* $\{\psi_n\}$ *sont des systèmes orthonormés complets dans* L_2' *et* L_2'' *respectivement, alors l'ensemble de tous les produits*

$$f_{mn}(x, y) = \varphi_m(x)\,\psi_n(y)$$

est un système orthonormé complet dans L_2.

Démonstration. En vertu de la remarque concernant le théorème de Fubini (nº 4, § 6, chap. V) on a

$$\int\limits_X f_{mn}^2(x, y)\,d\mu = \int\limits_{X'} \varphi_m^2(x)\left(\int\limits_{X''} \psi_n^2(y)\,d\mu''\right) d\mu' = 1.$$

Si $m \neq m_1$, d'après le même théorème on a

$$\int\limits_X f_{mn}(x, y)\,f_{m_1n_1}(x, y)\,d\mu =$$

$$= \int\limits_{X''} \psi_n(y)\,\psi_{n_1}(y)\left(\int\limits_{X'} \varphi_m(x)\,\varphi_{m_1}(x)\,d\mu'\right) d\mu'' = 0,$$

car la fonction de deux variables $f_{mn}(x, y)\,f_{m_1n_1}(x, y)$ est sommable sur $X = X' \times X''$.

Si $m = m_1$, mais $n \neq n_1$, on a

$$\int\limits_X f_{mn}(x, y)\,f_{m_1n_1}(x, y)\,d\mu = \int\limits_{X'} \varphi_m^2(x)\left(\int\limits_{X''} \psi_n(y)\,\psi_{n_1}(y)\,d\mu''\right) d\mu' = 0.$$

Démontrons que le système $\{f_{mn}\}$ est complet. Supposons que dans L_2 il existe une fonction f orthogonale à toutes les fonctions f_{mn}. Posons

$$F_m(y) = \int\limits_{X'} f(x, y)\,\varphi_m(x)\,d\mu'.$$

Il est aisé de voir que la fonction $F_m(y)$ est à carré intégrable. Par suite, la fonction $F_m(y)\,\psi_n(y)$ est intégrable pour tout n. En appliquant de nouveau le théorème de Fubini, on obtient

$$\int\limits_{X''} F_m(y)\,\psi_n(y)\,d\mu'' = \int\limits_X f(x, y)\,f_{mn}(x, y)\,d\mu = 0.$$

Comme le système $\{\psi_n\}$ est complet, on en déduit que $F_m(y) = 0$ pour presque tous les y. Mais alors pour presque chaque y on a

$$\int\limits_{X'} f(x, y)\,\varphi_m(x)\,d\mu' = 0,$$

quel que soit m. En vertu de la complétude du système $\{\varphi_m\}$, on en déduit que pour presque tout y l'ensemble des x tels que $f(x, y) \neq 0$

est de mesure nulle. D'après le théorème de Fubini, cela signifie que la fonction $f(x, y)$ est nulle presque partout sur X.

Le théorème est démontré.

Appliquons ce théorème à quelques systèmes orthogonaux concrets. Dans l'espace des fonctions de deux variables

$$f(x, y) \ (-\pi \leqslant x, \ y \leqslant \pi)$$

à carré intégrable un système orthogonal complet est constitué par les produits de chaque élément du système

$$1, \ \cos mx, \ \sin mx \ (m = 1, 2, \dots)$$

par chaque élément du système

$$1, \ \cos ny, \ \sin ny \ (n = 1, 2, \dots),$$

c.-à-d. par les fonctions

$$1, \ \cos mx, \ \sin mx, \ \cos ny, \ \sin ny, \ \cos mx \sin ny,$$
$$\cos mx \cos ny, \ \sin mx \sin ny, \ \sin mx \cos ny.$$

La série de Fourier correspondante a l'air un peu compliqué, c'est pourquoi il est commode d'employer dans ce cas les fonctions exponentielles

$$e^{imx} \cdot e^{iny} = e^{i(mx+ny)} \quad (n, \ m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \dots).$$

A cette base correspond la série de Fourier

$$f(x, y) = \sum_{m, \, n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

où

$$c_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \, e^{-i(mx+ny)} \, dx \, dy.$$

Dans l'espace des fonctions définies sur le carré

$$-1 \leqslant x, \quad y \leqslant 1,$$

les polynômes de Legendre donnent le système orthonormé complet, formé par les polynômes

$$Q_{mn}(x, y) = \frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{m! \, n! \, 2^{m+n+1}} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \frac{d^n}{dy^n} (y^2 - 1)^n.$$

Tout ce qu'on vient de dire s'étend évidemment aux fonctions de plusieurs variables. En particulier, la série trigonométrique de Fourier d'une fonction de k variables a la forme suivante:

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k = -\infty}^{\infty} c_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)},$$

où

$$c_{n_1 \ldots n_k} = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \ldots, x_h)\, e^{-i(n_1x_1+\ldots+n_kx_k)}\, dx_1 \ldots dx_h.$$

6. Polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné. Nous avons obtenu les polynômes de Legendre, en orthogonalisant les fonctions

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \qquad (9)$$

relativement au produit scalaire

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

qui correspond à la mesure habituelle de Lebesgue sur le segment [—1, 1]. Soit μ une autre mesure sur ce segment, telle que les fonctions (9) dans l'espace correspondant L_2 avec le produit scalaire

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, d\mu$$

soient linéairement indépendantes. Alors en appliquant au système (9) le procédé d'orthogonalisation, nous obtiendrons un nouveau système de polynômes $\{Q_n\}$ qui dépend en général du choix de la mesure μ. Supposons que la mesure μ soit définie pour les sous-ensembles du segment [—1, 1], mesurables au sens de Lebesgue, par la formule

$$\mu(E) = \int_E g(x)\, dx, \qquad (10)$$

où g est une fonction fixée non négative et sommable. La condition d'orthonormalité

$$(Q_m, Q_n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = n, \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases}$$

dans ce cas s'écrit sous la forme

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, g(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = n, \\ 0 & \text{pour } m \neq n. \end{cases} \qquad (11)$$

La fonction g, à l'aide de laquelle on définit la mesure (10), est appelée *poids* ou *fonction de poids.* En ce qui concerne les polynômes qui vérifient la condition (11), on dit qu'ils sont *orthogonaux par rapport au poids g.* Le choix du poids conduit chaque fois à des

nouveaux systèmes de polynômes. En particulier, pour

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

on obtient des polynômes qui coïncident, à un facteur constant près, avec les *polynômes de Tchébychev*

$$T_n(x) = \cos n \arccos x \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

qui jouent un rôle important dans divers problèmes d'interpolation.

L'orthogonalité de ces polynômes par rapport au poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est facile à vérifier. En effet, posons

$$x = \cos\theta, \quad dx = -\sin\theta d\theta, \quad \sqrt{1-x^2} = \sin\theta$$

et nous aurons

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta\, d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pour } m=n, \\ 0 & \text{pour } m \neq n. \end{cases}$$

7. Base orthogonale dans l'espace $L_2(-\infty, \infty)$. Fonctions d'Hermite. Plus haut nous avons considéré des systèmes orthogonaux sur un segment, c.-à-d. sur un ensemble de mesure finie. Considérons maintenant le cas d'un espace de mesure infinie, plus précisément, le cas de l'espace $L_2(-\infty, \infty)$ des fonctions à carré intégrable sur toute la droite numérique. Dans cet espace on ne peut pas construire un système orthogonal de fonctions à partir des polynômes ou des fonctions trigonométriques, car ni les uns ni les autres ne lui appartiennent. Il est naturel de chercher « la matière » pour construire une base dans $L_2(-\infty, \infty)$ parmi les fonctions qui décroissent suffisamment vite à l'infini. En particulier, une telle base peut être obtenue par orthogonalisation de la suite

$$x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

En effet, toute fonction de la forme $P(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, où P est un polynôme, appartient évidemment à $L_2(-\infty, \infty)$; la complétude du système (12) sera démontrée au nº 3, § 4, chap. VIII.

En appliquant aux fonctions $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ le procédé d'orthogonalication, on obtient un système de fonctions de la forme

$$\varphi_n(x) = H_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

où H_n est un polynôme de degré n. Ces polynômes s'appellent *polynômes d'Hermite* et les fonctions φ_n s'appellent *fonctions d'Hermite*. Il est facile de montrer que les polynômes d'Hermite coïncident,

à un facteur constant près, avec les polynômes

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

En effet, le polynôme H_n^* est, évidemment, de degré n et la condition d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m^*(x) H_n^*(x) e^{-x^2} dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

est facile à vérifier par intégration par parties. En vertu du théorème de l'orthogonalisation, il n'existe, à des facteurs constants près, qu'un seul système orthogonal de fonctions de la forme $P_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, où P_n est un polynôme de degré n.

Le résultat obtenu admet encore l'interprétation suivante. Considérons sur la droite numérique une mesure μ de densité e^{-x^2}, c.-à-d. telle que

$$d\mu = e^{-x^2} dx.$$

Cette mesure est finie. Dans l'espace des fonctions à carré intégrable pour cette mesure, le produit scalaire est défini par la formule

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-x^2} dx;$$

les polynômes d'Hermite forment dans cet espace un système orthogonal.

Considérons, enfin, l'espace $L_2(0, \infty)$ des fonctions à carré intégrable sur une demi-droite. Prenons dans cet espace le système des fonctions

$$x^n e^{-x} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En appliquant à ce système le procédé d'orthogonalisation, on obtient le système des fonctions

$$L_n(x)e^{-x}$$

que l'on appelle *fonctions de Laguerre*.

Les polynômes correspondants L_n s'appellent *polynômes de Laguerre*. Les polynômes de Laguerre peuvent être considérés comme une base orthogonale de l'espace des fonctions ayant le carré intégrable sur la demi-droite $(0, \infty)$ par rapport à la mesure

$$d\mu = e^{-x} dx.$$

Au n° 3, § 4, chap. VIII, il sera démontré que le système des fonctions de Laguerre est complet dans $L_2(0, \infty)$.

8. Polynômes orthogonaux par rapport à un poids discret. Considérons sur la droite réelle $n+1$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$, affectés des « poids » $p_0, p_1, \ldots, p_n$, où p_i sont des nombres positifs, et la mesure μ est définie par la formule

$$\mu(E) = \sum_{x_k \in E} p_k.$$

Autrement dit, la mesure $\mu(E)$ est égale à la somme des poids de tous les points x_k appartenant à E. Pour cette mesure « dégénérée » tous les ensembles de points de la droite réelle, ainsi que toutes les fonctions définies sur cette droite, sont mesurables et tout ensemble E qui ne contient aucun point x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ est de mesure nulle. Dans ces conditions, l'intégrale d'une fonction f sur la droite réelle toute entière est égale à

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k)$$

et le produit scalaire de deux fonctions est défini par la formule

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k)\, g(x_k).$$

Il est évident que deux fonctions f et g sont équivalentes par rapport à la mesure μ si et seulement si

$$f(x_k) = g(x_k)$$

en tous les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Dans ce cas trivial le problème de la meilleure approximation au sens de la distance sur L_2 se réduit à la détermination des sommes

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m$$

qui rendent minimale l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \left\{f(x_k) - \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x_k)\right\}^2,$$

c.-à-d. au problème de « l'interpolation par la méthode des moindres carrés ».

En partant du problème de l'interpolation par la méthode des moindres carrés au moyen des polynômes de degré donné, P. L. Tchébychev a développé la théorie des polynômes orthogonaux. Pour exposer les résultats de Tchébychev sur ce sujet, remarquons que le système

$$1, x, x^2, \ldots, x^n \tag{13}$$

est linéairement indépendant pour la mesure choisie μ, car le produit scalaire (x^r, x^s) s'exprime par la formule

$$(x^r, x^s) = \sum_{k=0}^{n} p_k x_k^{r+s}$$

et le déterminant de Gram du système (13) est [1])

$$\begin{vmatrix} \sum p_k & \sum p_k x_k & \sum p_k x_k^2 & \ldots \sum p_k x_k^n \\ \sum p_k x_k & \sum p_k x_k^2 & \sum p_k x_k^3 & \ldots \sum p_k x_k^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum p_k x_k^n & \sum p_k x_k^{n+1} & \sum p_k x_k^{n+2} & \ldots \sum p_k x_k^{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{p_0} & \sqrt{p_1} & \ldots \sqrt{p_n} \\ \sqrt{p_0 x_0} & \sqrt{p_1 x_1} & \ldots \sqrt{p_n x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sqrt{p_0 x_0^n} & \sqrt{p_1 x_1^n} & \ldots \sqrt{p_n x_n^n} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= p_0 p_1 \ldots p_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}^2 \neq 0.$$

D'autre part, si $r > n$, x^r dépend linéairement des fonctions du système (13), car dans notre cas L_2 est de dimension $n + 1$. C'est pourquoi le procédé d'orthogonalisation conduit à un système fini de polynômes

$$P_0, P_1, \ldots, P_n,$$

orthonormés en ce sens que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k P_r(x_k) P_s(x_k) = \delta_{rs}$$

et tels que chaque fonction f admet le développement en série finie

$$f \sim \sum_{r=0}^{n} c_r P_r$$

avec

$$c_r = \sum_{k=0}^{n} p_k P_r(x_k) f(x_k).$$

Aux points x_k on a les égalités

$$f(x_k) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

[1]) Les sommes sont prises sur k de 0 à n.

autrement dit, la somme complète de la série n'est autre que le polynôme d'interpolation de Lagrange. Les sommes incomplètes

$$Q_m = \sum_{r=0}^{m} c_r P_r \qquad (m < n)$$

sont des polynômes de degré m qui donnent la meilleure approximation de la fonction f aux points x_k en ce sens que l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \{f(x_k) - Q_m(x_k)\}^2$$

est pour Q_m moindre que pour tout autre polynôme du même degré m.

9. **Systèmes de Haar, de Rademacher et de Walsh.** Considérons un exemple de système complet de fonctions sur le segment [0, 1], construit par Haar. Ce système est formé par la fonction

$$\varphi_0 = 1$$

et les suites

$$\begin{array}{l} \varphi_{01}, \\ \varphi_{11},\ \varphi_{12}, \\ \varphi_{21},\ \varphi_{22},\ \varphi_{23},\ \varphi_{24}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n1},\ \varphi_{n2},\ \ldots,\ \varphi_{n2^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

(la n-ième suite contient 2^n fonctions), où

$$\varphi_{01} = \begin{cases} +1, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

$$\varphi_{11} = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 < x < \frac{1}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \qquad \varphi_{12} = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}, & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ -\sqrt{2}, & \frac{3}{4} < x < 1 \end{cases}$$

ou, plus généralement,

$$\varphi_{ni} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \frac{i-1}{2^n} < x < \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n/2}, & \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{i}{2^n}, \\ 0, & x \notin \left[\frac{i-1}{2^n} ; \frac{i}{2^n}\right] \end{cases}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots,; \ i = 1, 2, \ldots, 2^n).$$

Il est aisé de voir que le système ainsi construit est orthonormé. Démontrons qu'il est complet.

Partageons le segment [0, 1] en 2^{n+1} intervalles égaux Δ_i et considérons l'ensemble M_{n+1} de toutes les fonctions à valeur constante sur chacun des intervalles Δ_i. Il est évident que M_{n+1} est un espace vectoriel de dimension 2^{n+1}. En outre, toutes les fonctions du système considéré jusqu'à la n-ième suite inclusivement appartiennent à M_{n+1}. En vertu de l'orthonormalité du système en question, les fonctions de ce système sont linéairement indépendantes. Comme, en outre, le nombre de ces fonctions est

$$1+\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}.$$

elles forment dans M_{n+1} un système complet de vecteurs linéairement indépendants. Compte tenu du fait que toute fonction continue peut être approchée avec la précision que l'on veut par une fonction de M_{n+1} (pour n suffisamment grand), on en déduit que le système considéré est complet.

Considérons encore un exemple de système orthonormé de fonctions sur le segment [0, 1], dû à Rademacher. Posons

$$\varphi_m = (-1)^{[2^m x]}.$$

Autrement dit, la fonction φ_m s'obtient de la façon suivante: on divise le segment [0, 1] en 2^m parties égales Δ_i et on attribue à la fonction φ_m sur les intervalles Δ_i ($i = 1, \ldots, 2^m$) à tour de rôle les valeurs $+1$ et -1.

L'orthonormalité du système

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{14}$$

est évidente. Mais ce système n'est pas complet. Ceci résulte, par exemple, du fait que la fonction

$$\varphi_{12} = \varphi_1\varphi_2 = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 < x < \frac{1}{4} \text{ ou } \frac{3}{4} < x < 1, \\ -1, \text{ si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

est orthogonale à toutes les fonctions du système (14). Tout de même, il peut être élargi jusqu'à un système orthonormé complet, si l'on lui ajoute les fonctions de la forme

$$\varphi_{m_1 m_2 \ldots m_k} = \varphi_{m_1}\varphi_{m_2} \cdots \varphi_{m_k}$$
$$(0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_k). \tag{15}$$

Il est évident que le système ainsi élargi, appelé système de Walsh, reste orthonormé. Mais il est en outre complet. La démonstration de ce fait est analogue à la démonstration de la complétude du système de Haar.

Séries trigonométriques. Transformation de Fourier

§ 1. Conditions de convergence de la série de Fourier

1. Conditions suffisantes de convergence de la série de Fourier en un point. Considérons de nouveau l'espace $L_2[-\pi, \pi]$ des fonctions à carré sommable sur le segment $[-\pi, \pi]$. Comme cela a été montré au chap. VII, c'est un espace euclidien complet de dimension infinie, c.-à-d. un espace de Hilbert. Les fonctions

$$1, \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

forment dans cet espace un système orthogonal complet. De ce fait pour toute fonction $f \in L_2[-\pi, \pi]$ la série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \end{aligned} \tag{3}$$

converge vers f en moyenne quadratique, c.-à-d. au sens de la métrique de l'espace $L_2[-\pi, \pi]$. Cependant, eu égard à l'application des séries de Fourier aux problèmes de la physique mathématique et à d'autres questions, il est important de savoir les conditions assurant la convergence de la série de Fourier vers f non seulement en moyenne, mais aussi en un point donné, partout et même uniformément. Nous établirons ici les conditions suffisantes pour qu'une série trigonométrique soit convergente en un point donné. Commençons par quelques remarques préliminaires.

Au lieu des fonctions données sur le segment $[-\pi, \pi]$ nous pouvons parler des fonctions périodiques de période 2π sur la droite numérique toute entière, car toute fonction donnée sur un segment peut être prolongée périodiquement. D'autre part, les fonctions qui constituent le système trigonométrique sont bornées, de sorte que les formules (3) définissant les coefficients de Fourier par rapport

à ce système ont un sens pour toute fonction s o m m a b l e [1]) (et non seulement pour les fonctions à carré sommable). Donc, à chaque fonction $f \in L_1 [-\pi, \pi]$ on peut associer ses coefficients de Fourier et sa série de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Passons maintenant au problème de la convergence de cette série en un point donné x vers la valeur de la fonction f en ce point. Posons

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{4}$$

Modifions d'abord $S_n(x)$, en remplaçant dans (4) les coefficients a_k et b_k par leurs expressions intégrales (3). En désignant la variable d'intégration par t, nous obtiendrons

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right\} dt.$$

En utilisant la formule bien connue [2])

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos nu = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}}, \tag{5}$$

nous aurons

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} (t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt. \tag{6}$$

---

[1]) Pour une fonction sommable arbitraire, nous ne faisons, bien sûr, aucune hypothèse concernant la convergence de la série (2).

[2]) Pour obtenir cette formule, il suffit d'additionner membre à membre les égalités

$$\sin \frac{u}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{u}{2},$$

$$\sin \frac{3u}{2} - \sin \frac{u}{2} = \cos u \cdot 2 \sin \frac{u}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin \frac{2n+1}{2} u - \sin \frac{2n-1}{2} u = \cos nu \cdot 2 \sin \frac{u}{2}.$$

Cette expression de $S_n(x)$, ainsi que ses diverses variantes, s'appellent *intégrale de Dirichlet.*

Effectuons un changement de variable, en posant $t - x = z$. Comme la fonction figurant dans (6) sous le signe d'intégration est périodique de période 2π, l'intégrale de cette fonction sur tout segment de longueur 2π a la même valeur. Pour cette raison, en intégrant par rapport à la nouvelle variable z, nous pouvons garder les mêmes limites: $-\pi$ et π. Il vient

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz.$$

La fonction

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}}$$

s'appelle *noyau de Dirichlet.* De l'égalité (5) on déduit immédiatement que pour tout n on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\, dz = 1.$$

A l'aide de cette égalité, écrivons la différence $S_n(x) - f(x)$ sous la forme

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} dz. \tag{7}$$

Ainsi, nous avons ramené le problème de la convergence de $S_n(x)$ vers $f(x)$ à celui de la convergence de l'intégrale (7) vers zéro. L'étude de cette intégrale est basée sur le lemme suivant.

L e m m e 1. *Si la fonction* φ *est sommable sur le segment* $[a, b]$, *alors*

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Si la fonction φ est continûment dérivable, à l'aide de l'intégration par parties on obtient que pour $p \to \infty$

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx = -\varphi(x) \frac{\cos px}{p} \Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos px}{p} dx \to 0. \tag{8}$$

Soit maintenant φ une fonction arbitraire, sommable sur $[a, b]$. Comme les fonctions continûment dérivables forment un ensemble partout dense dans $L_1[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continûment dérivable φ_ε telle que

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

D'autre part,

$$\left|\int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_a^b [\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)] \sin px\, dx\right| + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px\, dx\right|.$$

Le premier terme du second membre est inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ en vertu de (9); quant au second terme, il tend vers zéro pour $p \to \infty$, comme le montre la relation (8).

Le lemme est démontré.

Maintenant il est facile de démontrer la proposition suivante qui exprime une condition suffisante de convergence de la série de Fourier.

Théorème 1. *Si f est une fonction sommable et pour x fixé on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que l'intégrale*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| dt \tag{10}$$

existe, alors les sommes partielles S_n de la série de Fourier de f convergent en ce point x vers $f(x)$.

Démonstration. Ecrivons l'intégrale (7) sous la forme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}} \sin \frac{2n+1}{2} z\, dz. \tag{11}$$

Si la fonction

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z}$$

est intégrable (par rapport à z) de $-\delta$ à δ, elle est intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$ tout entier (car $f \in L_1[-\pi, \pi]$). Mais alors la fonction

$$\frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

est aussi intégrable; donc, à l'intégrale (11) on peut appliquer le lemme 1 qui prouve que cette intégrale tend vers zéro quand $n \to \infty$.

Le théorème est démontré.

Remarques. 1. La convergence de l'intégrale (10) est dite *condition de Dini*. Elle est réalisée, en particulier, si pour x donné la fonction f est continue et admet une dérivée finie ou au moins une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Les raisonnements faits lors de la démonstration du théorème 1 restent valables, si au lieu de la condition de Dini on exige la convergence des deux intégrales

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{f(x+z)-f(x-0)}{z}\,dz \quad \text{et} \quad \int_{0}^{\delta} \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\,dz, \tag{12}$$

où $f(x-0)$ et $f(x+0)$ sont les limites à gauche et à droite de la fonction f au point x (on suppose que x est un point de discontinuité de première espèce de la fonction f). En effet, la différence

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$$

peut être écrite sous la forme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [f(x+z)-f(x-0)]\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz + {}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+z)-f(x+0)]\,\frac{\sin\frac{2n+1}{1}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz;$$

si les intégrales (12) existent, ces expressions tendent vers zéro quand $n \to \infty$.

On en déduit les conditions suffisantes de convergence « globale » de la série de Fourier que l'on trouve habituellement dans les cours d'analyse.

Soit f une fonction bornée périodique de période 2π n'ayant que des discontinuités de première espèce. Alors si f a en chaque point une dérivée à gauche et une dérivée à droite [1]*, sa série de Fourier est partout convergente et a pour somme $f(x)$ en tout point de continuité et $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ en tout point de discontinuité de f.*

2. Le noyau de Dirichlet $D_n(z)$ qui a joué le rôle fondamental dans nos raisonnements est une fonction égale à $\frac{2n+1}{2\pi}$ pour $z=0$

[1]) Par dérivées à gauche et à droite en un point de discontinuité de première espèce on entend respectivement

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}.$$

et à oscillations rapides pour n grand (fig. 22). De ce fait, l'apport principal à la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\, D_n(z)\, dz$$

pour n grand est fourni par un voisinage aussi petit que l'on veut du point x. Pour les fonctions vérifiant la condition de Dini cet apport tend vers $f(x)$ quand $n \to \infty$. Ainsi, on peut dire que les noyaux de Dirichlet D_n forment une suite de fonctionnelles convergeant, en un certain sens, vers la fonction δ sur l'ensemble des fonctions f développables en série de Fourier convergente.

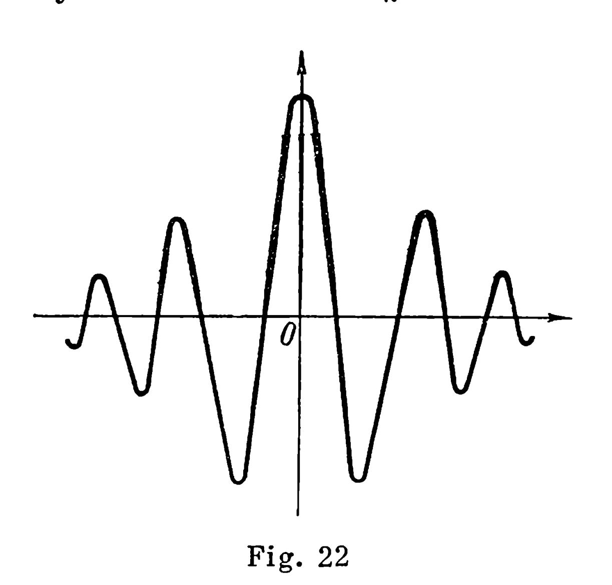


Fig. 22

Il est clair que la suite $\{D_n\}$ ne converge vers aucune limite au sens de la convergence habituelle; c'est pourquoi lors de l'étude de l'intégrale (7) nous n'avons pas pu nous servir des théorèmes usuels sur le passage à la limite sous le signe d'intégration.

3. La condition de Dini qui assure la convergence de la série de Fourier peut être remplacée par d'autres conditions, mais elle ne peut pas être simplement omise dans le théorème 1. En effet, même pour des fonctions *continues* la série de Fourier peut être divergente en certains points. Il existe des fonctions *sommables* dont la série de Fourier est divergente *partout* (A. N. Kolmogorov). En 1915 N. N. Lusin a posé le problème suivant: existe-t-il des fonctions de L_2 dont la série de Fourier soit divergente sur un ensemble de mesure positive? Comme l'a montré L. Carleson (en 1966), la réponse à cette question est négative.

Le fait qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier n'est pas convergente en tous les points découle facilement des théorèmes généraux sur la convergence faible des fonctionnelles. Remarquons tout d'abord que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|\, dz \to \infty, \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{13}$$

En effet, le numérateur de la fraction

$$|D_n(z)| = \frac{\left|\sin \frac{2n+1}{2} z\right|}{2\pi \left|\sin \frac{z}{2}\right|}$$

est égal à 1 aux points où

$$\frac{2n+1}{2} z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad k = 0, 1, \ldots n. \tag{14}$$

Entourons chaque point défini par la condition (14) d'un intervalle

$$\left|\frac{2n+1}{2} z - \frac{2k+1}{2}\pi\right| < \frac{\pi}{3}. \tag{15}$$

La longueur de chacun de ces intervalles est évidemment égale à $\frac{4\pi}{3(2n+1)}$. Sur chacun d'eux $\left|\sin \frac{2n+1}{2} z\right| \geqslant \frac{1}{2}$. Evaluons la valeur de $\sin \frac{z}{2}$ sur le k-ième intervalle ($k = 0, 1, \ldots, n$). On a

$$\sin \frac{z}{2} < \frac{z}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{2k+1}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{-1} < \frac{k+1}{2n+1}\pi.$$

On en déduit que l'intégrale de $|D_n(z)|$, prise seulement sur les intervalles définis par la condition (15), est plus grande que la somme

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{k+1}{2n+1}\pi} \cdot \frac{4\pi}{3(2n+1)} = \frac{1}{3\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Comme cette somme tend vers ∞ quand $n \to \infty$, on a la relation (13). Cette relation traduit le fait que les normes des fonctionnelles D_n sur l'espace des fonctions continues ne sont pas bornées dans leur ensemble. Mais alors, en vertu du théorème sur la convergence faible des fonctionnelles, cette suite ne peut pas être faiblement convergente sur l'espace des fonctions continues, c.-à-d. il existe des fonctions continues f pour lesquelles la limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(x)\, dx$$

n'existe pas.

2. Conditions de convergence uniforme de la série de Fourier. Nous avons établi les conditions suffisantes pour que la série de Fourier d'une fonction f soit convergente en chaque point. La classe des fonctions vérifiant ces conditions est assez vaste et même la continuité n'est pas nécessaire pour qu'une fonction soit représentable par la somme d'une série trigonométrique partout convergente. Il n'en est plus de même, lorsqu'il s'agit des conditions de conver-

gence uniforme de la série de Fourier. Il est clair que si la fonction f a au moins une discontinuité, sa série de Fourier ne peut pas converger uniformément vers $f(x)$, car la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est toujours continue. Ainsi, la continuité d'une fonction est nécessaire (mais, bien sûr, non suffisante) pour la convergence uniforme de sa série de Fourier.

Une condition suffisante simple est fournie par le théorème suivant.

Théorème 2. *Si la fonction périodique f de période 2π est absolument continue et sa dérivée f' appartient à $L_2[-\pi, \pi]$, la série de Fourier de f converge uniformément vers $f(x)$ sur toute la droite numérique.*

Démonstration. Désignons par a'_n et b'_n les coefficients de Fourier de la fonction f'. Comme la fonction f est absolument continue, à l'intégrale

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

on peut appliquer la formule de l'intégration par parties. On obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = -\frac{b'_n}{n};$$

de même,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{a'_n}{n}.$$

Par conséquent,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|b'_n|}{n} + \frac{|a'_n|}{n} \right). \quad (16)$$

Cette série est convergente, car

$$\frac{|b'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2} \left(b'^2_n + \frac{1}{n^2} \right), \quad \frac{|a'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2} \left(a'^2_n + \frac{1}{n^2} \right)$$

et $\sum_{n=1}^{\infty} (b'^2_n + a'^2_n) < \infty$ en vertu de l'inégalité de Bessel. La série numérique (16) est évidemment une série majorante de la

série de Fourier de f. Mais alors, d'après le critère de Weierstrass, la série de Fourier de f est uniformément (et absolument) convergente. Il reste à montrer que la somme de cette série est f. Soit φ la somme de la série de Fourier de f. Alors φ a les mêmes coefficients de Fourier que f. Comme les deux fonctions sont continues, on en déduit que $f = \varphi$.

On peut énoncer une autre condition de convergence uniforme de la série de Fourier, analogue à la condition de Dini:

Théorème 3. *Si une fonction sommable f est bornée sur un ensemble $E \subset [-\pi, \pi]$ et la condition de Dini est réalisée uniformément sur E, c.-à-d. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z)-f(x)|}{|z|} dz < \varepsilon$$

pour tous les $x \in E$ à la fois, alors la série de Fourier de f converge vers cette fonction uniformément sur E.

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant qui est un renforcement du lemme 1 (cf. page 403).

Lemme 2. *Si B est un ensemble de fonctions sommables, précompact pour la métrique de $L_1[-\pi, \pi]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que*

$$\left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt \right| < \varepsilon$$

pour $\lambda \geqslant N(\varepsilon)$ et pour tous les $f \in B$ à la fois.

Pour démontrer ce lemme, prenons dans B un $\frac{\varepsilon}{2}$-réseau fini $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ et choisissons N de façon que

$$\left| \int_a^b \varphi_i(t) \sin \lambda t \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

pour $\lambda \geqslant N$. Si maintenant f est une fonction arbitraire de B, alors pour un certain i on a

$$\| f - \varphi_i \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par conséquent,

$$\left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt \right| \leqslant \left| \int_a^b \varphi_i(t) \sin \lambda t \, dt \right| + \left| \int_a^b (f - \varphi_i) \sin \lambda t \, dt \right| < \varepsilon.$$

Le lemme est démontré.

L'application de ce lemme à la démonstration du théorème 3 est basée sur le fait facile à vérifier que l'ensemble des fonctions

$$\varphi_x(t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

est précompact. Les détails de cette démonstration sont laissés au lecteur.

Jusqu'à présent nous avons parlé des fonctions définies sur le segment $[-\pi, \pi]$. Il est clair que tout ce qui précède peut être automatiquement étendu aux fonctions définies sur un segment de longueur arbitraire $2l$.

Pour le cas des fonctions de plusieurs variables on peut également énoncer les conditions suffisantes pour que la série de Fourier soit convergente en chaque point, de même que les conditions de convergence uniforme de la série de Fourier. Nous ne nous étendrons pas sur cette question.

§ 2. Théorème de Fejér

1. Théorème de Fejér. Soit f une fonction continue périodique de période 2π sur la droite numérique. Elle est définie de façon unique par sa série de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{1}$$

En effet, si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues ayant les mêmes coefficients de Fourier, la différence $f_1 - f_2$ est une fonction continue, égale à zéro presque partout, donc identiquement nulle. Cependant, comme la série de Fourier d'une fonction continue n'est pas nécessairement convergente, nous ne pouvons pas obtenir une telle fonction f par simple sommation de sa série de Fourier. Une méthode de rétablissement d'une fonction continue à partir de sa série de Fourier est fournie par le théorème exposé ci-dessous, démontré en 1905 par Fejér.

Soit

$$S_k(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{k}(a_j\cos jx+b_j\sin jx) \tag{2}$$

une somme partielle de la série de Fourier de f. Posons

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_{n-1}(x)}{n}. \tag{3}$$

Les expressions σ_n (moyennes arithmétiques des sommes S_k) s'appellent *sommes de Fejér* de la fonction f.

Théorème 1 (de Fejér). *Si f est une fonction continue périodique de période 2π, la suite $\{\sigma_n\}$ de ses sommes de Fejér converge vers f uniformément sur toute la droite numérique.*

Démonstration. Utilisons les représentations intégrales des sommes partielles de la série de Fourier, obtenues dans le paragraphe précédent:

$$S_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2k+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\,dz.$$

En portant ces expressions dans l'égalité (3), on obtient pour $\sigma_n(x)$ l'expression suivante

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\right\}f(x+z)\,dz.$$

qui peut être réduite à l'aide de la formule [1])

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)z=\frac{\sin^2 nz}{\sin z}$$

à la forme suivante

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)f(x+z)\,dz, \tag{4}$$

appelée *intégrale de Fejér*. L'expression

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 \tag{5}$$

s'appelle *noyau de Fejér*. La formule (4) peut s'écrire sous la forme

$$\sigma_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\,\Phi_n(z)\,dz. \tag{6}$$

Il s'agit de démontrer que cette expression tend uniformément vers $f(x)$ quand $n\to\infty$. Notons préalablement les propriétés suivantes du noyau de Fejér:

1) $$\Phi_n(z)\geqslant 0,$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n z\,dz=1,$$

---

[1]) Cette formule s'obtient facilement, en sommant sur k les égalités

$$2\sin(2k+1)z\cdot\sin z=\cos 2kz-\cos 2(k+1)z.$$

3) pour tout $\delta > 0$ fixé et $n \to \infty$ on a

$$\int_{\pi}^{-\delta} \Phi_n(z)\,dz = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z)\,dz = \eta_n(\delta) \to 0.$$

La première de ces propriétés est évidente, la deuxième s'obtient de l'égalité (6), si l'on pose $f(x) \equiv 1$ et l'on tient compte du fait que pour cette fonction on a $\sigma_n(x) \equiv 1$, quel que soit n; enfin, la troisième propriété découle immédiatement du fait que si $\delta < z \leqslant \pi$, alors $\sin \frac{z}{2} \geqslant \frac{2\delta}{\pi}$ et, par conséquent,

$$\left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2.$$

Compte tenu de ces propriétés du noyau de Fejér, il est facile de démontrer le théorème. Comme la fonction f est continue et périodique, elle est bornée et uniformément continue sur toute la droite numérique. Autrement dit, il existe une constante M telle que pour tous les x on a

$$|f(x)| \leqslant M \tag{7}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x'' - x'| < \delta$$

implique

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Pour la démonstration du théorème il faut évaluer la différence

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)]\,\Phi_n(z)\,dz$$

qui peut être représentée par la somme des trois intégrales suivantes:

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,dz,$$

$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,dz,$$

$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} \{f(x) - f(x+z)\}\,\Phi_n(z)\,dz.$$

En vertu de (7) et (8), on obtient immédiatement les évaluations suivantes:

$$| J_- | \leqslant 2M\eta_n(\delta),$$

$$| J_+ | \leqslant 2M\eta_n(\delta),$$

$$| J_0 | \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z)\, dz < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons maintenant n_0 de façon que pour $n \geqslant n_0$ et δ donné on ait l'inégalité

$$2M\eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors

$$| f(x) - \sigma_n(x) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon;$$

comme ε est arbitrairement petit, on en déduit l'affirmation du théorème.

Notons que pour démontrer ce théorème nous n'avons utilisé que les propriétés 1)-3) du noyau de Fejér. Ceci permet d'obtenir diverses généralisations du théorème 1 (cf., en particulier, n° 3 de ce paragraphe).

2. Complétude du système trigonométrique. Théorème de Weierstrass. Du théorème de Fejér il résulte que le système trigonométrique est complet dans l'espace $L_2[-\pi, \pi]$. En effet, selon ce théorème toute fonction continue est la limite d'une suite uniformément convergente (et donc, convergente aussi en moyenne) de polynômes trigonométriques σ_n. Il reste à remarquer que les fonctions continues forment un ensemble partout dense dans L_2. Le théorème de Fejér peut être considéré comme un renforcement du théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes trigonométriques: ce dernier affirme que pour toute fonction continue et périodique il existe une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f, tandis que le théorème de Fejér indique une suite bien déterminée possédant cette propriété, à savoir la suite des sommes de Fejér (3). Du théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme d'une fonction continue et périodique par des polynômes trigonométriques on déduit facilement le deuxième théorème de Weierstrass, sur l'approximation de toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ par des polynômes algébriques. En effet, si $f(x)$ est une telle fonction, en posant $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, c.-à-d. $x = \frac{t(b-a)}{\pi} + a$, on obtient une fonction $\varphi(t)$ de t, définie sur le segment $[0, \pi]$. Prolongeons cette fonction d'abord à l'intervalle semi-ouvert $[-\pi, 0)$, en posant $\varphi(-t) = \varphi(t)$, et ensuite par périodicité à la droite numérique

toute entière. Construisons après cela un polynôme trigonométrique T_n tel que

$$|T_n(t)-\varphi(t)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ pour tous les } t.$$

Or, tout polynôme trigonométrique peut être développé en une série de Taylor uniformément convergente sur tout intervalle fini. Soit P_m une somme partielle de la série de Taylor de T_n, telle que

$$|T_n(t)-P_m(t)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

Alors

$$|\varphi(t)-P_m(t)|<\varepsilon \text{ pour } 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

Après le changement de variable inverse $t=\frac{x-a}{b-a}\pi$ dans $P_m(t)$ on obtient un polynôme $Q_m(x)$ vérifiant la condition

$$|f(x)-Q_m(x)|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

3. Théorème de Fejér dans l'espace L_1. Dans le théorème de Fejér l'hypothèse et la conclusion sont en quelque sorte symétriques. Du fait que la fonction f appartient à l'espace $C[-\pi, \pi]$ des fonctions continues il résulte que les sommes de Fejér qui lui correspondent convergent vers f au sens de la métrique du même espace $C[-\pi, \pi]$. Des théorèmes analogues peuvent être obtenus aussi pour d'autres espaces fonctionnels, en particulier, pour l'espace $L_1[-\pi, \pi]$. Plus précisément, on a le théorème suivant qu'il est naturel d'appeler théorème de Fejér pour les fonctions sommables:

Si f est une fonction sommable sur le segment $[-\pi, \pi]$, *ses sommes de Fejér convergent vers f par rapport à la norme de l'espace* $L_1[-\pi, \pi]$.

La démonstration de cette proposition peut être obtenue, moyennant des raisonnements pareils à ceux du n°1. Nous ne les reproduirons pas ici. Remarquons toutefois le fait important suivant qui résulte du théorème de Fejér pour les fonctions sommables.

Toute fonction sommable est définie de façon unique (à l'équivalence près) *par ses coefficients de Fourier.*

En effet, soient f et g deux fonctions sommables ayant les mêmes coefficients de Fourier. Alors tous les coefficients de Fourier de la fonction $f-g$ sont nuls. Par conséquent, toutes les sommes de Fejér de $f-g$ sont identiquement nulles. Mais alors leur limite dans L_1, c.-à-d. la fonction $f-g$ est nulle presque partout.

§ 3. Intégrale de Fourier

1. Théorème fondamental. Au § 1 nous avons établi les conditions pour qu'une fonction périodique soit représentable par une série de Fourier convergente, c.-à-d. par une superposition d'oscillations harmoniques. Essayons maintenant d'étendre ce résultat aux fonctions non périodiques. Nous verrons que sous des hypothèses supplémentaires assez générales une telle représentation est possible, seulement dans ce cas non par une série, mais par une intégrale, dite intégrale de Fourier.

Commençons par quelques considérations suggestives. Soit f une fonction vérifiant sur tout intervalle fini les conditions suffisantes pour qu'elle soit développable en série de Fourier. Autrement dit, on suppose que la fonction f est sommable sur tout intervalle fini et qu'elle vérifie en tout point la condition de Dini. En considérant la fonction f, par exemple, sur le segment $[-l, l]$, on peut écrire son développement en série de Fourier:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right). \tag{1}$$

Remplaçons ici a_k et b_k par leurs expressions:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,\quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\,dt,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi}{l}t\,dt.$$

Il vient

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}t\,dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}t\,dt\right)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{k\pi}{l}t+\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}t\right]dt,$$

c.-à-d.

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)\,dt. \tag{2}$$

Ajoutons aux hypothèses concernant la fonction f encore une: supposons cette fonction absolument intégrable sur toute la droite, c.-à-d.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty. \tag{3}$$

Passons maintenant (pour le moment, de façon purement formelle) dans l'égalité (2) à la limite pour $l\to\infty$. En vertu de la relation (3), le premier terme du second membre de (2) tend vers zéro quand $l\to\infty$. Le deuxième terme peut être considéré comme la somme

intégrale (étendue à un intervalle infini) de la fonction

$$F(\lambda)=\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

pour l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} F(\lambda)\,d\lambda,$$

si l'on pose $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ et $\Delta\lambda = \frac{\pi}{l}$. Par conséquent, le passage formel à la limite dans (2) pour $l \to \infty$ conduit à l'égalité suivante:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{4}$$

C'est précisément la représentation cherchée. Avec les notations

$$a_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt,$$

$$b_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$$

l'égalité (4) peut être écrite sous la forme suivante qui ressemble à la série de Fourier:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty} (a_\lambda\cos\lambda x+b_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda. \tag{5}$$

Nous avons obtenu l'égalité (4), appelée *formule de Fourier*, à l'aide du passage formel à la limite. On pourrait justifier ce passage (sous les hypothèses faites plus haut relativement à la fonction f), mais il est plus simple de donner une démonstration directe de l'égalité (4). Ainsi donc, démontrons le théorème suivant.

Théorème 1. *Si la fonction f est absolument intégrable sur toute la droite numérique et vérifie au point x la condition de Dini, on a*

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Démonstration. Posons

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{6}$$

Il s'agit de démontrer que $\lim\limits_{A\to\infty} J(A)$ existe et qu'elle est égale à $f(x)$. Puisque la fonction f est absolument intégrable, l'intégrale intérieure dans (6) est convergente et l'intégrale double est absolument convergente. En appliquant le théorème de Fubini, on intervertit les intégrations dans (6):

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_{0}^{A} f(t)\cos\lambda(t-x)\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt.$$

A l'aide du changement de variables $t-x=z$ réduisons cette intégrale à la forme

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+z)\frac{\sin Az}{z}\,dz. \qquad (7)$$

L'égalité bien connue

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Az}{z}\,dz=1 \qquad (A>0)$$

permet d'écrire la différence $J(A)-f(x)$ sous la forme

$$J(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\,dz. \qquad (8)$$

Décomposons l'intégrale du second membre en une somme de trois termes de la manière suivante:

$$J(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Az\,dz+\\+\frac{1}{\pi}\int_{|z|\geqslant N}\frac{f(x+z)}{z}\sin Az\,dz-\frac{f(x)}{\pi}\int_{|z|\geqslant N}\frac{\sin Az}{z}\,dz.$$

Les deux derniers termes de cette somme sont des intégrales uniformément convergentes pour $A\geqslant 1$ et chacune d'elles peut être rendue inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, si le nombre N est choisi suffisamment grand. En ce qui concerne le premier terme, (pour N fixé) il tend vers zéro, quand $A\to\infty$ (en vertu du lemme 1, § 1 et de la condition de Dini). Par conséquent, on a

$$\lim_{A\to\infty}(J(A)-f(x))=0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. L'intégrale de Fourier sous forme complexe. Dans la formule intégrale de Fourier (4) l'intégrale intérieure est une fonction paire

de λ, ce qui permet d'écrire cette formule sous la forme

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{9}$$

D'autre part, de l'intégrabilité abosolue de la fonction f il suit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt$ existe et apparaît comme une onction impaire de λ. Pour cette raison

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt=0 \tag{10}$$

(si l'intégrale par rapport à λ est conçue au sens de la valeur principale, c.-à-d. comme $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}$). En ajoutant à (9) l'égalité (10), multipliée par $-i$, on obtient

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\lambda(t-x)}\,dt.$$

Cette égalité sera appelée *formule complexe de Fourier.*

§ 4. Transformation de Fourier, propriétés et applications

1. Transformation de Fourier et formule d'inversion. La formule intégrale de Fourier peut être représentée sous forme de deux égalités. Posons

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt. \tag{1}$$

Alors

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda. \tag{2}$$

Remarquons que la formule (1) a un sens pour toute fonction absolument intégrable f. Elle définit une application, appelée *transformation de Fourier*, qui à chaque fonction $f\in L_1(-\infty,\infty)$ fait correspondre une fonction bien déterminée g, définie sur toute la droite numérique. La fonction g s'appelle *la transformée de Fourier* de la fonction initiale f.

La formule (2) qui exprime la fonction f par sa transformée de Fourier s'appelle *formule d'inversion* de la transformation de Fourier. On remarquera la ressemblance entre les formules (1) et (2). La deuxième ne diffère de la première que par le signe de l'exposant et par la présence du facteur $\frac{1}{2\pi}$ devant l'intégrale. On pourrait obtenir ici une plus grande symétrie, en définissant g par la formule

$$g(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{1'}$$

Alors la formule d'inversion aurait la forme

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda \tag{2'}$$

et les deux formules ne différeraient que par le signe de l'exposant de e.

Pourtant, malgré la ressemblance apparente des formules (1) et (2), elles sont, en fait, différentes : dans la première l'intégrale existe au sens habituel (car $f \in L_1(-\infty, \infty)$), tandis que dans la seconde l'intégrale n'existe qu'au sens de la valeur principale. En outre, l'égalité (1) représente la d é f i n i t i o n de la fonction g, tandis que l'égalité (2), qui n'est qu'une autre écriture de la formule intégrale de Fourier, renferme l'a f f i r m a t i o n que l'intégrale figurant dans son second membre est égale à la fonction initiale. Comme nous l'avons vu plus haut, pour assurer cette égalité, il faut imposer à f, outre l'intégrabilité, encore d'autres conditions, par exemple, la condition de Dini.

R e m a r q u e. Nous avons défini la transformée de Fourier g pour toute fonction f de $L_1(-\infty, \infty)$ et montré que la fonction f, vérifiant la condition de Dini en tout point, s'exprime à l'aide de la formule d'inversion par sa transformée de Fourier g. Cet état de choses est exactement le même que celui qui se présente dans le cas des séries de Fourier. En effet, l e s c o e f f i c i e n t s d e F o u r i e r

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

sont définis pour toute fonction $f \in L_1[-\pi, \pi]$, mais la convergence de l a s é r i e d e F o u r i e r

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(qui joue ici le rôle de la formule d'inversion) ne peut être assurée que pour certaines conditions supplémentaires (condition de Dini). D'autre part, pour la transformée de Fourier (de même que pour la série: cf. fin § 2) on a la proposition suivante: *si la fonction* $f \in L_1(-\infty, \infty)$ *est telle que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \equiv 0,$$

alors $f(x) = 0$ *presque partout.*

En effet, de l'égalité ci-dessus il résulte tout d'abord que quels que soient les réels t et λ, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, e^{-i\lambda x}\, dx = 0.$$

Posons maintenant

$$\varphi(x) = \int_{0}^{\xi} f(x+t)\, dt,$$

où ξ est un réel fixé arbitraire. En appliquant le théorème de Fubini et en utilisant la condition imposée à la fonction f, il est aisé de voir que la fonction φ (qui, comme f, appartient à $L_1(-\infty, \infty)$) satisfait à la même condition, c.-à-d. que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = 0$$

pour tout réel λ. Or, comme on le voit facilement, la fonction φ est absolument continue sur tout segment fini et, donc, admet presque partout une dérivée finie. En particulier, cette fonction vérifie presque partout la condition de Dini. Par conséquent, en vertu du théorème 1, § 3, elle est nulle presque partout, parce que sa transformée de Fourier est identiquement nulle. Comme la fonction φ est continue, on a donc $\varphi(x) \equiv 0$. Ceci implique, en particulier, que pour tout réel ξ on a

$$\int_{0}^{\xi} f(t)\, dt = 0$$

et, donc, $f(x) = 0$ presque partout.

Considérons maintenant quelques exemples.

1. Soit $f(x) = e^{-\gamma |x|}$, $\gamma > 0$. Cherchons la transformée de Fourier de cette fonction. On a

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma |x|} e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma |x|} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x)\, dx =$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-\gamma x} \cos \lambda x\, dx.$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient

$$g(\lambda) = \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}.$$

2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{pour } |x| > a. \end{cases}$$

Alors

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda}.$$

(Il importe de remarquer que la fonction g ici n'appartient pas à $L_1(-\infty, \infty)$.)

3. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$. Alors

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{dx}{x^2 + a^2}. \tag{3}$$

Le plus simple est de calculer cette intégrale par la méthode des résidus. Soit d'abord $\lambda > 0$. Juxtaposons à l'axe réel, sur lequel on prend l'intégrale (3), une demi-circonférence de rayon infiniment grand, située dans le demi-plan inférieur (c.-à-d. dans celui où l'exponentielle $e^{-i\lambda x}$ tend vers zéro). Alors l'intégrale (3) est égale à la somme des résidus de la fonction à intégrer, situés dans le demi-plan inférieur, multipliée par $(-2\pi i)$. Dans le demi-plan inférieur la fonction $\frac{e^{-i\lambda x}}{x^2 + a^2}$ n'a qu'un pôle simple au point $x = -ai$. Le résidu en ce point se trouve selon la règle connue suivante: *si* $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(a) \neq 0$ *et* $\psi(z)$ *a au point* $z = a$ *un zéro simple, le résidu de la fonction* f *au point* a *est égale à* $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. Dans notre cas on a

$$g(\lambda) = -2\pi i \cdot \frac{e^{-a\lambda}}{-2ai} = \frac{\pi e^{-a\lambda}}{a} \quad \text{pour} \quad \lambda > 0.$$

Pour $\lambda < 0$, en procédant de la même manière (le demi-plan inférieur étant remplacé par celui supérieur), on obtient

$$g(\lambda) = \frac{\pi e^{a\lambda}}{a}.$$

Donc, finalement on a

$$g(\lambda) = \frac{\pi e^{-a|\lambda|}}{a} \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

D'ailleurs, ce résultat peut être obtenu immédiatement par la formule d'inversion, en utilisant l'exemple 1 et le théorème 1, § 3.

4. Soit $f(x) = e^{-ax^2}$. Alors

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{4}$$

La fonction à intégrer ici est analytique, n'a pas de singularité dans la partie finie du plan et tend vers zéro le long de toute droite parallèle à l'axe réel. Donc, en vertu du théorème de Cauchy, l'intégrale (4) ne change pas de valeur, si au lieu de la prendre sur l'axe réel, on la prend sur une droite quelconque $z = x + iy$ ($y = \text{const}$), parallèle à cet axe. Ainsi,

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} \cdot e^{-i\lambda(x+iy)}\, dx = e^{ay^2+\lambda y} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-2aixy-i\lambda x}\, dx =$$

$$= e^{ay^2+\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\lambda)}\, dx.$$

Choisissons une valeur constante de y de façon à faire disparaître la partie imaginaire de l'exposant de l'exponentielle à intégrer, c.-à-d. posons $y = -\frac{\lambda}{2a}$. Alors

$$g(\lambda) = e^{a\frac{\lambda^2}{4a^2} - \frac{\lambda^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

car

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

En particulier, si l'on prend $a = \frac{1}{2}$, on obtient

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad g(\lambda) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}},$$

c.-à-d. la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$ coïncide avec sa transformation de Fourier (à un facteur constant près).

2. Propriétés fondamentales de la transformation de Fourier. De la formule (1) qui définit la transformation de Fourier découle une série de propriétés de cette transformation que nous nous proposons d'étudier ici. Pour simplifier l'écriture nous désignerons la transformée de Fourier d'une fonction f par le symbole $F[f]$. Autrement dit, nous désignerons par F l'opérateur linéaire défini sur l'espace $L_1(-\infty, \infty)$ et faisant correspondre à toute fonction de cet espace sa transformée de Fourier [1]).

1. *Si une suite* $\{f_n\}$ *de fonctions de* $L_1(-\infty, \infty)$ *est convergente pour la métrique de l'espace* $L_1(-\infty, \infty)$, *la suite de leurs transformées de Fourier* $g_n = F[f_n]$ *est uniformément convergente sur toute la droite.*

Ceci résulte immédiatement de l'évaluation évidente:

$$|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx.$$

2. *La transformée de Fourier* g *d'une fonction absolument intégrable* f *est une fonction continue bornée tendant vers zéro quand* $|\lambda| \to \infty$.

En effet, grâce à l'évaluation

$$|g(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

on voit aussitôt que la fonction $g = F[f]$ est bornée. Si f est la fonction caractéristique de l'intervalle (a, b), sa transformée de Fourier

$$g(\lambda) = \int_a^b e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}.$$

Cette fonction est évidemment continue et tend vers zéro quand $|\lambda| \to \infty$. Comme l'opération F de passage de f à g est linéaire, on en déduit que la transformée de Fourier de toute fonction en escalier (c.-à-d. de toute combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'intervalles) est aussi une fonction continue tendant vers zéro pour $\lambda \to \pm\infty$. Or, l'ensemble des fonctions en escalier est partout dense dans $L_1(-\infty, \infty)$; donc, si $f \in L_1$, il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions en escalier convergeant vers f dans $L_1(-\infty, \infty)$. Mais alors, en vertu de la propriété 1, la suite des fonctions $g_n = F[f_n]$ converge uniformément sur toute la droite numérique vers la fonction $g = F[f]$. Par conséquent, la fonction limite g est aussi continue et tend vers zéro quand $|\lambda| \to \infty$.

[1]) N'appartenant pas, en général, à L_1.

Exercices. 1. Démontrer que la transformée de Fourier g d'une fonction absolument intégrable f est uniformément continue sur toute la droite numérique.

2. Soit B l'espace des fonctions uniformément continues sur $(-\infty, \infty)$ et tendant vers zéro à l'infini. Montrer que la transformation de Fourier F est un opérateur de $L_1(-\infty, \infty)$ dans B ayant pour norme 1 et vérifiant la condition $\operatorname{Ker} F = 0$.

3. *Si f est une fonction absolument continue sur tout intervalle fini et $f' \in L_1(-\infty, \infty)$, alors*

$$F[f'] = i\lambda F[f].$$

Donc, à la dérivation d'une fonction (sous les hypothèses indiquées ci-dessus) correspond la multiplication de sa transformée de Fourier par $i\lambda$.

En effet, une fonction absolument continue sur tout intervalle fini peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Du fait que la fonction f est absolument intégrable il résulte que le second membre de cette égalité a une limite quand $x \to \infty$ et quand $x \to -\infty$. Cette limite ne peut être que 0, car autrement la fonction f ne serait pas intégrable sur toute la droite numérique. En tenant compte de ce fait et en intégrant par parties, on obtient

$$F[f'](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= f(x)\, e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = i\lambda F[f](\lambda)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si la fonction f est telle que $f^{(k-1)}$ est absolument continue sur tout intervalle et $f, \ldots, f^{(k)} \in L_1(-\infty, \infty)$, par des raisonnements analogues on obtient

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f]. \tag{5}$$

4. *Liaison entre l'ordre de dérivabilité d'une fonction et la rapidité de décroissance à l'infini de sa transformée de Fourier.* En divisant les deux membres de (5) par $(i\lambda)^k$ et en tenant compte du fait que la transformée de Fourier tend toujours vers zéro à l'infini (propriété 2), on conclut que *si $f^{(k)}$ est absolument intégrable, alors*

$$|F[f]| = \frac{|F[f^k]|}{|\lambda|^k} \to 0,$$

c.-à-d. dans ces conditions $F[f]$ décroît à l'infini plus vite que $\frac{1}{|\lambda|^k}$. Donc, plus l'ordre de dérivabilité de f sur L_1 est grand, plus la décroissance de sa transformée de Fourier à l'infini est rapide.

5. *Si f'' existe et appartient à $L_1(-\infty, \infty)$, alors $F[f]$ est absolument intégrable.*

En effet, dans ces conditions $F[f]$ est bornée et décroît à l'infini plus vite que $\frac{1}{\lambda^2}$. D'où l'intégrabilité.

Plus haut (propriété 4) nous avons montré que plus la fonction f admet de dérivées, plus la décroissance de sa transformée de Fourier à l'infini est rapide. La proposition duale est également vraie, c.-à-d. plus la décroissance de f est rapide, plus sa transformée de Fourier est lisse. Plus précisément, on a la proposition suivante:

6. *Supposons la fonction $f(x)$ ainsi que $xf(x)$ absolument intégrables. Alors la fonction $g = F[f]$ est dérivable et*

$$g'(\lambda) = F[-ixf(x)]. \tag{6}$$

En effet, si l'on prend la dérivée de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

qui définit g par rapport au paramètre λ, on obtient l'intégrale

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

qui (en vertu de l'intégrabilité de la fonction $xf(x)$) converge uniformément par rapport à λ. Donc, la dérivée de la fonction g existe et on a (6).

Si f est telle que les fonctions $f(x)$, $xf(x)$, . . ., $x^pf(x)$ sont absolument intégrables, des raisonnements analogues montrent que la fonction g admet des dérivées successives jusqu'à l'ordre p inclusivement et

$$g^{(k)}(\lambda) = F[(-ix)^k f(x)] \qquad (k = 0, 1, \ldots, p).$$

7. Si l'on exige que la fonction f décroisse à l'infini encore plus vite, la fonction g devient encore plus lisse. De l'hypothèse que $x^pf(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ pour tous les p il résulte que la fonction g est indéfiniment dérivable. Supposons maintenant que $e^{\delta|x|}f(x) \in \in L_1(-\infty, \infty)$ pour un certain $\delta > 0$. Alors la fonction $g(\lambda)$ peut être prolongée analytiquement de l'axe réel λ à une bande du plan complexe $\zeta = \lambda + i\mu$ qui est d'autant plus large que la valeur de δ est plus grande. De toute façon, on peut affirmer que g est une

fonction analytique, si $|\mu| < \delta$. En effet, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\zeta}\, dx$$

est évidemment convergente pour $|\mu| < \delta$ et définit une fonction continue qui coïncide sur l'axe réel avec la transformée de Fourier de la fonction f. Le fait que pour $|\mu| < \delta$ cette fonction est dérivable au sens de la théorie des fonctions analytiques se démontre exactement comme la propriété 6.

3. Complétude des systèmes des fonctions d'Hermite et de Laguerre. En utilisant les considérations de l'alinéa précédent, on peut montrer que *si une fonction mesurable f est différente de zéro presque partout sur un intervalle (a, b), où $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, et vérifie presque partout sur cet intervalle la condition $|f(x)| \leqslant Ce^{-\delta|x|}$, où $\delta > 0$, alors le système des fonctions $\{x^n f(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ est complet dans l'espace $L_2(a, b)$*. Il s'ensuivra, en particulier, que les fonctions d'Hermite et de Laguerre forment des systèmes complets respectivement dans $L_2(-\infty, \infty)$ et $L_2(0, \infty)$ (cf. n°s 7 et 8, § 3, chap. VII).

Démontrons la proposition sur la complétude, énoncée plus haut. Supposons que le système $\{x^n f(x)\}$ ne soit pas complet. Alors, en vertu du théorème 4, n° 5, § 4, chap. III, il existe une fonction non nulle $h \in L_2(-\infty, \infty)$ telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, h(x)\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

(Dans le cas où l'espace considéré $L_2(a, b)$ est complexe, au lieu de $h(x)$ on doit écrire $\overline{h(x)}$). Il est clair que $fh \in L_1(a, b)$ et, qui plus est, $e^{\delta_1|x|} fh \in L_1(a, b)$ pour tout $\delta_1 < \delta$. Dans la suite il sera commode de supposer les fonctions $f(x)$ et $h(x)$ définies sur toute la droite numérique, en les prolongeant, au besoin, par zéro au-delà de (a, b). Soit g la transformée de Fourier de la fonction fh, c.-à-d.

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, h(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

D'après ce qui précède, la fonction g peut être prolongée analytiquement à la bande $|\operatorname{Im} \zeta| < \delta$. D'autre part, en vertu de la propriété 6, toutes les dérivées de cette fonction s'annulent pour $\lambda = 0$, de sorte que $g(\lambda) \equiv 0$. D'après la propriété d'unicité, démontrée au n° 1, on en déduit que $f(x)\, h(x) = 0$ presque partout et, par conséquent, $h(x) = 0$ presque partout, car $f(x)$ est presque partout différente de zéro. Or, ceci contredit l'hypothèse que h est une fonction non nulle. La contradiction obtenue prouve que le système $\{x^n f(x)\}$ est complet.

4. Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide. Puisque après le passage d'une fonction f à sa transformée de Fourier g les propriétés de dérivabilité et de décroissance à l'infini de la fonction changent de rôles, il est facile d'indiquer des classes naturelles de fonctions que la transformation de Fourier applique dans elles-mêmes.

Soit S_∞ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur la droite numérique dont chacune admet un système de constantes C_{pq} (dépendant de la fonction f et des nombres p, q) telles que

$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{pq}. \tag{7}$$

Montrons que si $f \in S_\infty$, on a de même $g = F[f] \in S_\infty$. De l'inégalité (7) il résulte tout d'abord que chacune des fonctions $x^p f^{(q)}(x)$ est absolument intégrable. En effet, comme l'inégalité (7) est vérifiée pour tous les p et q, on a

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqslant \frac{C_{p+2,\,q}}{x^2},$$

c.-à-d. la fonction $x^{p-2}f^{(q)}(x)$ décroît au moins aussi vite que $\frac{1}{x^2}$. Ceci implique, à son tour, que la fonction $F[f]$ admet des dérivées de tous les ordres. Enfin, d'après le n° 2, de la sommabilité de $f^{(q)}(x)$, $q = 1, 2, \ldots$, il résulte que $g = F[f]$ décroît à l'infini plus vite que $\frac{1}{|\lambda\;q}$. Considérons maintenant les fonctions

$$(i\lambda)^q g^{(p)}(\lambda) = (-i)^q F[(x^p f(x))^{(q)}];$$

chacune d'elles est majorée par une constante D_{pq}, comme transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Donc, si $f \in S_\infty$, on a également $g = F[f] \in S_\infty$. Réciproquement, soit $g \in S_\infty$; alors, d'après ce qu'on vient de démontrer, la fonction

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

appartient à S_∞. Posons $f(x) = \frac{1}{2\pi} f^*(-x)$. Il est clair que $f \in S_\infty$. D'autre part, selon la formule d'inversion, on a

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx,$$

c.-à-d. g est la transformée de Fourier de la fonction $f \in S_\infty$. Ainsi, la transformation de Fourier applique la classe S_∞ sur elle-même. Il est clair que cette application est biunivoque.

Exercice. Soit $f \in S_\infty$ et $\int_{\infty -}^{\infty} x^p f(x)\, dx = 0$ pour tous les $p \geqslant 0$. Résulte-t-il de là que $f(x) \equiv 0$?

5. Transformation de Fourier et convolution. Soient f_1 et f_2 deux fonctions intégrables sur toute la droite numérique. La fonction

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi$$

s'appelle *convolution* de f_1 et f_2. La fonction $f(x)$ est définie pour presque tous les x et intégrable. En effet, l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi\, dx$$

existe, parce que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\xi) f_2(\eta)|\, d\xi\, d\eta$$

existe (cf. remarque concernant le théorème de Fubini, page 312). Par conséquent, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi$$

existe aussi. La fonction f est notée $f_1 * f_2$. Cherchons la transformée de Fourier de la convolution de deux fonctions de L_1. En appliquant le théorème de Fubini et en posant $x - \xi = \eta$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi \right\} e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi) e^{-i\lambda x}\, dx \right\} d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\lambda\eta} e^{-i\lambda\xi}\, d\eta \right\} d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta) e^{-i\lambda\eta}\, d\eta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) e^{-i\lambda\xi}\, d\xi,$$

c.-à-d.

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2].$$

Ainsi, *la transformation de Fourier réduit l'opération de convolution à une opération plus simple : la multiplication des fonctions.* Ce résultat joue un rôle important dans de nombreuses applications de la transformation de Fourier.

6. Appication de la transformation de Fourier à l'équation de la chaleur. L'application de la transformation de Fourier aux équations différentielles est basée sur le fait (cf. n° 3) qu'elle réduit l'opération de dérivation à celle de multiplication par la variable indépendante. Ainsi, une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=\varphi(x) \tag{8}$$

se réduit au moyen de la transformation de Fourier à une équation *algébrique* de la forme

$$(i\lambda)^n z+a_1(i\lambda)^{n-1}z+\ldots+a_{n-1}i\lambda z+a_nz=\psi(\lambda), \tag{9}$$

où $z = F[y]$ et $\psi = F[\varphi]$. Cependant, lorsqu'il s'agit des équations différentielles ordinaires, ce procédé n'ouvre aucune perspective essentiellement nouvelle, car la résolution des équations linéaires à coefficients constants est en elle-même un problème qui ne présente pas de grande difficulté. En outre, le passage de (8) à (9) n'est possible que si la fonction inconnue $y = y(x)$ est intégrable sur toute la droite numérique, ce qui n'a pas toujours lieu pour les équations linéaires à coefficients constants.

L'importance de la transformation de Fourier est essentielle, lorsqu'elle est appliquée aux équations différentielles aux dérivées partielles; dans ce cas elle permet, sous certaines réserves, de réduire la résolution d'une telle équation à la résolution d'une équation différentielle ordinaire. Montrons ceci sur l'exemple du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur.

On va chercher la solution de l'équation

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{10}$$

définie pour $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$ et coïncidant pour $t = 0$ avec une fonction donnée $u_0(x)$. Le sens physique de ce problème est de trouver la température d'une barre calorifère illimitée à chaque instant $t > 0$, sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ sa température en chaque point est $u_0(x)$.

En supposant que les fonctions $u_0(x)$, $u_0'(x)$ et $u_0''(x)$ appartiennent à $L_1(-\infty, \infty)$, nous allons chercher la solution du problème posé parmi les fonctions $u(x, t)$ vérifiant les conditions suivantes:

1) les fonctions $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ sont absolument intégrables sur tout l'axe x pour tout $t \geqslant 0$ fixé;

2) la fonction $u_t(x, t)$ admet sur chaque intervalle fini $0 \leqslant t \leqslant T$ une majorante intégrable $f(x)$ (indépendante de t):

$$|u_t(x,t)|\leqslant f(x),\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx<\infty.$$

Appliquons à l'équation (10) la transformation de Fourier par rapport à x. Alors au second membre nous aurons

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\lambda^2 v(\lambda, t), \quad \text{où } v(\lambda, t) = F[u(x, t)];$$

quant au premier membre de cette équation, en vertu de la condition 2), il deviendra

$$F[u_t] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\lambda x}\, dx = v_t(\lambda, t).$$

Ainsi, la transformation de Fourier ramène l'équation (10) à l'équation différentielle ordinaire

$$v_t(\lambda, t) = -\lambda^2 v(\lambda, t)$$

dont il faut maintenant trouver la solution qui pour $t = 0$ coïncide avec la fonction

$$v_0(\lambda) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

La solution cherchée sera, évidemment,

$$v(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 t} v_0(\lambda).$$

Maintenant, pour obtenir la solution de notre problème initial, il suffit de trouver la fonction $u(x, t)$ dont la transformée de Fourier est $v(\lambda, t)$.

En utilisant l'exemple 4, n° 1, on obtient

$$e^{-\lambda^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right].$$

Donc,

$$v(\lambda, t) = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] \cdot F[u_0(x)] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right],$$

c.-à-d.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, u_0(x - \xi)\, d\xi.$$

L'intégrale obtenue s'appelle *intégrale de Poisson* pour l'équation de la chaleur.

7. Transformation de Fourier des fonctions de plusieurs variables. La notion de transformation de Fourier, considérée plus haut pour les fonctions d'une variable, s'étend facilement aux fonctions de plusieurs variables.

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction intégrable sur tout l'espace n-dimensionnel $\mathbf{R}^n$. Sa *transformée de Fourier* est par définition

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-i(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \ldots + x_n\lambda_n)}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Cette intégrale n-uple existe manifestement, car la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est intégrable; en vertu du théorème de Fubini elle peut s'écrire sous la forme suivante:

$$g(\lambda_1\lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-ix_1\lambda_1}\, dx_1 \right\} \times \times e^{-ix_2\lambda_2}\, dx_2 \ldots \right\} e^{-ix_n\lambda_n}\, dx_n. \qquad (11)$$

Autrement dit, le passage d'une fonction de n variables à sa transformée de Fourier peut être effectué successivement par rapport à chacune des variables (dans n'importe quel ordre). Par inversion successive des n opérations du second membre de (11), on obtient la formule

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\, e^{ix_n\lambda_n}\, d\lambda_n \right\} \times \times e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}\, d\lambda_{n-1} \ldots \right\} e^{ix_1\lambda_1}\, d\lambda_1.$$

Cette formule peut s'écrire sous la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \times \times e^{i(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \ldots + x_n\lambda_n)}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n; \qquad (12)$$

mais, puisque la fonction $g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ n'est pas nécessairement sommable sur l'espace $\mathbf{R}^n$ tout entier, il faut alors indiquer le sens qu'on doit attribuer à l'intégrale n-uple de (12), de même que les conditions pour que la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit représentable par cette intégrale.

L'une des réponses possibles à ces questions est donnée par le théorème suivant.

T h é o r è m e 1. *Soit* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *une fonction intégrable sur tout l'espace* $\mathbf{R}^n$ et *vérifiant les conditions*

$$\left.\begin{aligned}
&|f(x_1+t_1, x_2, \ldots, x_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\leqslant C|t_1|^a,\\
&|f(x_1, x_2+t_2, \ldots, x_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\leqslant C(x_1)|t_2|^a,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|f(x_1, x_2, \ldots, x_n+t_n)-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\leqslant\\
&\qquad\qquad\leqslant C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})|t_n|^a,\\
&\text{où}\\
&0<a\leqslant 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} C(x_1)\,dx_1<\infty, \ \ldots\\
&\ldots, \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}<\infty.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Alors la formule d'inversion (12) *est vraie, si par l'intégrale qu'elle contient on entend*

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{N_1\to\infty}\int_{-N_1}^{N_1}\left\{\ldots\lim_{N_{n-1}\to\infty}\int_{-N_{n-1}}^{N_{n-1}}\left\{\lim_{N_n\to\infty}\int_{-N_n}^{N_n} g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\, e^{ix_n\lambda_n}\,d\lambda_n\right\} e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}\,d\lambda_{n-1}\ldots\right\} e^{ix_1\lambda_1}\,d\lambda_1.$$

En effet, comme la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est sommable sur $\mathbf{R}^n$, en vertu du théorème de Fubini elle est sommable par rapport à x_1 pour presque tous les $x_2, \ldots, x_n$. Donc, la fonction

$$f_1(\lambda_1, x_2, \ldots, x_n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,e^{-ix_1\lambda_1}\,dx_1$$

existe. De (13) il résulte que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, comme fonction de x_1, vérifie les conditions du théorème 1, § 3; pour cette raison, la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut être exprimée par f_1 à l'aide de la formule d'inversion

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\lim_{N_1\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_1}^{N_1} f_1(\lambda_1, x_2, \ldots, x_n)\,e^{ix_1\lambda_1}\,d\lambda_1.$$

Ensuite, si l'on pose

$$f_2(\lambda_1, \lambda_2, x_3, \ldots, x_n)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda_1, x_2, \ldots, x_n)\,e^{-ix_2\lambda_2}\,dx_2,$$

alors de (13) il résulte que pour f_1 on a la formule d'inversion

$$f_1(\lambda_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{N_2 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, x_n)\, e^{ix_2\lambda_2}\, d\lambda_2,$$

c.-à-d.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_1}^{N_1} \left\{ \lim_{N_2 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, x_n)\, e^{ix_2\lambda_2}\, d\lambda_2 \right\} e^{ix_1\lambda_1}\, d\lambda_1.$$

En définissant de manière analogue $f_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, x_n)$, etc., nous aboutirons finalement à la formule (12).

La transformation de Fourier pour les fonctions de plusieurs variables est largement utilisée dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{14}$$

qui décrit le processus de propagation de la chaleur dans le plan. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ la température est donnée:

$$u(0, x, y) = u_0(x, y).$$

Si l'on impose à la solution cherchée des conditions analogues à celles du nº 6, dans (14) on peut effectuer la transformation de Fourier par rapport à x et y. Ceci conduit à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dv}{dt} = -(\lambda^2 + \sigma^2)\, v, \tag{15}$$

où

$$v(t, \lambda, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x, y)\, e^{-i(\lambda x + \sigma y)}\, dx\, dy.$$

Ayant résolu l'équation (15), on peut trouver ensuite la solution de l'équation initiale (14) à l'aide de la formule d'inversion.

§ 5. Transformation de Fourier dans l'espace $L_2(-\infty, \infty)$

1. Théorème de Plancherel. Revenons d'abord sur les résultats que nous avons obtenus pour les séries de Fourier. Pour plus d'analogie avec la transformation de Fourier, nous allons considérer la série de Fourier sous forme complexe, c.-à-d. nous prendrons sur le segment $[-\pi, \pi]$ le système orthogonal complet des fonctions e^{inx}, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et à chaque fonction f sommable sur

$[-\pi, \pi]$ nous ferons correspondre la suite de ses coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Si la fonction f est non seulement sommable, mais aussi à carré sommable, ses coefficients de Fourier vérifient la condition

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Autrement dit, le passage d'une fonction dont le carré est sommable à l'ensemble de ses coefficients de Fourier est une application de l'espace euclidien L_2 sur l'espace euclidien l_2; de plus, cette application est linéaire et vérifie la relation de Parseval:

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \tag{1}$$

(c.-à-d. ce passage ne diffère que par un facteur numérique d'une application conservant la norme).

Considérons maintenant la transformation de Fourier pour les fonctions données sur toute la droite numérique et voyons, s'il est possible ou non de traiter cette transformation comme un opérateur linéaire dans l'espace complexe $L_2(-\infty, \infty)$. La difficulté principale réside ici dans le fait qu'une fonction à carré sommable sur la droite numérique peut ne pas appartenir à $L_1(-\infty, \infty)$, c.-à-d. que pour une telle fonction la transformée de Fourier au sens de la définition du § 4 peut ne pas exister. Néanmoins, pour toute fonction $f \in L_2(-\infty, \infty)$ on peut définir la transformée de Fourier en un sens quelque peu différent. On obtient alors le théorème suivant qui peut être considéré comme l'analogue de la relation de Parseval (1).

Théorème (Plancherel, 1910). *Pour toute fonction $f \in L_2(-\infty, \infty)$ l'intégrale*

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

est, quel que soit N, une fonction de λ appartenant à $L_2(-\infty, \infty)$. Lorsque $N \to \infty$, la fonction g_N converge pour la métrique de l'espace L_2 vers une fonction limite g et on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2\, d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx. \tag{2}$$

Cette fonction g s'appelle transformée de Fourier de la fonction $f \in L_2$. Si f appartient aussi à $L_1(-\infty, \infty)$, la fonction correspondante g coïncide avec la transformée de Fourier de f au sens habituel.

Démonstration. L'idée principale de la démonstration consiste à démontrer l'égalité (2) d'abord pour toutes les fonctions appartenant à la famille S_∞ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide qui forment un ensemble partout dense dans $L_2(-\infty, \infty)$ et l'étendre ensuite par continuité à $L_2(-\infty, \infty)$ tout entier. Réalisons maintenant cette idée en détail.

1) Soit $f_1, f_2 \in S_\infty$. Désignons par g_1 et g_2 respectivement leurs transformées de Fourier. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda]\,\overline{f_2(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_1(\lambda) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx} \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\,\overline{g_2(\lambda)}\,d\lambda,$$

où l'interversion des intégrations est justifiée, car la fonction

$$g_1(\lambda)\overline{f_2(x)}\,e^{i\lambda x}$$

est absolument intégrable sur le plan (x, λ). En faisant dans l'égalité obtenue $f_1 = f_2 = f$ et $g_1 = g_2 = g$, on en déduit que la formule (2) est vraie pour toute fonction $f \in S_\infty$.

2) Soit à présent f une fonction quelconque de $L_2(-\infty, \infty)$, nulle en dehors d'un intervalle $(-a, a)$. Elle est alors intégrable sur $(-a, a)$ (c.-à-d. appartient à $L_1(-a, a)$) et donc, sur toute la droite numérique. On en déduit l'existence de sa transformée de Fourier

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx.$$

Soit maintenant $\{f_n\}$ une suite de fonctions de S_∞, nulles en dehors de $(-a, a)$, convergeant pour la norme de l'espace $L_2(-\infty, \infty)$ vers f. Puisque f et toutes les f_n sont différentes de zéro seulement sur un intervalle fini, la suite $\{f_n\}$ converge vers f aussi pour la norme de l'espace $L_1(-\infty, \infty)$. C'est pourquoi (cf. nº 2, § 4) la suite $\{g_n\}$ converge vers g uniformément sur toute la droite numérique. En outre, $\{g_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L_2(-\infty, \infty)$. En effet, $g_n - g_m \in S_\infty$; donc, en vertu de ce qu'on a déjà démontré,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2\,d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2\,dx,$$

d'où l'on conclut que $\{g_n\}$ est une suite de Cauchy. Ceci implique que cette suite est convergente dans L_2 et qu'elle a pour limite la même fonction g, vers laquelle elle converge uniformément. Par conséquent, dans l'égalité

$$\| f_n \|^2 = \frac{1}{2\pi} \| g_n \|^2$$

on peut passer à la limite pour $n \to \infty$. Ainsi donc, l'égalité (2) est vraie pour toute fonction $f \in L_2$, nulle en dehors d'un certain intervalle.

3) Soit, enfin, f une fonction arbitraire de L_2. Posons

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } |x| \leqslant N, \\ 0 & \text{pour } |x| > N. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\| f - f_N \| \to 0 \text{ pour } N \to \infty .$$

La fonction f_N appartient à $L_1(-\infty, \infty)$, ce qui implique l'existence de sa transformée de Fourier habituelle. Celle-ci est égale à

$$g_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Comme d'après la partie 2) de nos raisonnements

$$\| f_N - f_M \|^2 = \frac{1}{2\pi} \| g_N - g_M \|^2,$$

les fonctions g_N convergent dans L_2 vers une limite que nous désignerons par g. Donc, dans l'égalité

$$\| f_N \|^2 = \frac{1}{2\pi} \| g_N \|^2$$

on peut passer à la limite pour $N \to \infty$ et on obtient alors la relation (2) pour toute fonction $f \in L_2(-\infty, \infty)$.

La première partie du théorème de Plancherel est démontrée.

Si maintenant la fonction f appartient aux espaces $L_2(-\infty, \infty)$ et $L_1(-\infty, \infty)$ à la fois, sa transformée de Fourier

$$\tilde{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

existe au sens habituel. Dans ce cas les fonctions f_N convergent vers f dans $L_1(-\infty, \infty)$ et donc, leurs transformées de Fourier g_N convergent vers g uniformément. Or, d'autre part, nous avons démontré que les fonctions g_N convergent pour la métrique de $L_2(-\infty, \infty)$

vers une fonction que nous avons désignée par g. On en déduit que $\tilde{g}$ coïncide avec g.

La démonstration est achevée.

Corollaire. *De la relation* (2) *il résulte immédiatement que pour n'importe quelles deux fonctions* $f_1, f_2 \in L_2(-\infty, \infty)$ *on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,\overline{f_2(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\,\overline{g_2(\lambda)}\,d\lambda.$$

Pour la démonstration il suffit d'écrire l'égalité (2) pour la fonction $f_1 + f_2$ et comparer les expressions que l'on obtient aux deux membres. Si l'égalité (2) signifie que la transformation de Fourier conserve la norme dans L_2, la dernière égalité signifie qu'elle conserve le produit scalaire.

2. Fonctions d'Hermite. Le théorème de Plancherel, exposé au numéro précédent, montre que la transformation de Fourier peut être considérée comme un opérateur linéaire borné F appliquant l'espace $L_2(-\infty, \infty)$ sur lui-même. Si dans cet espace un système orthonormé complet est choisi, l'opérateur F (comme tout opérateur linéaire) peut s'écrire à l'aide d'une matrice infinie. La forme de cette matrice dépend, bien sûr, du choix de la base. La matrice correspondant à un opérateur est de la forme la plus simple dans le cas où la base choisie est constituée par les fonctions propres de l'opérateur donné: dans ce cas la matrice est diagonale. La question est de savoir, si une telle base existe pour la transformation de Fourier F. Autrement dit, il s'agit de savoir, quelles fonctions de $L_2(-\infty, \infty)$ sont propres pour la transformation de Fourier F? A cet effet, remarquons qu'en appliquant la transformation de Fourier à l'équation

$$\frac{d^2f}{dx^2} - x^2 f = \mu f, \tag{3}$$

on obtient une équation de la même forme[1] $\left(\text{car à l'opération } \frac{d^2}{dx^2}\right.$ correspond la multiplication par $-\lambda^2$ et à la multiplication par $-x^2$ correspond l'opération $\left.\frac{d^2}{d\lambda^2}\right)$. C'est pourquoi il est naturel de chercher les fonctions propres de l'opérateur F comme solutions de l'équation (3). Cherchons les solutions de cette équation, ayant la forme

$$f = we^{-\frac{x^2}{2}},$$

où w est un polynôme. En portant cette expression dans (3), on obtient pour w l'équation

$$w'' - 2xw' = (\mu + 1)\,w.$$

---

[1] On suppose, bien sûr, que la fonction inconnue f satisfait aux conditions nécessaires de dérivabilité et de décroissance à l'infini.

Si l'on pose

$$w = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \tag{4}$$

on est conduit à l'égalité

$$(2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} - \\ - 2x(a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}) = (\mu + 1)(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n).$$

En comparant les termes des deux membres de cette égalité qui contiennent les mêmes puissances de x, on obtient

$$-2na_n = (\mu + 1)a_n, \quad -2(n-1)a_{n-1} = (\mu + 1)a_{n-1}$$

et ainsi de suite ; d'une façon générale,

$$k(k-1)a_k - 2(k-2)a_{k-2} = (\mu + 1)a_{k-2}. \tag{5}$$

Puisque le coefficient dominant a_n est supposé différent de zéro, on doit avoir

$$\mu = -(2n+1) \quad \text{et} \quad a_{n-1} = 0,$$

c.-à-d. μ doit être un entier négatif impair. La relation (5) permet de déterminer tous les coefficients du polynôme w à un facteur constant près. En outre, les coefficients dont les indices sont de parité différente de celle du nombre n, c.-à-d. du degré de w, sont nuls. Par contre, tous les coefficients dont les indices ont la même parité que n sont différents de zéro. On les trouve à l'aide de la formule de récurrence

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4}a_k$$

(si a_n est donné). Donc, pour w on obtient la formule suivante:

$$w_n(x) = a_n\left(x^n - \frac{n(n-1)}{4}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 8}x^{n-4} - \dots\right).$$

Ainsi, nous avons construit le système des fonctions

$$\varphi_n(x) = w_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Il est clair que chacune de ces fonctions appartient à $L_2(-\infty, \infty)$ (grâce à la présence du facteur $e^{-\frac{x^2}{2}}$). De plus, ces fonctions sont deux à deux orthogonales. En effet, d'après (3), on a

$$\varphi_n''(x) - x^2\varphi_n(x) = -(2n+1)\varphi_n(x),$$

$$\varphi_m''(x) - x^2\varphi_m(x) = -(2m+1)\varphi_m(x).$$

En multipliant la première de ces égalités par φ_m et la deuxième par φ_n, faisons leur différence ; on obtient

$$\varphi_n''\varphi_m - \varphi_m''\varphi_n = 2(n-m)\varphi_n\varphi_m$$

ou

$$[\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n]' = 2(n-m)\varphi_n\varphi_m.$$

Si $m \neq n$, en intégrant cette égalité, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \frac{1}{2(n-m)} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n]'\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(n-m)} [\varphi_n'\varphi_m - \varphi_m'\varphi_n\,]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Ainsi, l'orthogonalité est démontrée.

Chacun des éléments φ_n du système orthogonal obtenu est un polynôme de degré n, multiplié par $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Par conséquent, les éléments de ce système doivent coïncider, à des facteurs constants près, avec les fonctions d'Hermite que nous avons construites au § 3, chap. VII, en orthogonalisant la suite

$$e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \ldots, \quad x^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \ldots$$

dans l'espace $L_2(-\infty, \infty)$.

Montrons à présent que $\{\varphi_n\}$ sont les fonctions propres de la transformation de Fourier:

$$F\varphi_n = c_n\varphi_n. \tag{6}$$

Ceci résulte des faits suivants:

1. L'équation (3) est invariante par rapport à la transformation F.

2. Pour chaque n l'équation (3) admet, à un facteur constant près, une seule solution de la forme $P_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, où P_n est un polynôme de degré n.

3. La transformation de Fourier, appliquée à $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, donne $\left(i\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} = Q_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, où Q_n est un polynôme de degré n (la dernière assertion est facile à vérifier par récurrence).

De l'égalité (6) il résulte que pour tout k entier on a

$$F^k\varphi_n = c_n^k\varphi_n.$$

Or, la transformation de Fourier, appliquée quatre fois, transforme toute fonction en elle-même, multipliée par $4\pi^2$. Donc,

$$c_n^4 = 4\pi^2,$$

c.-à-d. c_n ne peut prendre que les valeurs $\pm\sqrt{2\pi}$ et $\pm i\sqrt{2\pi}$.

Ainsi, *la transformation de Fourier F dans l'espace* $L_2(-\infty, \infty)$ *est un opérateur linéaire qui, dans la base constituée par les fonctions d'Hermite, est représenté par une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont de la forme* $\pm\sqrt{2\pi}$ *et* $\pm i\sqrt{2\pi}$ [1]).

§ 6. Transformation de Laplace

1. Définition et propriétés fondamentales de la transformation de Laplace. L'applicabilité de la transformation de Fourier aux équations différentielles est limitée de façon essentielle par le fait que cette transformation n'est définie que pour les fonctions sommables sur toute la droite numérique. En particulier, la transformation de Fourier n'est pas définie pour les fonctions croissantes pour $x \to -\infty$ ou $x \to \infty$; or, les fonctions de cette sorte apparaissent souvent lors de la résolution des équations différentielles. Cette difficulté peut être surmontée par extension de la transformation de Fourier aux distributions ; cette voie sera brièvement étudiée au § 8 du présent chapitre. Une autre voie possible, qui ne dépasse pas le cadre du concept classique de fonction et les méthodes classiques de l'analyse, consiste à remplacer la transformation de Fourier par la transformation dite de Laplace.

Soit f une fonction (en général, non intégrable sur toute la droite numérique) qui devient intégrable, lorsqu'on la multiplie par $e^{-\gamma x}$, où γ est un nombre réel. Alors l'intégrale

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\lambda} e^{x\mu}\, dx$$

s'avère convergente pour certaines valeurs complexes $s = \lambda + i\mu$; en particulier, elle est convergente sur la droite $\mu = -\gamma$. Sur cette droite elle n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction $f(x)\, e^{x\mu}$.

Du point de vue des applications, le cas le plus important, où nos hypothèses concernant l'intégrabilité de la fonction $f(x)\, e^{-\gamma x}$ sont réalisées, est celui où f vérifie les conditions :

$$\left. \begin{array}{ll} |f(x)| < Ce^{\gamma_0 x} & \text{pour } x \geqslant 0, \\ f(x) = 0 & \text{pour } x < 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

[1]) Si la transformation de Fourier est définie par la formule

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

(c.-à-d. par la formule (1') du § 4 et non par la formule (1)), alors sa puissance quatrième est un opérateur identique, de sorte que dans la base constituée par les fonctions d'Hermite la matrice de F est diagonale et a pour éléments diagonaux ± 1 et $\pm i$.

(γ_0 et C sont des constantes). L'intégrale

$$g(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-isx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-isx}\,dx \tag{2}$$

existe pour tous les $s=\lambda+i\mu$ tels que $\mu<-\gamma_0$, c.-à-d. sur le demi-plan limité par la droite $\operatorname{Im} s=-\gamma_0$; elle représente la transformée de Fourier de la fonction $f(x)\,e^{\mu x}$. Celle-ci peut être obtenue de g à l'aide de la formule d'inversion (nous supposons que f vérifie les conditions pour que cette formule soit applicable)

$$f(x)\,e^{\mu x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$

d'où

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} g(s)\,e^{isx}\,ds \quad (s=\lambda+i\mu). \tag{3}$$

Puisque la fonction $f(x)\,e^{\mu x}$ décroît pour $\mu<-\gamma_0$ comme une fonction exponentielle (en vertu de (1)), sa transformée de Fourier g, de même que $g(s)\,e^{isx}$, est une fonction analytique sur le demi-plan $\operatorname{Im} s<-\gamma_0$.

Procédons maintenant à un changement de variable dans les formules (2) et (3), en posant $p=is$ et en désignant $g(s)$ par $\Phi(p)$. Il vient

$$\Phi(p)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-px}\,dx \tag{2'}$$

et

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty}\Phi(p)\,e^{px}\,\frac{dp}{i}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty}\Phi(p)\,e^{px}\,dp. \tag{3'}$$

La fonction Φ est définie et analytique sur le demi-plan $\operatorname{Re} p>$ $>\gamma_0$; elle s'appelle *transformée de Laplace* de la fonction f (vérifiant la condition (1)). L'application définie par la formule (2') s'appelle *transformation de Laplace.*

Par ses propriétés, la transformation de Laplace diffère peu de celle de Fourier. Cependant, la classe des fonctions pour lesquelles la transformation de Laplace est définie, diffère beaucoup de la classe $L_1(-\infty, \infty)$ des fonctions, pour lesquelles existe la transformation de Fourier.

2. Application de la transformation de Laplace à la résolution des équations différentielles (méthode opératorielle). La transformation de Laplace peut être appliquée à la résolution des équations

différentielles. Soit une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b(x) \quad (4)$$

dont on cherche la solution satisfaisant aux conditions initiales

$$y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \quad (5)$$

Appliquons à l'équation (4) la transformation de Laplace [1]), c.-à-d. multiplions cette équation par e^{-px} et intégrons-la de 0 à ∞. Soit

$$Y(p) = \int_0^\infty y(x) e^{-px} dx$$

la transformée de Laplace de y. En intégrant par parties, on obtient la transformée de Laplace de sa dérivée y' :

$$\int_0^\infty y'(x) e^{-px} dx = y(x) e^{-px}\Big|_0^\infty + p \int_0^\infty y(x) e^{-px} dx = pY(p) - y_0.$$

En appliquant cette formule successivement, on obtient

$$\int_0^\infty y^{(n)}(x) e^{-px} dx = p(p^{n-1}Y(p) - y_{n-2} - py_{n-3} - \ldots - p^{n-2}y_0) - y_{n-1} =$$

$$= p^n Y(p) - y_{n-1} - py_{n-2} - \ldots - p^{n-1}y_0 = p^n Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} y_k.$$

Soit, enfin,

$$B(p) = \int_0^\infty b(x) e^{-px} dx.$$

En définitive, l'équation différentielle (4) (compte tenu des conditions initiales (5)) se trouve remplacée, grâce à la transformation de Laplace, par l'équation algébrique

$$Q(p) + R(p) Y(p) = B(p),$$

où B est la transformée de Laplace de b, Q est un polynôme de degré $n - 1$ en p qui dépend des coefficients de l'équation (4) et des conditions initiales. Enfin,

$$R = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} p^k, \quad a_0 = 1$$

est le polynôme caractéristique de l'équation (4).

---

[1]) Il est aisé de montrer que son application à l'équation (4) est permise, si $|b(x)|$ ne croît pas trop vite.

De l'équation obtenue on tire

$$Y(p)=\frac{B(p)-Q(p)}{R(p)}.$$

La solution y s'obtient de là par la formule d'inversion

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty}\frac{B(p)-Q(p)}{R(p)}e^{px}\,dp.$$

On calcule habituellement cette intégrale à l'aide des résidus.

Une méthode connue de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants est la *méthode opératorielle*. Elle consiste en ce que le premier membre d'une telle équation

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=b(x)$$

est considéré comme l'image de la fonction inconnue y par l'opérateur

$$A\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{d^n}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n, \tag{6}$$

la solution de l'équation étant alors considérée comme l'image du second membre de cette équation par l'opérateur inverse de (6). L'image par un tel opérateur des fonctions simples, telles que les fonctions trigonométriques, la fonction exponentielle, la fonction puissance et leurs combinaisons, peut être facilement trouvée par des calculs directs. Ceci permet d'obtenir la solution d'une équation linéaire à coefficients constants de façon automatique, si son second membre est une combinaison de telles fonctions. Il est clair que la méthode opératorielle représente en fait l'application, sous forme implicite, de la transformation de Laplace (qui établit une certaine correspondance entre l'algèbre des opérateurs différentiels de la forme (6) et l'algèbre des polynômes). Ceci peut servir de justification de cette méthode qui dans la littérature technique apparaît souvent comme une « recette ».

§ 7. Transformation de Fourier-Stieltjes

1. Définition de la transformation de Fourier-Stieltjes. Revenons sur la transformation de Fourier dans l'espace $L_1(-\infty, \infty)$:

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)\,dx.$$

Cette formule peut s'écrire sous la forme de l'intégrale de Riemann-Stieltjes

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,dF(x), \tag{1}$$

où

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{2}$$

est une fonction absolument continue à variation bornée $\left(\text{égale à } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx\right)$ sur toute la droite numérique. Mais l'intégrale (1) a un sens non seulement pour les fonctions de la forme (2), mais aussi pour n'importe quelles fonctions à variation bornée sur toute la droite numérique. L'intégrale

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,dF(x),$$

où F est une fonction arbitraire à variation bornée sur la droite numérique, s'appelle *transformée de Fourier-Stieltjes* de la fonction F; l'application qu'elle définit s'appelle *transformation de Fourier-Stieltjes*. Elle jouit de certaines propriétés que nous avons déjà établies pour la transformation de Fourier habituelle, par exemple: la fonction g définie par l'intégrale (1) est continue et bornée sur toute la droite numérique.

En effet,

$$|g(\lambda_1) - g(\lambda_2)| \leqslant \int_{-N}^{N} |e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}| \times dF(x) + \\ + \int_{|x|>N} |e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}|\,dF(x).$$

Le deuxième terme du second membre peut être rendu aussi petit que l'on veut (à la fois pour λ_1 et λ_2 quelconques), en prenant N suffisamment grand; quant au premier, pour N fixé il tend vers zéro, lorsque $\lambda_1 - \lambda_2 \to 0$.

Cependant, certaines propriétés de la transformation de Fourier ne sont plus vraies pour la transformation de Fourier-Stieltjes. Ainsi, la transformée de Fourier-Stieltjes d'une fonction F ne tend pas nécessairement vers zéro quand $|\lambda| \to \infty$. Posons, par exemple,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Alors

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,dF(x) = 1.$$

De même, la transformée de Fourier-Stieltjes d'une fonction, égale à 0 pour $x \leqslant x_0$ et à 1 pour $x > x_0$, est $e^{ix_0\lambda}$, c.-à-d. une fonction périodique de λ.

Si F est une fonction des sauts ayant

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

comme points de discontinuité et

$$\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \left(\sum_n |a_n| < \infty\right)$$

comme valeurs des sauts en ces points, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, dF(x) = \sum_n a_n e^{-in\lambda}$$

est une fonction périodique de période 2π. Si F admet les sauts a_n aux points x_n formant une suite arbitraire de nombres (en général, incommensurables), la transformée de Fourier-Stieltjes de F est de la forme

$$\sum_n a_n e^{-ix_n\lambda}.$$

Les fonctions de ce type font partie de la classe des fonctions dites *presque périodiques.*

2. Applications de la transformation de Fourier-Stieltjes en théorie des probabilités. Pour les fonctions sommables sur $(-\infty, \infty)$ nous avons introduit au § 4 la notion de convolution:

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)\, f_2(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Posons

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\, dt \text{ et } F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(t)\, dt.$$

En intégrant l'égalité (3), écrivons-la sous la forme:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\xi)\, f_2(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{x} f_1(t-\xi)\, dt \right\} f_2(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi)\, dF_2(\xi)$$

(l'interversion des intégrations ici est possible en vertu du théorème de Fubini et du fait que la fonction f est absolument intégrable).

La relation ainsi obtenue

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi)\, dF_2(\xi)$$

fait correspondre aux fonctions F_1 et F_2 la fonction F. Mais l'intégrale qui figure ici au second membre existe en tant qu'intégrale de Lebesgue-Stieltjes non seulement pour les fonctions absolument continues, mais aussi pour n'importe quelles deux fonctions à variation bornée sur toute la droite numérique. L'expression

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi)\, dF_2(\xi), \tag{4}$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions arbitraires à variation bornée sur la droite, s'appelle *convolution de ces deux fonctions* et se note $F_1 * F_2$. Montrons que l'expression (4) est une fonction définie pour toutes les valeurs de x et à variation bornée sur toute la droite numérique [1]).

En effet, F_1 est une fonction à variation bornée, donc, mesurable au sens de Borel; par conséquent, l'intégrale (4) existe pour tous les x. On a donc

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(x_1-\xi) - F_1(x_2-\xi)) \times dF_2(\xi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x_1-\xi) - F_1(x_2-\xi)|\, d(\mathrm{var}\, F_2(\xi)),$$

d'où

$$V[F] \leqslant V[F_1] \cdot V[F_2],$$

ce qui signifie que F est une fonction à variation bornée.

Théorème 1. *Si F est la convolution des fonctions à variation bornée F_1 et F_2, et g, g_1, g_2 sont les transformées de Fourier-Stieltjes de F, F_1, F_2 respectivement, alors*

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)\, g_2(\lambda).$$

Démonstration. Soit $F = F_1 * F_2$, et soit

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$$

---

[1]) Dans le livre de V. I. Glivenko « Intégrale de Stieltjes », Gostehizdat, 1936, est donnée une construction élémentaire qui permet d'attribuer un sens à la formule (4), sans utiliser la notion de mesure.

une partition du segment $[a, b]$. Alors pour chaque λ on a

$$\int_a^b e^{-i\lambda x}\,dF(x) = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda x_k}(F(x_k) - F(x_{k-1})) =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda(x_k-\xi)}(F_1(x_k-\xi) - F_1(x_{k-1}-\xi))\,e^{-i\lambda\xi}\,dF_2(\xi),$$

c.-à-d.

$$\int_a^b e^{-i\lambda x}\,dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{a-\xi}^{b-\xi} e^{-i\lambda x}\,dF_1(x) \right\} e^{-i\lambda\xi}\,dF_2(\xi).$$

En passant dans cette égalité à la limite pour $a \to -\infty$ et $b \to \infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,dF_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi}\,dF_2(\xi),$$

c.-à-d.

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)\,g_2(\lambda).$$

Le théorème affirmant que la transformation de Fourier-Stieltjes remplace la convolution de deux fonctions par leur produit est largement utilisé en théorie des probabilités (*méthode des fonctions caractéristiques*). Si ξ et η sont deux variables aléatoires indépendantes et F_1 et F_2 sont leurs fonctions de répartition, alors la fonction de répartition qui correspond à $\xi + \eta$ est

$$F = F_1 * F_2.$$

La nécessité de considérer des sommes de variables aléatoires indépendantes se présente assez souvent en théorie des probabilités. Le passage des fonctions de répartition à leurs transformées de Fourier-Stieltjes, que l'on appelle encore fonctions caractéristiques, permet de remplacer l'opération de convolution par l'opération plus simple et plus commode de multiplication.

Exercices. 1. Démontrer que la transformation de Fourier-Stieltjes jouit de la propriété d'unicité : si la fonction F est continue à gauche et sa transformée de Fourier-Stieltjes est identiquement nulle, alors $F(x) = \text{const}$.

2. Démontrer que l'opération de convolution des fonctions à variation bornée est commutative et associative.

§ 8. Transformation de Fourier des distributions

Nous avons déjà fait remarquer que l'application de la transformation de Fourier au sens habituel à la résolution des équations différentielles et à d'autres questions est limitée en grande mesure par le

fait que cette transformation n'est définie que pour les fonctions absolument intégrables sur toute la droite numérique. L'applicabilité de la transformation de Fourier peut être élargie de façon considérable, en introduisant la notion de transformation de Fourier pour les distributions. Exposons les idées principales d'une telle construction.

Considérons de nouveau l'espace S_∞ des fonctions indéfiniment dérivables sur toute la droite numérique et décroissant à l'infini avec leurs dérivées plus vite que toute puissance de $\frac{1}{|x|}$ (cf. § 4, chap. IV).

En prenant S_∞ pour espace des fonctions de base, considérons l'espace correspondant des distributions S_∞^*.

Définissons maintenant la transformation de Fourier dans l'espace S_∞^*. Pour cela, rappelons-nous tout d'abord que la transformation de Fourier au sens habituel applique l'espace S_∞ dans lui-même : si $\varphi \in S_\infty$, alors $F[\varphi] \in S_\infty$; de plus, F est une application bijective de l'espace S_∞ sur lui-même. Cela étant, introduisons la définition suivante. *On appelle transformée de Fourier d'une distribution* $f \in S_\infty^*$ *la fonctionnelle linéaire* $g \in S_\infty^*$ *définie par la formule*

$$(g, \psi) = 2\pi (f, \varphi), \text{ où } \psi = F[\varphi]. \tag{1}$$

Cette formule peut s'écrire encore ainsi :

$$(Ff, \psi) = 2\pi (f, \varphi) = 2\pi (f, F^{-1}\psi).$$

Donc, la transformée de Fourier d'une fonctionnelle $f \in S_\infty^*$ est la fonctionnelle dont la valeur pour chaque élément $\psi \in S_\infty$ est égale à la valeur de la fonctionnelle initiale (multipliée par 2π) pour l'élément $\varphi = F^{-1}\psi$, où F^{-1} est la transformation de Fourier inverse.

Puisque $\psi = F[\varphi]$ parcourt l'espace S_∞ tout entier quand φ parcourt S_∞, l'égalité (1) définit bien une fonctionnelle sur l'espace S_∞ tout entier. La linéarité et la continuité de cette fonctionnelle sont immédiates.

Parmi les éléments de S_∞^* figurent toutes les fonctions absolument intégrables. Pour ces fonctions la notion de transformée de Fourier au sens de la définition ci-dessus coïncide avec celle définie précédemment. En effet, si $f \in S_\infty$, $\varphi \in S_\infty$, $g = F[f]$ et $\psi = F[\varphi]$, alors d'après le théorème de Plancherel on a

$$2\pi (f, \varphi) = (g, \psi); \tag{2}$$

en outre, pour f donnée il existe (à l'équivalence près) une seule fonction g qui vérifie cette égalité pour tous les $\varphi \in S_\infty$. Par passage à la limite il est aisé de montrer que l'égalité (2) est vraie pour toute fonction $f \in L_1(-\infty, \infty)$. Ainsi, la transformation de Fourier des distributions est la généralisation de la notion classique correspondante à une classe d'objets plus large.

Exemples. 1. Soit $f(x) = c = \text{const.}$ Alors

$$2\pi(f, \varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(x)\,dx = 2\pi c\psi(0) \qquad (\psi = F[\varphi]),$$

c.-à-d. la transformée de Fourier d'une constante est égale à cette constante, multipliée par 2π et par la fonction δ.

2. Soit $f(x) = e^{iax}$. Alors

$$2\pi(f, \varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax}\varphi(x)\,dx = 2\pi\psi(-a),$$

c.-à-d. la transformée de Fourier de e^{iax} est la fonction δ translatée $\delta(x+a)$, multipliée par 2π.

3. Soit $f(x) = x^2$. En posant dans l'égalité

$$\psi''(\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

$x = 0$ et en la multipliant par 2π, on obtient

$$2\pi(x^2, \varphi(x)) = -2\pi\psi''(0);$$

donc, la transformée de Fourier de x^2 est la dérivée seconde de la fonction δ, multipliée par -2π.

Faisons, pour conclure, les remarques suivantes.

Nous avons défini la transformation de Fourier pour les distributions sur S_∞. Cependant, on pourrait prendre tout autre espace de base, par exemple, l'espace K des fonctions indéfiniment dérivables à support borné. Pour toute fonction $\varphi \in K$ la transformée de Fourier (au sens habituel) existe et, comme on peut le vérifier, est une fonction analytique entière à croissance exponentielle. D'une manière plus précise, la transformation de Fourier est un opérateur linéaire qui applique l'espace K dans l'espace Z ayant pour éléments les fonctions analytiques entières ψ dont chacune vérifie les inégalités

$$|s|^q\,|\psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|} \quad (q = 1, 2, \ldots),$$

où $\tau = \operatorname{Im} s$, C_q et a étant des constantes qui dépendent de ψ. Comme dans l'espace K on a introduit la notion de convergence, l'application F de K dans Z induit une notion de convergence dans Z; une suite $\{\psi_n\}$ converge dans Z vers ψ, si la relation $\varphi_n \to \varphi$ a lieu pour les images réciproques correspondantes. D'ailleurs, cette notion de convergence peut être facilement formulée, sans faire intervenir l'espace K [1]).

[1]) Plus précisément, $\psi_n \to 0$ dans Z, si pour $C_q (q = 1, 2, \ldots)$ et a fixés on a les inégalités

$$|s^q\psi_n(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|}$$

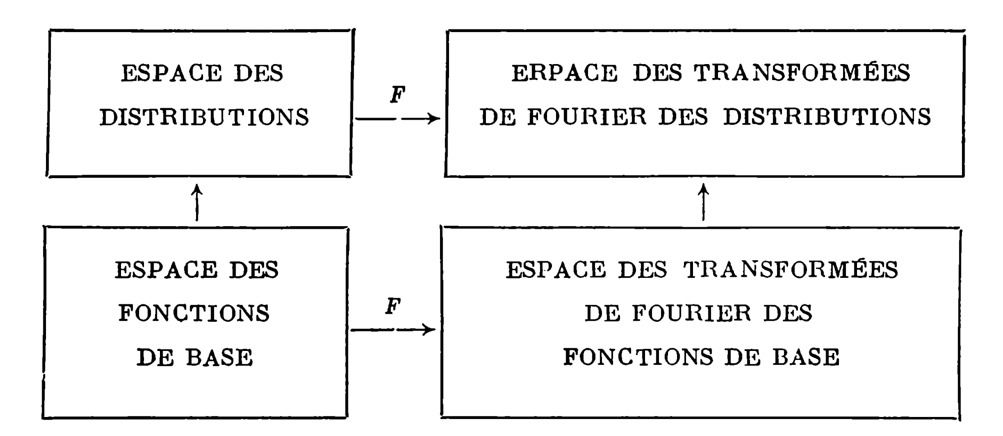
et $\psi_n \to 0$ uniformément sur tout intervalle fini de l'axe réel.

Soit maintenant f un élément arbitraire de K^*. Faisons-lui correspondre une fonctionnelle linéaire g sur Z, en posant

$$(g, \psi) = 2\pi\,(f, \varphi), \text{ où } \psi = F\,[\varphi].$$

Cette fonctionnelle g sera appelée *transformée de Fourier de la fonctionnelle f*. Ainsi, la transformée de Fourier d'une distribution f sur l'espace de base K est une distribution sur Z, c.-à-d. sur l'espace image de K par la transformation de Fourier au sens habituel.

La même construction est valable aussi pour les distributions sur d'autres espaces des fonctions de base. Dans tous les cas on obtient un schéma comportant quatre espaces: un espace initial des fonctions de base, l'ensemble des transformées de Fourier de ces fonctions (c.-à-d. un deuxième espace des fonctions de base) et deux espaces duals.



Si l'on prend S_∞ comme espace de base, ce schéma se réduit à deux espaces, car la transformation de Fourier applique l'espace S_∞ sur lui-même.

La notion de transformation de Fourier pour les distributions est largement utilisée dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles. Pour ces questions le lecteur pourra consulter, par exemple, le livre de G. E. Chilov [52].

Equations intégrales linéaires

§ 1. Principales définitions. Quelques problèmes conduisant à des équations intégrales

1. Types d'équations intégrales. On appelle *équation intégrale* une équation qui contient la fonction inconnue sous le signe d'intégration. Telle est, par exemple, l'équation

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt+f(s), \tag{1}$$

où f et K sont des fonctions continues et φ est la fonction inconnue. Les variables s et t parcourent ici un segment donné $[a, b]$.

La particularité caractéristique de l'équation (1) réside dans sa linéairité: elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue φ. De nombreux problèmes conduisent à des équations intégrales non linéaires, par exemple, à des équations de la forme

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)\,g(\varphi(t),t,)\,dt,$$

où K et g sont des fonctions données. Cependant, nous nous bornerons dans toute la suite aux équations intégrales linéaires.

Certaines équations intégrales ont été considérées déjà au début du siècle passé. Ainsi, par exemple, l'équation

$$f(s)=\int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha}}\,dt \qquad (0<\alpha<1,\ f(0)=0)$$

a été considérée en 1823 par Abel et porte son nom. Dans cette équation f est une fonction donnée et φ est la fonction inconnue. Abel a montré que la solution de cette équation est

$$\varphi(t)=\frac{\sin \pi a}{\pi}\int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{1-a}}\,ds.$$

Cependant, la théorie générale des équations intégrales linéaires n'a été construite qu'à la limite des XIXe et XXe siècles, principalement grâce aux travaux de Volterra, Fredholm et Hilbert.

L'équation (1) s'appelle *équation de Fredholm de deuxième espèce* (cf. n° 4, § 4, chap. II) ; l'équation

$$\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) = 0 \qquad (2)$$

(contenant la fonction inconnue φ seulement sous le signe d'intégration) s'appelle *équation de Fredholm de première espèce.*

L'équation d'Abel, mentionnée plus haut, fait partie des équations dites *de Volterra* ; la forme générale de ces équations est

$$\int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \qquad (3)$$

(équation de Volterra *de première espèce*) ou

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) \qquad (4)$$

(équation de Volterra *de deuxième espèce*). Il est clair que l'équation de Volterra peut être considérée comme une équation de Fredholm où la fonction K vérifie la condition

$$K(s, t) = 0 \text{ pour } t > s.$$

Mais il est plus raisonnable de ranger les équations du type de Volterra en une classe spéciale, car elles possèdent des propriétés qui n'ont pas lieu pour des équations de Fredholm arbitraires.

Si dans les équations (1), (2) ou (3) la fonction f est nulle, on dit qu'une telle équation est *homogène*. Dans le cas contraire l'équation est dite *non homogène*.

2. Exemples de problèmes conduisant à des équations intégrales. Dans les paragraphes suivants du présent chapitre nous établirons les propriétés fondamentales des équations intégrales, mais pour l'instant nous nous proposons de considérer quelques problèmes qui conduisent à de telles équations.

1. *Equilibre d'une corde chargée.* Considérons une corde, c.-à-d. un fil matériel élastique et flexible de longueur l qui oppose à la traction une résistance, proportionnelle à la valeur de cette traction. Supposons les extrémités de la corde fixées aux points $x = 0$ et $x = l$. Alors dans sa position d'équilibre la corde coïncide avec le segment $0 \leqslant x \leqslant l$ de l'axe x. Supposons maintenant que la corde soit soumise à une force $P = P_\xi$ qui agit verticalement en un point $x = \xi$. Sous l'action de cette force la corde s'écarte de sa position d'équilibre et prend, évidemment, la forme de la ligne brisée représentée sur la fig. 23.

Cherchons l'écart δ de la corde au point ξ sous l'action de la force P_ξ agissant en ce point. Si la force P_ξ est petite par rapport à la tension T_0 de la corde non chargée, alors la tension de la corde chargée peut être supposée aussi égale à T_0. Cela étant, de la condition d'équilibre de la corde on obtient l'égalité

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P_\xi,$$

d'où

$$\delta = \frac{(l-\xi)\,\xi}{T_0 l} P_\xi.$$

Désignons par $u(x)$ la flèche de la corde en un point quelconque x sous l'action de la force P_ξ. Alors

$$u(x) = P_\xi G(x, \xi),$$

où

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{T_0 l} & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{(l-x)\,\xi}{T_0 l} & \text{pour} \quad \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

De ces formules on voit immédiatement que $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

Supposons à présent que la corde soit soumise à une force répartie uniformément sur cette corde avec la densité $p(\xi)$. Si cette force est petite, la déformation dépend encore linéairement de la force, et la forme de la corde chargée est décrite par la fonction

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi. \qquad (5)$$

Fig. 23.

Donc, si la charge agissant sur la corde est donnée, la formule (5) permet de déterminer la forme prise par la corde sous l'action de cette charge.

Considérons maintenant le problème inverse : *déterminer la répartition de la charge p telle que la corde ait la forme donnée u.* On voit alors que pour trouver la fonction p connaissant u, nous avons une équation qui aux notations près coïncide avec l'équation (2), c.-à-d. une équation intégrale de Fredholm de première espèce.

2. *Oscillations libres et oscillations forcées de la corde.* Supposons maintenant que la corde oscille de façon quelconque. Soit $u(x, t)$ la position, à l'instant t, du point de la corde ayant l'abscisse x, et soit ρ la densité linéaire de la corde [1]. La force d'inertie qui agit

[1]) Nous supposons ρ = const, bien que cela n'ait pas d'importance pour la suite.

sur un élément de longueur dx de la corde est égale à

$$-\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \rho \, dx,$$

donc

$$p(\xi) = -\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} \rho.$$

En substituant cette expression à $p(\xi)$ dans la formule (5), on obtient

$$u(x, t) = -\int_0^l G(x, \xi) \rho \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi. \tag{6}$$

Supposons que la corde produit des oscillations harmoniques de fréquence constante ω et d'amplitude $u(x)$ dépendant de x. Autrement dit, soit

$$u(x, t) = u(x) \sin \omega t.$$

En portant cette expression dans (6) et en simplifiant par $\sin \omega t$, on obtient pour u l'équation intégrale suivante:

$$u(x) = \rho\omega^2 \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi. \tag{7}$$

Si, sous l'action d'une force extérieure, les oscillations de la corde ne sont plus libres, mais forcées, alors, comme le montre un calcul simple, l'équation des oscillations harmoniques de la corde prend la forme

$$u(x) = \rho\omega^2 \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi + f(x),$$

c.-à-d. est une équation de Fredholm non homogène de deuxième espèce.

3. *Réduction d'une équation différentielle à une équation intégrale.* Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale. Par exemple, en démontrant l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y)$$

avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$, nous avons vu (au chap. II) qu'il est commode de réduire cette équation à l'équation intégrale (non linéaire)

$$y = y_0 + \int_0^x f(\xi, y) d\xi.$$

Une telle réduction est possible aussi pour des équations d'ordre supérieur à un. Considérons, par exemple, l'équation du second ordre

$$y'' + f(x)\, y = 0.$$

En posant $f(x) = \rho^2 - \sigma(x)$ où $\rho = \text{const}$, mettons-la sous la forme

$$y'' + \rho^2 y = \sigma(x)\, y. \tag{8}$$

Comme on le sait, la solution de l'équation

$$y'' + \rho^2 y = g(x)$$

peut s'écrire sous la forme

$$y(x) = \cos\rho(x-a) + \frac{1}{\rho}\int_a^x \sin\rho(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Donc, trouver la solution de l'équation (8) revient à résoudre l'équation intégrale

$$y(x) - \frac{1}{\rho}\int_a^x \sigma(\xi)\sin\rho(x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi = \cos\rho(x-a).$$

§ 2. Equations intégrales de Fredholm

1. Opérateur intégral de Fredholm. Dans ce paragraphe nous allons étudier les équations de Fredholm de deuxième espèce, c.-à-d. les équations de la forme

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt + f(s). \tag{1}$$

Toutes les fonctions considérées ici et plus loin seront supposées, en général, à valeurs c o m p l e x e s. La fonction K, appelée *noyau* de cette équation, sera supposée mesurable et appartenant à la classe L_2 sur le carré $a \leqslant s, t \leqslant b$:

$$\int_a^b\int_a^b \left|K(s, t)\right|^2 ds\, dt < \infty. \tag{2}$$

Dans l'équation (1) f est une fonction donnée et φ est la fonction inconnue, toutes les deux appartenant à $L_2[a, b]$. Les noyaux appartenant à la classe L_2 s'appellent *noyaux de Hilbert-Schmidt.*

Associons à l'équation (1) l'opérateur A défini par l'égalité

$$A\varphi = \psi$$

qui se traduit par

$$\int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = \psi(s). \tag{3}$$

Tout opérateur de la forme (3) s'appelle *opérateur de Fredholm.* Si, en outre, le noyau $K(s, t)$ vérifie la condition (2), un tel opérateur est dit *opérateur de Hilbert-Schmidt.* Il est évident que l'étude de l'équation (1) se réduit à l'étude des propriétés de cet opérateur.

Théorème 1. *L'égalité* (3), *où* $K(s, t)$ *est une fonction à carré intégrable, définit dans l'espace* $L_2[a, b]$ *un opérateur linéaire compact* A *dont la norme vérifie l'inégalité*

$$\| A \| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b | K(s, t) |^2 ds\, dt}. \tag{4}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'intégrale

$$\int_a^b | K(s, t) |^2 dt$$

existe, en vertu du théorème de Fubini et de la condition (2) pour presque tous les s. Autrement dit, $K(s, t)$, comme fonction de t, appartient pour presque tous les s à $L_2[a, b]$. Comme le produit des fonctions à carré sommable est une fonction sommable, l'intégrale du premier membre de (3) existe pour presque tous les s, c.-à-d. la fonction ψ est définie presque partout. Montrons que $\psi \in L_2[a, b]$. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky, pour presque tous les s on a

$$| \psi(s) |^2 = \left| \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \right|^2 \leqslant \int_a^b | K(s, t) |^2 dt \int_a^b | \varphi(t) |^2 dt = \\ = \| \varphi \|^2 \cdot \int_a^b | K(s, t) |^2 dt.$$

En intégrant par rapport à s et en remplaçant l'intégrale itérée de $| K(s, t) |^2$ par l'intégrale double correspondante, on obtient l'inégalité

$$\| A\varphi \|^2 = \int_a^b | \psi(s) |^2 ds \leqslant \| \varphi \|^2 \int_a^b \int_a^b | K(s, t) |^2 ds\, dt$$

qui assure à la fois l'intégrabilité de $| \psi(s) |^2$ et l'évaluation (4) pour la norme de l'opérateur A. Il reste à montrer que l'opérateur A

est compact. Soit $\{\psi_n\}$ un système orthogonal complet dans $L_2[a, b]$. Alors l'ensemble de tous les produits $\psi_m(s)\psi_n(t)$ constitue un système complet dans l'espace $L_2([a, b] \times [a, b])$ et, par conséquent,

$$K(s, t) = \sum_{m, n=1}^{\infty} a_{mn}\psi_m(s)\psi_n(t).$$

Posons maintenant

$$K_N(s, t) = \sum_{m, n=1}^{N} a_{mn}\psi_m(s)\psi_n(t)$$

et soit A_N l'opérateur défini par le noyau $K_N(s, t)$. Cet opérateur est compact, car il applique l'espace $L_2[a, b]$ tout entier sur un sous-espace de dimension finie (au chap. IV les opérateurs de ce type ont été appelés opérateurs de dimension finie). En effet, si $\psi \in L_2[a, b]$, alors

$$A_N\varphi = \int_a^b K_N(s, t)\varphi(t)\,dt = \sum_{m, n=1}^{N} a_{mn}\psi_m(s)\int_a^b \varphi(t)\psi_n(t)\,dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{N}\psi_m(s)\sum_{n=1}^{N} a_{mn}b_n,$$

où

$$b_n = \int_a^b \varphi(t)\psi_n(t)\,dt,$$

c.-à-d. chaque élément $\varphi \in L_2[a, b]$ est transformé par l'opérateur A_N en un élément du sous-espace de dimension finie, engendré par les vecteurs $\psi_1, \ldots, \psi_N$. D'autre part, $K_N(s, t)$ est une somme partielle de la série de Fourier de $K(s, t)$; c'est pourquoi

$$\int_a^b\int_a^b (K(s, t) - K_N(s, t))^2\,ds\,dt \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

En appliquant l'évaluation (4) à l'opérateur $A - A_N$, on en déduit que

$$\| A - A_N \| \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

En vertu du théorème affirmant que la limite d'une suite convergente d'opérateurs compacts est un opérateur compact, on en conclut que l'opérateur A est compact.

Le théorème est démontré.

R e m a r q u e s. 1. Au cours de la démonstration du théorème 1 nous avons démontré que tout opérateur de Hilbert-Schmidt peut

être considéré comme la limite (au sens de la convergence en norme) d'une suite d'opérateurs intégraux de dimension finie.

2. Soient A_1 et A_2 deux opérateurs de la forme (3), et $K_1(s, t)$, $K_2(s, t)$ les noyaux qui leur correspondent. Si les opérateurs A_1 et A_2 sont égaux, c.-à-d. si $A_1\varphi = A_2\varphi$ pour tous les $\varphi \in L_2[a, b]$, alors $K_1(s, t) = K_2(s, t)$ presque partout. En effet, si

$$A_1\varphi - A_2\varphi - \int_a^b (K_1(s, t) - K_2(s, t))\,\varphi(t)\,dt = 0$$

pour tous les $\varphi \in L_2[a, b]$, alors pour presque tous les $s \in [a, b]$ on a

$$\int_a^b |K_1(s, t) - K_2(s, t)|^2\,dt = 0$$

et, donc,

$$\int_a^b \int_a^b |K_1(s, t) - K_2(s, t)|^2\,ds\,dt = 0,$$

d'où l'on déduit notre affirmation. Donc, si, comme d'habitude, on ne fait aucune différence entre les fonctions sommables équivalentes, on peut dire que la *correspondance entre les opérateurs intégraux et les noyaux est biunivoque.*

Théorème 2. *Soit A l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini par le noyau K (s, t). Alors son adjoint A^* est défini par le noyau « adjoint »* $\overline{K(t, s)}$.

Démonstration. En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$(Af, g) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s, t)\,f(t)\,dt \right\} \overline{g(s)}\,ds =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(s, t)\,f(t)\,\overline{g(s)}\,dt\,ds = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s, t)\,\overline{g(s)}\,ds \right\} f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f(t) \overline{\left\{ \int_a^b \overline{K(s, t)}\,g(s)\,ds \right\}}\,dt,$$

d'où l'affirmation du théorème.

En particulier, un opérateur A de la forme (3) est auto-adjoint dans $L_2[a, b]$, c.-à-d. $A^* = A$ si et seulement si $\overline{K(s, t)} = K(t, s)$. Dans le cas où l'espace de Hilbert considéré est réel (et, donc, les noyaux sont réels) cette condition prend la forme $K(s, t) = K(t, s)$.

Remarque. Nous avons considéré jusqu'ici des opérateurs intégraux dans $L_2[a, b]$. Pourtant, tout ce qui a été dit plus haut, de même que les résultats qui seront exposés plus bas, s'étend sans modifications au cas où au lieu du segment $[a, b]$ on prend un espace mesuré quelconque.

2. Equations à noyau symétrique. Considérons l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{5}$$

dont le noyau vérifie les conditions

$$1) \qquad \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt < \infty,$$

$$2) \qquad K(s, t) = \overline{K(t, s)}.$$

Nous dirons qu'une telle équation est *à noyau symétrique*. D'après les théorèmes 1 et 2 du numéro précédent, l'operateur de Fredholm correspondant

$$A\varphi = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{6}$$

est compact et auto-adjoint. Par conséquent, il vérifie les conditions du théorème de Hilbert-Schmidt (n° 5, § 6, chap. IV). Appliquons ce théorème pour trouver les solutions de l'équation (5). Ce qui est important pour nous, c'est la propriété de l'opérateur (6) d'être compact et auto-adjoint et non sa représentation intégrale; pour cette raison, il est naturel d'écrire l'équation (5) symboliquement sous la forme

$$\varphi = A\varphi + f. \tag{7}$$

D'après le théorème de Hilbert-Schmidt, il existe pour A un système orthonormé de fonctions propres $\{\varphi_n\}$ correspondant aux valeurs propres non nulles $\{\lambda_n\}$, tel que chaque élément ξ de L_2 peut s'écrire sous la forme

$$\xi = \sum_n a_n \psi_n + \xi', \quad \text{où} \quad A\xi' = 0.$$

Posons

$$f = \sum_n b_n \psi_n + f' \quad (Af' = 0) \tag{8}$$

et cherchons la solution φ de l'équation (7) sous la forme

$$\varphi = \sum_n x_n \psi_n + \varphi' \quad (A\varphi' = 0). \tag{9}$$

En portant les développements (8) et (9) dans l'équation (7), on obtient

$$\sum_n x_n\psi_n + \varphi' = \sum_n x_n\lambda_n\psi_n + \sum_n b_n\psi_n + f'.$$

Cette égalité est vérifiée si, et seulement si,

$$f' = \varphi'$$

et

$$x_n(1-\lambda_n) = b_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

c.-à-d. si

$$f' = \varphi',$$

$$x_n = \frac{b_n}{1-\lambda_n} \quad \text{pour } \lambda_n \neq 1,$$

$$b_n = 0 \quad \text{pour } \lambda_n = 1.$$

La dernière égalité fournit la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (7) soit résoluble. Les coordonnées x_n correspondant aux n pour lesquels $\lambda_n = 1$ sont arbitraires. Ainsi, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3. *Si* 1 *n'est pas une valeur propre de l'opérateur* A, *alors l'équation* (7) *admet pour tout* f *une solution et une seule. Si, par contre,* 1 *est une valeur propre de l'opérateur* A, *l'équation* (7) *est résoluble si, et seulement si, la fonction* f *est orthogonale à toutes les fonctions propres de l'opérateur* A *qui correspondent à la valeur propre* 1. *Si cette dernière condition est vérifiée, l'équation* (7) *a une infinité de solutions.*

3. Théorèmes de Fredholm. Cas des noyaux dégénérés. Passons maintenant à l'étude des équations de Fredholm de deuxième espèce dont les noyaux sont soumis à la condition

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds\, dt < \infty$$

(qui assure la compacité de l'opérateur), la condition de symétrie n'étant pas exigée.

Considérons d'abord l'équation

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt + f(s) \tag{10}$$

dont le noyau est supposé dégénéré, c.-à-d. de la forme

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^n P_i(s)\, Q_i(t), \tag{11}$$

où P_i, Q_i sont des fonctions de L_2. L'opérateur défini par un noyau de la forme (11) fait correspondre à toute fonction $\varphi \in L_2$ la somme

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

c.-à-d. un élément du sous-espace de dimension finie, engendré par les fonctions P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. On remarquera que dans (11) les fonctions $P_1, \ldots, P_n$ peuvent être considérées comme linéairement indépendantes. En effet, s'il n'en est pas ainsi, en mettant chacune des fonctions P_i sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions linéairement indépendantes, nous parviendrons à représenter le même noyau $K(s, t)$ par la somme d'un nombre plus petit de termes de la forme $\widetilde{P}_j(s)\,\widetilde{Q}_j(t)$ tels que les fonctions $\widetilde{P}_j$ soient linéairement indépendantes. Une réduction analogue peut être appliquée aux fonctions Q_j. Il est aisé de voir qu'après ces réductions on obtient un noyau tel que les fonctions P_i, aussi bien que les fonctions Q_i, sont linéairement indépendantes.

Ainsi, il s'agit de résoudre l'équation (10) avec le noyau dégénéré (11), où les fonctions $P_1, \ldots, P_n$ (de même que $Q_1, \ldots, Q_n$) sont linéairement indépendantes. En remplaçant dans l'équation (10) $K(s, t)$ par la somme correspondante, on obtient

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt + f(s). \tag{12}$$

Avec les notations

$$\int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt = q_i$$

écrivons l'équation (12) sous la forme

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s).$$

En substituant cette expression à φ dans l'équation (10), on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t) \Big[\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) \Big]\,dt + f(s). \tag{13}$$

En posant

$$\int_a^b Q_i(t)\,P_j(t)\,dt = a_{ij}, \quad \int_a^b Q_i(t)\,f(t)\,dt = b_i,$$

écrivons l'égalité (13) sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i \Big].$$

Comme les fonctions P_i sont, par hypothèse, linéairement indépendantes, on en déduit l'égalité des coefficients correspondants:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Nous avons ainsi obtenu un système d'équations linéaires par rapport aux coefficients q_i. En le résolvant, nous trouverons la fonction

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s).$$

Cette fonction satisfait à l'équation intégrale (10), car tous les calculs que nous avons faits pour passer de l'équation (10) au système (14) peuvent se faire dans le sens inverse.

Ainsi, la *résolution d'une équation intégrale à noyau dégénéré se ramène à la résolution du système correspondant* (14) *d'équations algébriques linéaires.*

Pour les systèmes d'équations linéaires les conditions d'existence et d'unicité de la solution sont bien connues.

I. Un système d'équations algébriques linéaires

$$Tx = y \quad (T = \| a_{ik} \|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n))$$

est résoluble si et seulement si le vecteur y est orthogonal à chaque solution du système homogène adjoint

$$T^* z = 0 \quad (T^* = \| \overline{a_{ki}} \|).$$

II. Si le déterminant de la matrice T est différent de zéro, le système $Tx = y$ a pour tout y une solution et une seule. Si le déterminant de la matrice T est égal à zéro, le système homogène $Tx = 0$ a des solutions non nulles.

III. Comme la matrice T et la matrice adjointe T^* ont le même rang, les systèmes homogènes $Tx = 0$ et $T^*z = 0$ ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes.

Grâce à la liaison qui, comme nous l'avons vu, existe entre les équations intégrales à noyaux dégénérés et les systèmes d'équations algébriques linéaires, ces assertions peuvent être considérées comme des théorèmes concernant les solutions des équations intégrales à noyaux dégénérés. Nous montrerons au numéro suivant que ces mêmes théorèmes ont lieu aussi pour les équations intégrales à noyaux a r b i t r a i r e s (non dégénérés). Cependant, comme pour les opérateurs intégraux non dégénérés les notions telles que rang

d'une matrice et déterminant n'ont pas de sens, il faudra formuler les théorèmes correspondants de façon que ces notions n'interviennent pas.

4. Théorèmes de Fredholm pour les équations à noyaux non dégénérés. Considérons de nouveau l'équation

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{15}$$

mais cette fois nous soumettrons son noyau à la seule condition de Hilbert-Schmidt

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt < \infty$$

(assurant la compacité de l'opérateur), sans exiger que ce noyau soit dégénéré, ni qu'il soit symétrique. Nous nous intéresserons aux conditions de résolubilité de l'équation (15) et aux propriétés de ses solutions. L'essentiel pour nous sera la propriété de compacité de l'opérateur correspondant à l'équation (15) et non sa représentation intégrale. Pour cette raison, dans la suite nous construirons tous nos raisonnements à partir de l'équation opératorielle

$$\varphi = A\varphi + f, \tag{16}$$

en supposant que A est un opérateur compact arbitraire dans un espace de Hilbert H.

En posant $T = I - A$ (où I est l'opérateur identique), écrivons l'équation (16) sous la forme

$$T\varphi = f. \tag{17}$$

A côté de cette équation considérons encore l'équation homogène

$$T\varphi_0 = 0 \tag{18}$$

et les équations adjointes

$$T^*\psi = g, \tag{19}$$

$$T^*\psi_0 = 0 \tag{20}$$

($T^* = I - A^*$). La liaison entre les propriétés des solutions de ces quatre équations se traduit par les assertions suivantes, dites théorèmes de Fredholm.

I. *L'équation non homogène $T\varphi = f$ est résoluble si et seulement si f est orthogonal à chaque solution de l'équation homogène adjointe $T^*\psi_0 = 0$.*

II. (alternative de Fredholm). *Ou bien l'équation $T\varphi = f$ a pour tout $f \in H$ une solution et une seule, ou bien l'équation homogène $T\varphi_0 = 0$ a des solutions non nulles.*

III. *Les équations homogènes* (18) *et* (20) *ont le même nombre (fini) de solutions linéairement indépendantes.*

Avant de passer à la démonstration de ces théorèmes, remarquons qu'ils sont (d'après ce qui a été dit au n° 2) vrais pour les équations à noyau symétrique. Dans ce cas, puisque A et A^* coïncident, le théorème III devient trivial.

D'autre part, si A est un opérateur intégral dégénéré, les équations intégrales correspondantes se ramènent, comme nous l'avons vu plus haut, à des systèmes d'équations algébriques linéaires; les théorèmes de Fredholm se ramènent alors aux théorèmes sur les systèmes linéaires, cités au numéro précédent.

Etant donné que tout opérateur compact est la limite d'une suite convergente d'opérateurs dégénérés, c.-à-d. d'opérateurs de dimension finie, on pourrait démontrer les théorèmes de Fredholm à l'aide du passage à la limite correspondant (des opérateurs dégénérés à des opérateurs non dégénérés). Nous suivrons pourtant une autre voie et donnerons une démonstration de ces théorèmes sans faire intervenir les opérateurs dégénérés.

Démonstration des théorèmes de Fredholm. Rappelons que Ker B désigne l'ensemble des zéros de l'opérateur linéaire continu B, c.-à-d. l'ensemble de tous les $x \in H$ tels que $Bx = 0$. Il est clair que Ker B est toujours un sous-espace vectoriel fermé. Soit Im B le domaine des valeurs de l'opérateur B, c.-à-d. l'ensemble des vecteurs de la forme $y = Bx$. L'ensemble Im B est aussi une variété linéaire, mais elle n'est pas en général fermée. Nous allons montrer que pour l'opérateur $T = I - A$ la variété correspondante est fermée.

Lemme 1. *La variété* Im T *est fermée.*

Démonstration. Soit $y_n \in \text{Im } T$ et $y_n \to y$. Par hypothèse il existe des vecteurs $x_n \in H$ tels que

$$y_n = Tx_n = x_n - Ax_n. \tag{21}$$

Nous pouvons supposer que les vecteurs x_n sont orthogonaux à Ker T, en retranchant, s'il le faut, de x_n sa projection sur Ker T. En outre, on peut supposer que les $\| x_n \|$ forment un ensemble borné, car sinon, en passant à une sous-suite, on aurait $\| x_n \| \to \infty$ et, en divisant par $\| x_n \|$, on obtiendrait de (21) que $\frac{x_n}{\| x_n \|} - A \frac{x_n}{\| x_n \|} \to 0$. Or, comme l'opérateur A est compact, en passant de nouveau à une sous-suite, on peut supposer que la suite $\left\{ A \frac{x_n}{\| x_n \|} \right\}$ est convergente. Mais alors la suite $\left\{ \frac{x_n}{\| x_n \|} \right\}$ va aussi converger, vers un vecteur $z \in H$. Il est clair que $\| z \| = 1$ et $Tz = 0$, c.-à-d. $z \in \text{Ker } T$. Or, puisque les vecteurs x_n sont supposés orthogonaux à Ker T, le vecteur z

doit être orthogonal à Ker T. La contradiction obtenue permet de supposer que les $\| x_n \|$ forment un ensemble borné. D'autre part, dans ce cas la suite $\{Ax_n\}$ peut être supposée convergente et alors, comme cela résulte de (21), la suite $\{x_n\}$ sera aussi convergente. En désignant la limite de cette suite par x, on déduit de (21) que $y = Tx$.

Le lemme est démontré.

L e m m e 2. *L'espace H est la somme directe des sous-espaces fermés orthogonaux* Ker T *et* Im T, *c.-à-d.*

$$\mathrm{Ker}\ T \oplus \mathrm{Im}\ T^* = H; \tag{22}$$

de même

$$\mathrm{Ker}\ T^* \oplus \mathrm{Im}\ T = H. \tag{23}$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous savons déjà que les deux sous-espaces figurant au premier membre de l'égalité (22) sont fermés. Ils sont, en outre orthogonaux, car si $h \in \mathrm{Ker}\ T$, on a $(h, T^*x) = (Th, x) = 0$ pour tous les $x \in H$. Il reste à démontrer qu'il n'existe aucun vecteur non nul, orthogonal à la fois à Ker T et à Im T^*. Mais si un vecteur z est orthogonal à Im T^*, pour tout $x \in H$ on a $(Tz, x) = (z, T^*x) = 0$, c.-à-d. $z \in \mathrm{Ker}\ T$.

Le lemme est démontré.

Du lemme 2 résulte immédiatement le premier théorème de Fredholm. En effet, $f \perp \mathrm{Ker}\ T^*$ si et seulement si $f \in \mathrm{Im}\ T$, c.-à-d. s'il existe φ tel que $T\varphi = f$.

Posons maintenant pour tout k entier $H^k = \mathrm{Im}\ (T^k)$, en particulier, $H^1 = \mathrm{Im}\ T$. Il est clair que les sous-espaces H^k forment une suite décroissante:

$$H \supset H^1 \supset H^2 \supset \ldots \tag{24}$$

En vertu du lemme 1, tous ces sous-espaces sont fermés. En outre, $T\ (H^k) = H^{k+1}$.

L e m m e 3. *Il existe un nombre j tel que $H^{k+1} = H^k$ pour tous les $k \geqslant j$.*

D é m o n s t r a t i o n. Si un tel j n'existe pas, il est évident que tous les H^k sont distincts. Dans ce cas on peut construire une suite orthonormée $\{x_k\}$ telle que $x_k \in H^k$ et $x_k \perp H^{k+1}$. Soit $l > k$. Alors

$$Ax_l - Ax_k = -x_k + (x_l + Tx_k - Tx_l)$$

et, par conséquent, $\| Ax_l - Ax_k \| \geqslant 1$, car $x_l + Tx_k - Tx_l \in H^{k+1}$. Il est donc impossible d'extraire de la suite $\{Ax_k\}$ une sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de l'opérateur A. Ceci démontre le lemme.

Lemme 4. *Si* Ker $T = \{0\}$, *alors* Im $T = H$.

Démonstration. Si Ker $T = \{0\}$, l'opérateur T est bijectif et, par conséquent, si en outre Im $T \neq H$, la suite (24) est constituée de sous-espaces distincts, ce qui contredit le lemme 3. Donc, Im $T = H$. De même, si Ker $T^* = \{0\}$, on a Im $T^* = H$.

Lemme 5. *Si* Im $T = H$, *alors* Ker $T = \{0\}$.

Démonstration. Comme Im $T = H$, en vertu du lemme 2, on a Ker $T^* = \{0\}$, mais alors, d'après le lemme 4, Im $T^* = H$ et, par conséquent, selon le lemme 2, on a Ker $T = \{0\}$.

Les lemmes 4 et 5 constituent précisément le contenu du deuxième théorème (de l'alternative) de Fredholm. Ce théorème est donc démontré.

Démontrons, enfin, le troisième théorème de Fredholm.

Supposons que le sous-espace Ker T soit de dimension infinie. Alors dans ce sous-espace il existe un système orthonormé infini $\{x_k\}$. En outre, $Ax_k = x_k$ et donc pour $k \neq l$ on a $\| Ax_k - Ax_l \| = \sqrt{2}$. Mais il est impossible d'extraire de la suite $\{Ax_k\}$ une sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de l'opérateur A.

Désignons par μ la dimension de Ker T et par ν celle de Ker T^*. Supposons que $\mu < \nu$. Soient $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu\}$ une base orthonormée dans Ker T et $\{\psi, \ldots, \psi_\nu\}$ une base orthonormée dans Ker T^*. Posons

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j.$$

Comme l'opérateur S s'obtient de l'opérateur T par adjonction d'un opérateur de dimension finie, tous les résultats, établis plus haut pour l'opérateur T, sont valables aussi pour l'opérateur S.

Montrons que l'équation $Sx = 0$ n'a pas de solution, autre que la solution triviale. En effet, supposons que

$$Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j = 0. \tag{25}$$

Comme, en vertu du lemme 2, les vecteurs ψ_j sont orthogonaux à tous les vecteurs de la forme Tx, de (25) il résulte que

$$Tx = 0$$

et

$$(x, \varphi_j) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant \mu.$$

C'est pourquoi, d'une part, le vecteur x doit être une combinaison linéaire des vecteurs φ_j et, d'autre part, il doit être orthogonal à ces vecteurs. Par conséquent, $x = 0$. Donc, l'équation $Sx = 0$ n'a

pour solution que la solution triviale. Mais alors, d'après le deuxième théorème, il existe un vecteur y tel que

$$Ty + \sum_{j=1}^{\mu} (y, \varphi_j)\, \psi_j = \psi_{\mu+1}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité scalairement par $\psi_{\mu+1}$, nous obtiendrons 1 à droite et 0 à gauche, car $Ty \in \mathrm{Im}\, T$ et $\mathrm{Im}\, T \perp \mathrm{Ker}\, T^*$. Cette contradiction provient de la supposition que $\mu < \nu$. Par conséquent, $\mu \geqslant \nu$. En remplaçant l'opérateur T par T^*, nous obtiendrons que $\mu \leqslant \nu$; donc, $\mu = \nu$.

Le théorème III est complètement démontré.

Remarques. 1. Dans les théorèmes de Fredholm il s'agit, en fait, de l'inversibilité de l'opérateur $A - I$. Ces théorèmes montrent que $\lambda = 1$ est pour l'opérateur A soit une valeur régulière, soit une valeur propre de multiplicité finie. Certainement, tout ce que ces théorèmes affirment est vrai aussi pour l'opérateur $A - \lambda I$, si $\lambda \neq 0$. Ainsi, *tout point différent de 0 du spectre d'un opérateur compact est une valeur propre de multiplicité finie de cet opérateur.* Nous savons, en outre, que l'ensemble de telles valeurs propres est au plus dénombrable. Rappelons, à ce propos, que le point 0 appartient toujours au spectre d'un opérateur compact dans un espace de dimension infinie, mais n'est pas nécessairement une valeur propre de cet opérateur. Les opérateurs compacts dont 0 est le seul point du spectre s'appellent *opérateurs* (abstraits) *de Volterra.*

2. Nous avons démontré les théorèmes de Fredholm pour une équation de la forme $\varphi = A\varphi + f$, où A est un opérateur compact dans un espace de Hilbert. Ces théorèmes peuvent être généralisés sans modifications importantes au cas d'un espace de Banach arbitraire E. Dans ce cas, bien sûr, l'équation adjointe $\psi = A^*\psi + g$ est une équation dans l'espace E^*, la condition d'orthogonalité $(f, \psi_0) = 0$ signifie que l'élément $f \in E$ annule toute fonctionnelle du sous-espace $\mathrm{Ker}\, T^* \subset E^*$ des solutions de l'équation $T^*\psi_0 = 0$, etc. Un exposé des théorèmes de Fredholm pour des équations dans un espace de Banach est donné, par exemple, dans le livre de L. Lusternik et V. Sobolev « Eléments d'analyse fonctionelle » (en russe).

5. Equations de Volterra. On appelle *équation de Volterra* (de deuxième espèce) l'équation intégrale

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t)\, \varphi(t)\, dt + f(s), \tag{26}$$

où $K(s, t)$ est une fonction mesurable bornée: $|K(s, t)| \leqslant M$. Comme cette équation peut être considérée comme un cas particulier de l'équation de Fredholm (dont le noyau est nul pour $t > s$), les

théorèmes de Fredholm sont vrais aussi pour l'équation (26). Mais pour les équations de Volterra ces théorèmes peuvent être précisés de la manière suivante. *Pour toute fonction $f \in L_2$ l'équation de Volterra* (26) *a une solution et une seule.*

En effet, si l'on reprend mot pour mot les raisonnements du n° 4, § 4, chap. II, il est aisé de voir qu'il existe une puissance de l'opérateur

$$A\varphi = \int_a^s K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

qui représente un opérateur contractant et, par conséquent, l'équation homogène a une solution unique (la solution triviale). En vertu des théorèmes de Fredholm, on en déduit l'assertion annoncée.

Exercice. Soit une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce à noyau continu, donnée sur un segment. Démontrer pour une telle équation les théorèmes de Fredholm *dans l'espace des fonctions continues*. Pour « équation adjointe » on prend l'équation intégrale à noyau transposé, et l'orthogonalité est comprise au sens de L_2.

6. Equations intégrales de première espèce. On appelle *équation abstraite de Fredohlm de première espèce* une équation de la forme

$$A\varphi = f, \tag{27}$$

c.-à-d. une équation ne contenant la fonction inconnue φ que sous le signe d'un opérateur compact.

La résolution d'une telle équation est un problème, en général, plus compliqué que celui de la résolution d'une équation de deuxième espèce et l'équation (27) ne peut pas être résoluble pour tout second membre.

Considérons d'abord, comme un exemple simple, l'équation

$$f(s) = \int_a^s \varphi(t)\, dt,$$

c.-à-d. l'équation de noyau

$$K(s, t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \leqslant s, \\ 0 \text{ pour } > s. \end{cases}$$

Elle a une solution évidente $\varphi(s) = f'(s)$, si la fonction f est absolument continue et sa dérivée appartient à L_2, et n'a aucune solution dans le cas contraire.

Montrons que dans le cas général aussi l'équation (27) ne peut pas être résoluble pour $f \in H$ arbitraire. En effet, la résolubilité de l'équation $A\varphi = f$ pour tout $f \in H$ signifierait que cet opérateur applique H sur H tout entier. Montrons que cela est impossible. L'espace H tout entier peut être considéré comme une réunion dénombrable de boules S_n (par exemple, des boules de rayon

1, 2, . . ., n, . . . et de centre au point 0). L'opérateur compact A applique chacune de ces boules dans un ensemble compact. Donc, AH est une réunion dénombrable de compacts. Or, dans H tout compact est nulle part dense ; d'autre part, l'espace H, comme tout espace métrique complet, ne peut pas être représenté par une réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses. Donc, $AH \neq H$; en d'autres termes, *quel que soit l'opérateur compact A dans H, l'équation $A\varphi = f$ ne peut pas être résoluble pour tous les $f \in H$.*

Un autre fait important consiste en ce que l'inverse d'un opérateur compact n'est pas borné. Donc, si f_1 et f_2 sont deux éléments voisins appartenant à H et les deux équations

$$A\varphi_1 = f_1, \quad A\varphi_2 = f_2$$

sont résolubles, leurs solutions correspondantes $\varphi_1 = A^{-1}f_1$ et $\varphi_2 = A^{-1}f_2$ peuvent être très différentes l'une de l'autre. Autrement dit, une erreur aussi petite que l'on veut sur le second membre peut conduire à une erreur aussi grande que l'on veut sur la solution. Les problèmes, dans lesquels un changement petit des données initiales conduit à un changement petit de la solution (cette « petitesse » peut avoir un sens différent dans des problèmes différents), s'appellent *problèmes corrects.* La résolution d'une équation intégrale de première espèce (par opposition à celle d'une équation de deuxième espèce) est un problème *incorrect.* Divers problèmes incorrects et les méthodes de leur régularisation (c.-à-d. de leur réduction à des problèmes en un certain sens corrects) ont reçu ces derniers temps un développement considérable. Mais l'exposé de ces questions dépasse le cadre du présent ouvrage

§ 3. Equations intégrales dépendant d'un paramètre Méthode de Fredholm

1. Spectre d'un opérateur compact dans H. Considérons l'équation

$$\varphi = \lambda A\varphi + f$$

ou, sous une autre forme,

$$(I - \lambda A)\,\varphi = f, \tag{1}$$

où A est un opérateur compact dans l'espace de Hilbert H et λ est un paramètre numérique.

En vertu de l'alternative de Fredholm, deux cas s'excluant mutuellement (et deux seulement) sont possibles :

1. Pour chaque $f \in H$ et λ donné l'équation (1) a une solution et une seule.

2. L'équation homogène $\varphi = \lambda A\varphi$ admet des solutions non nulles.

Dans le premier cas l'opérateur $I - \lambda A$ applique biunivoquement H sur H tout entier. On en déduit l'existence de l'opérateur inverse borné $(I - \lambda A)^{-1}$. Cela équivaut à dire que l'opérateur $\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1}$ est borné et défini sur H tout entier; autrement dit, dans ce cas $\frac{1}{\lambda}$ n'appartient pas au spectre de l'opérateur A.

Supposons maintenant qu'on ait la deuxième possibilité, c.-à-d. qu'il existe un élément non nul $\varphi_\lambda \in H$ tel que

$$\varphi_\lambda = \lambda A \varphi_\lambda \quad \text{ou} \quad A\varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda} \varphi_\lambda;$$

alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de l'opérateur A.

On obtient donc le résultat suivant: *tout nombre* $\mu = \frac{1}{\lambda} \neq 0$ *est soit une valeur propre de l'opérateur compact* A, *soit une valeur régulière*. Autrement dit, le spectre continu d'un opérateur compact est soit vide, soit constitué du seul point $\mu = 0$.

En ajoutant ce qu'on vient de dire au théorème 4, § 6, chap. IV, on obtient la description suivante du spectre d'un opérateur compact dans H. Le spectre de tout opérateur compact A dans H est constitué du point 0[1] et d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de valeurs propres non nulles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ dont chacune est de multiplicité finie. Le point 0 est le seul qui peut être un point d'accumulation de la suite $\{\mu_n\}$. Le point $\mu = 0$ lui-même peut être une valeur propre de multiplicité finie ou infinie, mais il peut aussi ne pas appartenir à l'ensemble des valeurs propres. Comme cela a été montré au nº 5, § 2, pour l'équation

$$\varphi = \lambda B \varphi + f,$$

où B est un opérateur intégral du type de Volterra, on a toujours la première possibilité de l'alternative de Fredholm (résolubilité pour tout $f \in L_2$). Autrement dit, le spectre d'un opérateur intégral du type de Volterra est constitué du seul point $\mu = 0$. Par ailleurs, à la fin du nº 4, § 2, nous avons appelé opérateur abstrait de Volterra un opérateur compact dont le spectre se réduit au seul point 0. On peut donc dire qu'un opérateur intégral de Volterra est en même temps un opérateur abstrait de Volterra, de sorte que toute cette terminologie se trouve justifiée.

2. Recherche de la solution sous forme d'une série de puissances de λ. Déterminants de Fredholm. Formellement la solution de l'équation

$$(I - \lambda A)\, \varphi = f$$

[1]) Le point $\mu = 0$ appartient nécessairement au spectre de l'opérateur A, car A^{-1} ne peut pas être borné dans H.

peut s'écrire sous la forme

$$\varphi = (I - \lambda A)^{-1} f. \tag{2}$$

Cette formule définit bien la solution, si $\| \lambda A \| < 1$, c.-à-d. si $| \lambda | < \frac{1}{\| A \|}$, car dans ce cas l'opérateur $(I - \lambda A)^{-1}$ existe, est défini sur H tout entier et est borné (cf. nº 7, § 5, chap. IV). En outre, l'opérateur $(I - \lambda A)^{-1}$ peut être considéré comme la somme de la série entière

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots,$$

dont la convergence (en norme) est assurée par la condition $| \lambda | < \frac{1}{\| A \|}$. Par conséquent, la solution (2) de l'équation (1) peut s'écrire ainsi :

$$\varphi = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^n A^n f + \ldots \tag{3}$$

On obtient le même résultat, si l'on cherche la solution de l'équation (1) sous la forme

$$\varphi_\lambda = \varphi_0 + \lambda \varphi_1 + \ldots + \lambda^n \varphi_n + \ldots$$

(où φ_n ne dépendent plus de λ). En substituant cette série à φ dans les deux membres de l'équation $\varphi = \lambda A \varphi + f$ et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de λ, on obtient

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = Af, \quad \ldots, \quad \varphi_n = A\varphi_{n-1} = A^n f, \quad \ldots,$$

c.-à-d. la série (3).

Montrons que si A est un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt, c.-à-d. un opérateur défini par un noyau $K(s, t)$ à carré intégrable, alors pour des valeurs de λ suffisamment petites l'opérateur $(I - \lambda A)^{-1}$ peut être représenté par la somme $I + \lambda \Gamma(\lambda)$ de l'opérateur identique I et d'un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt $\lambda \Gamma(\lambda)$ dont le noyau est à carré intégrable et dépend du paramètre λ. Cherchons d'abord comment on écrit les noyaux des opérateurs A^2, A^3, etc. Pour cela, considérons le problème plus général suivant : étant donné deux opérateurs intégraux

$$A\varphi = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \quad B\varphi = \int_a^b Q(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

où

$$\int_a^b \int_a^b | K(s, t) |^2\, ds\, dt = k^2 < \infty,$$

$$\int_a^b \int_a^b | Q(s, t) |^2\, ds\, dt = q^2 < \infty,$$

trouver le noyau de l'opérateur AB. On a

$$AB\varphi = \int_a^b \left\{ K(s, u) \int_a^b Q(u, t)\, \varphi(t)\, dt \right\} du =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s, u)\, Q(u, t)\, du \right\} \varphi(t)\, dt.$$

La possibilité d'intervertir ici l'ordre des intégrations résulte du théorème de Fubini, car la fonction à intégrer

$$K(s, u)\, Q(u, t)\, \varphi(t)$$

est sommable par rapport à u et t simultanément, comme produit de deux fonctions

$$K(s, u)\, \varphi(t) \quad \text{et} \quad Q(u, t)$$

dont chacune a le carré sommable.

Posons

$$R(s, t) = \int_a^b K(s, u)\, Q(u, t)\, du\,; \tag{4}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Bouniakovsky on a

$$|R(s, t)|^2 \leqslant \int_a^b |K(s, u)|^2\, du \int_a^b |Q(u, t)|^2\, du,$$

d'où

$$\int_a^b \int_a^b |R(s, t)|^2\, ds\, dt \leqslant k^2 q^2.$$

Ainsi, le produit de deux opérateurs intégraux du type de Hilbert-Schmidt est un opérateur du même type dont le noyau est défini par la formule (4). En particulier, si l'on pose $A = B$, on voit que A^2 est un opérateur intégral dont le noyau

$$K_2(s, t) = \int_a^b K(s, u)\, K(u, t)\, du$$

vérifie la condition

$$\int_a^b \int_a^b |K_2(s, t)|^2\, ds\, dt \leqslant \left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt \right]^2 = k^4,$$

d'où

$$\| A^2 \| \leqslant k^2$$

avec

$$k^2 = \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt.$$

De la même manière on peut montrer que chacun des opérateurs A^n est défini par le noyau

$$K_n(s, t) = \int_a^b K_{n-1}(s, u) K(u, t) \, du \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

vérifiant la condition

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(s, t)|^2 \, ds \, dt \leqslant k^{2n}. \tag{5}$$

Les noyaux $K_n(s, t)$ s'appellent *noyaux itérés.*

Pour $|\lambda| < \frac{1}{k}$ la série

$$K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(s, t) + \ldots$$

converge dans l'espace $L_2([a, b] \times [a, b])$, en vertu de l'évaluation (5), vers une fonction $\Gamma(s, t; \lambda)$ dont le carré est sommable par rapport à s et t pour tout $|\lambda| < \frac{1}{k}$. L'opérateur intégral $\Gamma(\lambda)$ dont la fonction $\Gamma(s, t; \lambda)$ sert de noyau est la somme de la série convergente

$$A + \lambda A^2 + \ldots + \lambda^{n-1} A^n + \ldots \tag{6}$$

d'opérateurs compacts; par conséquent, il est lui-même compact.

En multipliant cette somme par λ et en lui ajoutant l'opérateur identique I, on obtient l'opérateur $(I - \lambda A)^{-1}$. Donc, pour $|\lambda| < \frac{1}{k}$ l'opérateur $(I - \lambda A)^{-1}$ est bien la somme de l'opérateur identique I et de l'opérateur $\lambda\Gamma(\lambda)$ ayant pour noyau la fonction

$$\lambda\Gamma(s, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(s, t).$$

La condition $|\lambda| < \frac{1}{k}$ est suffisante, mais pas nécessaire, pour la convergence de la série (6). Dans certains cas cette série peut s'avérer convergente même pour toutes les valeurs de λ. Par exemple, si A est un opérateur du type de Volterra dont le noyau vérifie la condition

$$|K(s, t)| \leqslant M,$$

alors, comme le montre un calcul direct, pour les noyaux itérés $K_n(s, t)$ on a l'évaluation

$$|K_n(s, t)| \leqslant \frac{M^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!},$$

d'où l'on déduit que la série (6) est convergente pour tout λ.

Mais la série (6) a, en général, un rayon de convergence fini. D'autre part, l'équation $\varphi = \lambda A\varphi + f$ est résoluble pour toutes les valeurs de λ, sauf pour un nombre fini ou une infinité dénombrable, plus précisément, sauf pour les valeurs de λ telles que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de l'opérateur A. Fredholm a montré que pour un opérateur intégral A, défini par un noyau borné et continu $K(s, t)$, la solution de l'équation $\varphi = \lambda A\varphi + f$ peut être trouvée de la manière suivante. Introduisons la notation

$$K\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) & \ldots & K(s_1, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(s_n, t_1) & \ldots & K(s_n, t_n) \end{vmatrix}$$

et définissons les fonctions $D(\lambda)$ et $D(s, t; \lambda)$, appelées respectivement *déterminant de Fredholm* et *mineur de Fredholm*, par les formules:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} d\xi_1 d\xi_2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n + \ldots, \quad (7)$$

$$D(s, t; \lambda) = K\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix} s & \xi_1 \\ t & \xi_1 \end{pmatrix} d\xi_1 +$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} s & \xi_1 & \xi_2 \\ t & \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} d\xi_1 d\xi_2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} s & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ t & \xi_1 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_n + \ldots \quad (8)$$

Alors le noyau résolvant de l'équation intégrale

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt + f(s)$$

est défini par la formule

$$\Gamma(s, t; \lambda) = \lambda \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

et la solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)} f(t)\, dt \tag{9}$$

pour toutes les valeurs de λ telles que $\frac{1}{\lambda}$ n'est pas valeur propre de l'opérateur A correspondant au noyau $K(s, t)$. En outre, $D(\lambda)$ et $D(s, t; \lambda)$ sont des fonctions analytiques entières du paramètre λ et $D(\lambda) = 0$ si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de l'opérateur intégral A. Comme l'a montré T. Carleman en 1921, les formules (7), (8) et (9), obtenues par Fredholm sous l'hypothèse que le noyau $K(s, t)$ est continu, sont vraies de même pour tout noyau à carré intégrable. Nous n'exposons pas ici la démonstration des formules (7), (8) et (9) [1].

---

[1]) Cf. T. Carleman, Zur Theorie der Integralgleichungen, Math. Zeitschr. 9 (1921), 196-217, ainsi que F. Smithies, The Fredholm theory of integral equations, Duke Math. Journal, 8 (1941), 107-130.

Pour la démonstration des formules (7), (8) et (9) cf. [35] et [36].

Eléments de calcul différentiel dans un espace vectoriel

Dans les questions d'analyse fonctionnelle dont nous nous sommes occupés aux chapitres précédents les notions principales étaient celles de fonctionnelle linéaire et d'opérateur linéaire. Cependant, certaines questions qui se posent en analyse fonctionnelle sont essentiellement non linéaires ; c'est pourquoi à côté de l'analyse fonctionnelle « linéaire » on doit développer aussi l'analyse fonctionnelle « non linéaire », c.-à-d. étudier les fonctionnelles non linéaires et les opérateurs non linéaires dans des espaces de dimension infinie. A l'analyse fonctionnelle non linéaire on peut rapporter, par exemple, une branche si classique des mathématiques qu'est le calcul des variations dont les bases furent jetées déjà aux siècles XVII-XVIII, grâce aux travaux de Bernoulli, Euler, Legendre. Pourtant, dans son ensemble, l'analyse fonctionnelle non linéaire constitue une branche relativement nouvelle des mathématiques qui est encore loin d'être achevée. Dans ce chapitre nous allons exposer quelques notions premières se rapportant à l'analyse fonctionnelle non linéaire, notamment à la théorie de la différentiation, ainsi que quelques applications de ces notions.

§ 1. Différentiation dans un espace vectoriel

1. Différentielle forte (différentielle de Fréchet). Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et F une application d'un ouvert O de X dans Y. Nous dirons que cette application est *différentiable* en un point donné $x \in O$, s'il existe un opérateur linéaire borné $L_x \in \mathscr{L}(X, Y)$ tel que

$$F(x+h) - F(x) = L_x h + \alpha(x, h), \tag{1}$$

où

$$\frac{\|\alpha(x, h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad \text{quand } \|h\| \to 0. \tag{2}$$

L'expression $L_x h$ (qui représente évidemment un élément de l'espace Y, quel que soit $h \in X$) s'appelle *différentielle forte* (ou *différentielle de Fréchet*) de l'application F au point x. L'opérateur linéaire L_x lui-même s'appelle *dérivée* ou, plus précisément, *dérivée forte*

de l'application F au point x. Nous désignerons cette dérivée par $F'(x)$.

Si l'application F est différentiable au point x, la dérivée correspondante est définie de façon unique. En effet, soit

$$F(x+h)-F(x)=L_x^{(1)}h+\alpha_1(x, h)=L_x^{(2)}h+\alpha_2(x, h);$$

alors

$$L_x^{(1)}h-L_x^{(2)}h=\alpha_2(x, h)-\alpha_1(x, h)$$

et, en vertu de la relation (2), on a

$$\frac{\|L_x^{(1)}h-L_x^{(2)}h\|}{\|h\|}\to 0 \text{ quand } \|h\|\to 0. \qquad (3)$$

Or, si $L_x^{(1)}\neq L_x^{(2)}$, il existe h tel que

$$\frac{\|L_x^{(1)}h-L_x^{(2)}h\|}{\|h\|}=\lambda\neq 0.$$

Mais alors pour tout $\varepsilon\neq 0$ on a

$$\frac{\|L_x^{(1)}(\varepsilon h)-L_x^{(2)}(\varepsilon h)\|}{\|\varepsilon h\|}=\lambda,$$

de sorte que la relation (3) est impossible.

Nous établirons maintenant quelques résultats élémentaires qui découlent directement de la définition de la dérivée.

1. *Si* $F(x) = y_0 =$ const, *alors* $F'(x) \equiv 0$ (*c.-à-d. dans ce cas* $F'(x)$ *est l'opérateur nul*).

2. *La dérivée d'une application linéaire continue L est cette application même.*

En effet, d'après la définition on a

$$L(x+h) - L(x) = L(h).$$

3. (*Dérivée d'une fonction composée.*) *Soient* X, Y, Z *trois espaces vectoriels normés,* $U(x_0)$ *un voisinage du point* $x_0 \in X$, F *une application continue de ce voisinage dans* Y, $y_0 = F(x_0)$, $V(y_0)$ *un voisinage du point* $y_0 \in Y$ *et* G *une application continue de ce voisinage dans* Z. *Alors si l'application* F *est différentiable au point* x_0 *et* G *est différentiable au point* y_0, *l'application* $H = GF$ (qui est définie et continue sur un voisinage du point x_0) *est différentiable au point* x_0 *et on a*

$$H'(x_0)=G'(y_0)F'(x_0). \qquad (4)$$

En effet, d'après les hypothèses admises, on a [1])

$$F(x_0+\xi)=F(x_0)+F'(x_0)\xi+o_1(\xi)$$

[1]) Ici et plus loin les expressions de la forme $o(\xi)$ désignent des grandeurs (de l'espace normé correspondant ou numériques) vérifiant la condition

$$\frac{\|o(\xi)\|}{\|\xi\|}\to 0 \text{ lorsque } \|\xi\|\to 0.$$

et

$$G(y_0+\eta)=G(y_0)+G'(y_0)\,\eta+o_2(\eta).$$

Or, $F'(x_0)$ et $G'(y_0)$ sont des opérateurs linéaires bornés. Par conséquent,

$$H(x_0+\xi)=G(y_0+F'(x_0)\,\xi+o_1(\xi))=G(y_0)+G'(y_0)(F'(x_0)\,\xi+ \\ +o_1(\xi))+o_2(F'(x_0)\,\xi+o_1(\xi))=G(y_0)+G'(y_0)\,F'(x_0)\,\xi+o_3(\xi).$$

Si F, G et H sont des fonctions numériques, la formule (4) se réduit à la règle habituelle de dérivation d'une fonction composée.

4. *Soient F et G deux applications continues de X dans Y. Si F et G sont différentiables au point x_0, alors les applications $F+G$ et aF (où a est un nombre) sont aussi différentiables en ce point et on a*

$$(F+G)'(x_0)=F'(x_0)+G'(x_0), \tag{5}$$

et

$$(aF)'(x_0)=aF'(x_0). \tag{6}$$

En effet, de la définition des opérations donnant la somme de deux opérateurs et le produit d'un opérateur par un nombre il résulte immédiatement que

$$(F+G)(x_0+h)=F(x_0+h)+G(x_0+h)= \\ =F(x_0)+G(x_0)+F'(x_0)\,h+G'(x_0)\,h+o_1(h)$$

et

$$aF(x_0+h)=aF(x_0)+aF'(x_0)\,h+o_2(h),$$

d'où l'on déduit les égalités (5) et (6).

2. Différentielle faible (différentielle de Gâteaux). Soit de nouveau F une application définie sur une partie de X et à valeurs dans Y. On appelle *différentielle faible* ou *différentielle de Gâteaux* de l'application F au point x (pour l'accroissement h) la limite

$$DF(x,\,h)=\frac{d}{dt}F(x+th)\big|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t},$$

où la convergence est considérée par rapport à la norme de l'espace Y.

La différentielle faible $DF(x,\,h)$ peut ne pas être linéaire par rapport à h. Si, tout de même, cette linéarité a lieu, c.-à-d. si

$$DF(x,\,h)=F'_f(x)\,h,$$

où $F'_f(x)$ est un opérateur linéaire borné, cet opérateur s'appelle *dérivée faible* (ou *dérivée de Gâteaux*).

Remarquons que pour les dérivées faibles le théorème de la dérivation d'une fonction composée est, en général, faux. (Donner un exemple !)

3. Formule des accroissements finis. Soit O un ensemble ouvert dans X et soit $[x_0, x]$ un segment contenu tout entier dans O. Soit, enfin, F une application définie sur O, à valeurs dans Y et ayant en tout point du segment $[x_0, x]$ une dérivée faible F'_f. Posons $\Delta x = x - x_0$ et considérons la fonction numérique

$$f(t) = \varphi(F(x_0 + t\Delta x)),$$

définie pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, où φ est une fonctionnelle arbitraire de Y^*. Cette fonction est différentiable par rapport à t. En effet, dans l'expression

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \varphi\left(\frac{F(x_0+t\Delta x+\Delta t\,\Delta x)-F(x_0+t\Delta x)}{\Delta t}\right)$$

on peut passer à la limite sous le signe de la fonctionnelle linéaire continue φ. Ceci fait, on obtient

$$f'(t) = \varphi(F'_f(x_0+t\Delta x)\,\Delta x).$$

En appliquant à la fonction f sur $[0, 1]$ la formule des accroissements finis, on obtient

$$f(1) - f(0) = f'(\theta), \quad \text{où} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

c.-à-d.

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \varphi(F'_f(x_0 + \theta\Delta x)\,\Delta x). \tag{7}$$

Cette égalité est vraie pour toute fonctionnelle $\varphi \in Y^*$ (la valeur de θ dépend, bien sûr, de φ). De (7) on déduit que

$$|\varphi(F(x) - F(x_0))| \leqslant \|\varphi\| \cdot \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|F'_f(x_0 + \theta\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\|. \tag{8}$$

Choisissons maintenant la fonctionnelle non nulle φ de façon que

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \|\varphi\| \cdot \|F(x) - F(x_0)\|$$

(une telle fonctionnelle φ existe en vertu du théorème de Hahn-Banach). Alors de (8) on obtient

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|F'_f(x_0 + \theta\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| \quad (\Delta x = x - x_0). \tag{9}$$

Cette formule peut être considérée comme l'analogue de la formule des accroissements finis pour les fonctions numériques.

En appliquant la formule (9) à l'application

$$x \to F(x) - F'_f(x_0)\,\Delta x,$$

on obtient l'inégalité suivante:

$$\|F(x) - F(x_0) - F'_f(x_0)\,\Delta x\| \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|F'_f(x_0 + \theta\Delta x) - F'_f(x_0)\| \cdot \|\Delta x\|. \tag{10}$$

4. Relation entre les notions de différentiabilité faible et forte. La différentiabilité faible et la différentiabilité forte sont des notions différentes même dans le cas des espaces de dimension finie. En effet, du cours d'analyse on sait bien que pour une fonction numérique

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

où $n \geqslant 2$, l'existence de la dérivée

$$\frac{d}{dt} f(x + th)$$

pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n)$ fixé n'entraîne pas la différentiabilité de cette fonction, c.-à-d. la possibilité de mettre l'accroissement $f(x + h) - f(x)$ sous forme d'une somme contenant sa partie principale (linéaire par rapport à h) et un terme infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à h. Un exemple simple illustrant ce phénomène est fourni par la fonction de deux variables

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \tag{11}$$

Cette fonction est continue partout sur le plan, y compris le point (0, 0). Au point (0,0) sa différentielle faible existe et est égale à 0, car

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + th) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h_2^2} = 0.$$

Néanmoins, cette différentielle n'est pas la partie principale de l'accroissement de la fonction (11) au point (0, 0). En effet, si l'on pose $h_2 = h_1^2$, on obtient

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0)}{\|h\|} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1^5}{2h_1^4 \sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Cependant, lorsque l'application F a une dérivée forte, elle a aussi une dérivée faible et ces deux dérivées coïncident. En effet, pour une application fortement différentiable on a

$$F(x + th) - F(x) = F'(x)(th) + o(th) = tF'(x)h + o(th)$$

et

$$\frac{F(x + th) - F(x)}{t} = F'(x)h + \frac{o(th)}{t} \to F'(x)h.$$

Cherchons maintenant, à quelles conditions la différentiabilité faible de l'application F entraîne sa différentiabilité forte.

Théorème 1. *Si la dérivée faible $F'_f(x)$ de l'application F existe dans un voisinage U du point x_0 et représente dans ce voisinage une fonction (opératorielle) de x, continue en x_0, alors l'application F a au point x_0 une dérivée forte $F'(x_0)$ qui coïncide avec sa dérivée faible.*

D é m o n s t r a t i o n. Par hypothèse l'application F a une dérivée faible, c.-à-d. $DF(x_0, h) = F'_f(x_0)h$. En choisissant h de façon que $x_0 + th \in U$ pour tous les $t \in [0, 1]$, considérons l'expression

$$\omega(x_0, h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - F'_f(x_0)h. \tag{12}$$

Si y^* est un élément arbitraire de l'espace Y^*, dual de Y, en vertu de (12), on a

$$(\omega(x_0, h), y^*) = (F(x_0 + h) - F(x_0), y^*) - (F'_f(x_0)h, y^*). \tag{13}$$

Considérons la fonction $f(t) = (F(x_0 + th), y^*)$ de la variable numérique t. Elle est différentiable par rapport à t et

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{F(x_0 + th + \Delta th) - F(x_0 + th)}{\Delta t}, y^*\right) = (F'_f(x_0 + th)h, y^*).$$

Donc, en appliquant à f la formule des accroissements finis, on peut écrire l'égalité (13) sous la forme

$$(\omega(x_0, h), y^*) = ([F'_f(x_0 + \tau h) - F'_f(x_0)]h, y^*), \tag{13'}$$

où τ est un nombre dépendant de h, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Pour h fixé on peut choisir l'élément $y^* \in Y^*$ de façon que $\|y^*\| = 1$ et qu'on ait l'inégalité

$$|(\omega(x_0, h), y^*)| \geqslant \frac{1}{2}\|\omega(x_0, h)\| \cdot \|y^*\| = \frac{1}{2}\|\omega(x_0, h)\|.$$

De là et de l'égalité (13') on obtient l'évaluation

$$\|\omega(x_0, h)\| \leqslant 2\|f'_f(x_0 + \tau h) - F'_f(x_0)\| \cdot \|h\|.$$

Or, par hypothèse, $F'_f(x)$ est une fonction opératorielle de x continue au point x_0; on a donc

$$\lim_{h \to 0}\|F'_f(x_0 + \tau h) - F'_f(x_0)\| = 0,$$

ce qui signifie que $\|\omega(x_0, h)\|$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à un par rapport à $\|h\|$, c.-à-d. que $F'_f(x_0)h$ est la p a r t i e p r i n c i p a l e de la différence $F(x_0 + h) - F(x_0)$. Ceci prouve l'existence de la dérivée forte $F'(x_0)$, de même que sa coïncidence avec la dérivée faible. Dans la suite, sauf indication du contraire, nous allons considérer seulement des applications possédant des dérivées fortes et, donc, des dérivées faibles.

5. Fonctionnelles différentiables. Nous avons introduit la notion de différentielle d'une application, définie sur une partie d'un espace normé X et à valeurs dans un autre espace normé Y. La dérivée $F'(x)$ d'une telle application est pour chaque x un opérateur linéaire de X dans Y, c.-à-d. un élément de l'espace $\mathscr{L}(X, Y)$. En particulier, si Y est la droite numérique, alors F est une fonction numérique

sur X, c.-à-d. une fonctionnelle. La dérivée d'une telle fonctionnelle en un point x_0 est une fonctionnelle linéaire (dépendant de x_0), c.-à-d. un élément de l'espace X^*.

Exemple. Dans un espace de Hilbert réel H considérons la fonctionnelle $F(x) = \| x \|^2$. Alors

$$\| x + h \|^2 - \| x \|^2 = 2(x, h) + \| h \|^2;$$

$2(x, h)$ est la partie principale (linéaire par rapport à h) de cette expression; par conséquent,

$$F'(x) = F'_f = 2x.$$

Exercice. Déterminer la dérivée de la fonctionelle $\| x \|$ dans un espace de Hilbert.

(*Réponse*: $\frac{x}{\| x \|}$, si $x \neq 0$; pour $x = 0$ la dérivée n'existe pas.)

6. Fonctions abstraites. Supposons maintenant que c'est l'espace de départ X qui se réduit à la droite numérique et soit Y un espace de Banach. L'application $F(x)$ faisant correspondre à un nombre x un élément de Y, s'appelle *fonction abstraite*. La dérivée $F'(x)$ d'une fonction abstraite (si elle existe) est (pour chaque x) un élément de l'espace Y; c'est le vecteur tangent à la courbe $F(x)$ au point correspondant. Pour une fonction abstraite (puisqu'elle est fonction d'une variable numérique) la différentiabilité faible coïncide avec la différentiabilité forte.

7. Intégrale. Soit F une fonction abstraite d'une variable réelle t à valeurs dans un espace de Banach Y. Si F est définie sur un segment $[a, b]$, il est possible de définir l'intégrale de la fonction F sur $[a, b]$. Par cette intégrale on entend la limite des sommes intégrales

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$$

correspondant aux partitions

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}],$$

lorsque $\max(t_{k+1} - t_k) \to 0$. On désigne l'intégrale (qui est, évidemment, un élément de Y) par le symbole

$$\int_a^b F(t)\,dt.$$

Des raisonnements qui sur beaucoup de points sont analogues à ceux qu'on utilise pour les fonctions à valeurs numériques montrent que l'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe; elle possède, en outre, les mêmes propriétés que l'intégrale habituelle de Riemann. Parmi ces propriétés citons les suivantes.

1. Si U est une application linéaire continue donnée de l'espace Y dans un espace Z, alors

$$\int_a^b UF(t)\,dt = U\int_a^b F(t)\,dt.$$

2. Si $F(t)$ est de la forme $f(t)\,y_0$, où $f(t)$ est une fonction numérique et y_0 est un élément donné de Y, alors

$$\int_a^b F(t)\,dt = y_0\int_a^b F(t)\,dt.$$

3. $$\left\|\int_a^b F(t)\,dt\right\| \leqslant \int_a^b \|F(t)\|\,dt.$$

Soient de nouveau X et Y des espaces normés et soit $\mathbf{BC}(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications continues et bornées [1]) de X dans Y. Dans l'espace $\mathbf{BC}(X, Y)$ on peut introduire une topologie, en prenant pour voisinages de zéro les ensembles

$$U_{n,\varepsilon} = \{F\colon \sup_{\|x\|\leqslant n} \|F(x)\| < \varepsilon\}.$$

Sur le sous-espace $\mathscr{L}(X, Y) \subset \mathbf{BC}(X, Y)$ des applications linéaires continues de X dans Y cette topologie coïncide avec la topologie habituelle sur $\mathscr{L}(X, Y)$, définie par la norme opératorielle. Soit $J = [x_0, x_0 + \Delta x]$ un segment de droite dans X. Supposons qu'on a donné une application continue de ce segment dans l'espace $\mathbf{BC}(X, Y)$, c.-à-d. qu'à chaque point $x \in J$ on a fait correspondre une application $F(x) \in \mathbf{BC}(X, Y)$ dépendant continûment du paramètre $x \in J$. Alors on peut définir l'intégrale de $F(x)$ sur le segment J, en posant

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F(x)\,dx = \int_0^1 F(x_0 + t\Delta x)\,\Delta x\,dt \tag{14}$$

(ici $F(x_0 + t\Delta x)\,\Delta x$ est pour chaque $t \in [0, 1]$ un élément de l'espace Y; c'est l'image de l'élément $\Delta x \in X$ par l'application $F(x_0 + t\Delta x)$). Il est clair que l'intégrale figurant au second membre de (14) existe et qu'elle est un élément de l'espace Y.

Utilisons cette notion pour reconstituer une application à partir de sa dérivée.

---

[1]) Une application $F\colon X \to Y$ est dite *bornée*, si pour tout ensemble borné $Q \subset X$ l'ensemble $F(Q)$ est borné dans Y. Une application continue non linéaire n'est pas nécessairement bornée.

Considérons une application F de X dans Y ayant sur le segment $[x_0, x_0 + \Delta x]$ une dérivée forte $F'(x)$ qui dépend continûment de x. Alors il existe l'intégrale $\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx$. Montrons qu'on a l'égalité

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx = F(x_0+\Delta x) - F(x_0) \tag{15}$$

qui généralise la formule de Newton-Leibniz. En effet, par définition on a

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_0+t_k\Delta x)(\Delta x)(t_{k+1}-t_k) = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(\tilde{x}_k)(\Delta x_k),$$

où

$$\tilde{x}_k = x_0 + t_k\Delta x,\quad \Delta x_k = (t_{k+1}-t_k)\,\Delta x \ \text{ et } \ \delta = \max_k (t_{k+1}-t_k).$$

D'autre part, pour toute partition du segment $0 \leqslant t \leqslant 1$ on a

$$F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_0+t_{k+1}\Delta x) - F(x_0+t_k\Delta x)] = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)].$$

En vertu de la formule (10), on obtient

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k)\,\Delta x_k] \right\| \leqslant \leqslant \|\Delta x\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}-t_k) \sup_\theta \| F'(x_k+\theta\Delta x_k) - F'(\tilde{x}_k)\|. \tag{16}$$

Comme la dérivée $F'(x)$ est continue et, donc, uniformément continue sur le segment $[x_0, x_0 + \Delta x]$, le second membre de l'inégalité (16) tend vers zéro, lorsqu'on diminue indéfiniment les intervalles de la partition du segment $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Ceci prouve l'égalité (15).

8. Dérivées d'ordre supérieur. Soit F une application différentiable de X dans Y. Sa dérivée $F'(x)$ est pour tout $x \in X$ un élément

de $\mathscr{L}(X, Y)$, c.-à-d. F' est une application de l'espace X dans l'espace des opérateurs linéaires $\mathscr{L}(X, Y)$. Si cette application est différentiable, sa dérivée s'appelle *dérivée seconde* de l'application F et se note F''. Donc, $F''(x)$ est un élément de l'espace $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ des opérateurs linéaires de X dans $\mathscr{L}(X, Y)$. Montrons que les éléments de cet espace peuvent être interprétés d'une façon plus commode et intuitive comme applications bilinéaires.

Nous dirons qu'on a une *application bilinéaire* de l'espace X dans l'espace Y, si à tout couple ordonné d'éléments x, x' de X on a fait correspondre un élément $y = B(x, x') \in Y$ de façon que les deux conditions suivantes soient remplies:

1) quels que soient les éléments x_1, x_2, x_1', x_2' de X et les nombres α et β, on a

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, x_1') = \alpha B(x_1, x_1') + \beta B(x_2, x_1'),$$
$$B(x_1, \alpha x_1' + \beta x_2') = \alpha B(x_1, x_1') + \beta B(x_1, x_2');$$

2) il existe un réel positif M tel que

$$\| B(x, x') \| \leqslant M \cdot \| x \| \cdot \| x' \|, \tag{17}$$

quels que soient x, $x' \in X$.

La première de ces conditions signifie que l'application B est linéaire par rapport à chacune des variables x et x' ; il est aisé de voir que la deuxième de ces conditions équivaut à la continuité de B par rapport à l'ensemble de ses variables.

Le plus petit des nombres M vérifiant la condition (17) s'appelle *norme* de l'application bilinéaire B et se note $\| B \|$.

Les opérations linéaires sur les applications bilinéaires se définissent comme d'habitude et jouissent des propriétés habituelles. Par conséquent, les applications bilinéaires de X dans Y forment elles-mêmes un espace vectoriel normé que nous désignerons par $B(X^2, Y)$. Si l'espace Y est complet, $B(X^2, Y)$ l'est aussi.

A tout élément A de l'espace $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ on peut faire correspondre un élément de $B(X^2, Y)$, en posant

$$B(x, x') = (Ax) x'. \tag{18}$$

Il est évident que l'application ainsi définie est linéaire. Montrons qu'elle est aussi isométrique et applique $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ sur l'espace $B(X^2, Y)$ tout entier. En effet, si $y = B(x, x') = (Ax) x'$, on a

$$\| y \| \leqslant \| Ax \| \cdot \| x' \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \| \cdot \| x' \|,$$

d'où

$$\| B \| \leqslant \| A \|. \tag{19}$$

D'autre part, lorsqu'une application bilinéaire B est donnée, l'application $x' \to (Ax) x' = B(x, x')$ est, pour $x \in X$ fixé, une application linéaire de X dans Y.

Ainsi, à tout $x \in X$ on fait correspondre un élément Ax de l'espace $\mathscr{L}(X, Y)$; il est évident que Ax dépend linéairement de x, de sorte que l'application bilinéaire B définit un élément A de l'espace $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$. Il est clair, en outre, que l'application B peut être reconstituée à partir de A à l'aide de la formule (18) et que

$$\| Ax \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| (Ax) x' \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| B(x, x') \| \leqslant \| B \| \cdot \| x \|$$

d'où

$$\| A \| \leqslant \| B \|. \tag{20}$$

En comparant (19) et (20), on conclut que $\| A \| = \| B \|$. Ainsi, la correspondance entre $B(X^2, Y)$ et $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$, définie par la formule (18), est linéaire et isométrique, donc biunivoque. En outre, l'image de l'espace $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ est $B(X^2, Y)$ tout entier.

Nous avons vu que la dérivée seconde $F''(x)$ est un élément de l'espace $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$. D'après ce qu'on vient de dire, $F''(x)$ peut être considérée comme un élément de l'espace $B(X^2, Y)$.

Considérons un exemple élémentaire. Soient X et Y deux espaces euclidiens de dimensions m et n respectivement. Alors toute application linéaire de X dans Y peut être donnée à l'aide d'une matrice à n lignes et m colonnes. Donc, la dérivée $F'(x)$ de l'application F de X dans Y est une matrice (dépendante de $x \in X$). Si les bases dans X et Y sont choisies, par exemple,

$$e_1, \ldots, e_m \text{ dans } X$$

et

$$f_1, \ldots, f_n \text{ dans } Y,$$

on a

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_m e_m, \quad y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \ldots + y_n f_n.$$

L'application $y = F(x)$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{gathered} y_1 = F_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = F_n(x_1, \ldots, x_m) \end{gathered}$$

et

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

La dérivée seconde $F''(x)$ est définie dans ce cas par le système de $n \times m \times m$ grandeurs $a_{k,\,ij} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$. Un tel système de grandeurs $a_{k,\,ij}$ peut être considéré comme une application linéaire

de l'espace X dans l'espace $\mathscr{L}(X, Y)$, définie par la formule

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{k,ij} x_i,$$

ou comme une application bilinéaire de X dans Y, définie par la formule

$$y_k = \sum_{i,j=1}^{m} a_{k,ij} x_i x'_j.$$

Il est naturel d'introduire la notion de dérivée troisième, quatrième et, plus généralement, de dérivée n-ième d'une application F de X dans Y, en définissant la dérivée n-ième par récurrence comme dérivée de la dérivée $(n-1)$-ième. Il est clair qu'alors la dérivée n-ième de F est un élément de l'espace $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, \ldots, \mathscr{L}(X, Y) \ldots))$. En reprenant les raisonnements faits pour la dérivée seconde, on peut associer de façon naturelle à chaque élément de cet espace un élément de l'espace $N(X^{(n)}, Y)$ des applications n-linéaires de X dans Y. Par *application n-linéaire* on entend une correspondance $y = N(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ entre les systèmes ordonnés $(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ d'éléments de X et les éléments de l'espace Y possédant les propriétés suivantes:

1) elle est linéaire par rapport à chacune des variables x^i quand les autres sont fixées;

2) il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$\| N(x', x'', \ldots, x^{(n)}) \| \leqslant M \| x' \| \cdot \| x'' \| \ldots \| x^{(n)} \|.$$

Ainsi, la dérivée n-ième d'une application F peut être considérée comme un élément de l'espace $N(X^n, Y)$.

9. Différentielles d'ordre supérieur. Nous avons défini la différentielle (forte) d'une application F comme l'image d'un élément $h \in X$ par l'opérateur linéaire $F'(x)$, c.-à-d. $dF = F'(x)\, h$. On définit la différentielle d'ordre deux de F par la formule $d^2F = F''(x)(h, h)$, c.-à-d. comme l'expression quadratique qui correspond à l'application $F''(x) \in B(X^2, Y)$. D'une façon générale, on appelle différentielle d'ordre n de F l'expression $d^nF = F^{(n)}(x)(h, h, \ldots, h)$, c.-à-d. l'image dans Y d'un élément $(h, h, \ldots, h) \in X \times X \times \ldots \times X = X^n$ par l'application $F^{(n)}(x)$.

10. Formule de Taylor. La différentiabilité forte d'une application F signifie que la différence $F(x+h) - F(x)$ peut être décomposée en une somme de deux termes dont l'un linéaire par rapport à h et l'autre infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\| h \|$. Ce fait se généralise en une formule analogue à la formule de Taylor pour les fonctions numériques.

T h é o r è m e 2. *Soit F une application d'un ouvert $O \subset X$ dans Y telle que $F^{(n)}(x)$ existe et représente une fonction de x, uniformément continue sur O. Alors on a l'égalité*

$$F(x+h)-F(x)=F'(x)h+\frac{1}{2!}F''(x)(h,h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,\ldots,h)+\omega(x,h), \qquad (21)$$

où $\|\omega(x,h)\| = o(\|h\|^n)$.

D é m o n s t r a t i o n. On va procéder par récurrence sur n. Pour $n = 1$ l'égalité (21) est évidente. Considérons une valeur quelconque de n et supposons que la formule qui s'obtient de (21), lorsqu'on y remplace n par $n-1$, soit démontrée pour toutes les applications satisfaisant aux conditions du théorème avec $n-1$ au lieu de n. Alors pour l'application F' on a

$$F'(x+h)=F'(x)+F''(x)h+\frac{1}{2!}F'''(x)(h,h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)(h,\ldots,h)+\omega_1(x,h), \qquad (22)$$

où $\|\omega_1(x,h)\| = o(\|h\|^{n-1})$. En intégrant les deux membres de (22) sur le segment $[x, x+h]$ et en appliquant la formule de Newton-Leibniz (15), on obtient

$$F(x+h)-F(x)=\int_0^1 F'(x+th)h\,dt=$$
$$=\int_0^1 \Big\{F'(x)+tF''(x)h+\frac{1}{2!}t^2F'''(x)(h,h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}F^{(n)}(x)(h,\ldots,h)\Big\}h\,dt+R_n, \qquad (23)$$

où $R_n=\int_0^1 \omega_1(x,th)h\,dt$.

De (23) on déduit que

$$F(x+h)-F(x)=F'(x)h+\frac{1}{2!}F''(x)(h,h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,\ldots,h)+R_n,$$

où

$$\|R_n\|\leqslant\Big|\int_0^1\|\omega_1(x_1,th)\|\cdot\|h\|\,dt=o(\|h\|)^n).$$

Le théorème est donc démontré.

La formule (21) s'appelle *formule de Taylor pour les applications.*

§ 2. Problèmes d'extremum

L'un des problèmes les plus anciens et les mieux étudiés de l'analyse fonctionnelle non linéaire est le problème des extremums des fonctionnelles. L'étude de tels problèmes fait l'objet du calcul des variations. La plupart des méthodes utilisées en calcul des variations dépendent de la forme particulière des fonctionnelles dont on cherche les extremums. Toutefois, certains procédés et résultats généraux peuvent être formulés pour des fonctionnelles plus ou moins arbitraires. N'ayant pas l'intention de donner ici un exposé tant soit peu complet des méthodes variationnelles, nous nous bornerons à étudier en bref quelques éléments de la théorie générale qui se trouvent à la base du calcul des variations.

1. Condition nécessaire pour l'existence d'un extremum. Soit F une fonctionnelle réelle définie sur un espace de Banach X. On dit que la fonctionnelle *F admet au point x_0 un minimum*, si pour tous les x assez voisins de x_0 on a $F(x) - F(x_0) \geqslant 0$. On définit de manière analogue le maximum d'une fonctionnelle. Si la fonctionnelle F admet au point x_0 un minimum ou un maximum, nous dirons qu'elle admet en ce point un *extremum*.

De nombreux problèmes de physique et de mécanique peuvent être réduits à la recherche des extremums d'une fonctionnelle.

Dans le cas des fonctions de n variables, pour l'existence d'un extremum on a, comme on le sait, la condition nécessaire suivante: lorsqu'une fonction différentiable f admet au point $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un extremum, alors en ce point on a $df = 0$ ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Cette condition s'étend facilement aux fonctionnelles sur un espace normé arbitraire.

Théorème 1. *Pour qu'une fonctionnelle différentiable F présente au point x_0 un extremum, il faut que sa différentielle en ce point soit nulle pour tous les h:*

$$F'(x_0)\,h \equiv 0.$$

Démonstration. D'après la définition de la différentiabilité on a

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F'(x_0)\,h + o(h). \tag{1}$$

S'il existe un h tel que $F'(x_0)\,h \neq 0$, alors pour des valeurs réelles assez petites de λ le signe de l'expression $F'(x_0)(\lambda h) + 0(\lambda h)$ coïncide avec le signe de sa partie principale $F'(x_0)(\lambda h)$. Or, comme $F'(x_0)$ est une fonctionnelle linéaire, on a $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)\,h$. Par conséquent, si $F'(x_0)\,h \neq 0$, l'expression (1) peut prendre, pour

des valeurs suffisamment petites de h, aussi bien des valeurs positives que des valeurs négatives, de sorte que la fonctionnelle F ne peut pas avoir d'extremum au point x_0.

Examinons quelques exemples.

1. Soit

$$F(x)=\int_a^b f(t,\ x(t))\,dt, \tag{2}$$

où f est une fonction continûment différentiable. Cette fonctionnelle, considérée sur l'espace $C[a,\ b]$ des fonctions continues sur le segment $[a,\ b]$, est différentiable. En effet,

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^b [f(t,\ x+h)-f(t,\ x)]\,dt=$$
$$=\int_a^b f'_x(t,\ x)\,h(t)\,dt+o(h),$$

d'où

$$dF=\int_a^b f'_x(t,\ x(t))\,h(t)\,dt.$$

Si cette fonctionnelle linéaire est nulle pour tous les $h\in C[a,\ b]$, alors $f'_x(t,\ x)=0$. En effet, quel que soit $x(t)\in C[a,\ b]$, la dérivée $f'_x(t,\ x)$ est une fonction continue de t. Donc, si elle est différente de zéro en un point t_0, par exemple, si $f_x(t_0,\ x(t_0))>0$, cette inégalité a lieu aussi dans un voisinage $(\alpha,\ \beta)$ du point t_0. Alors en posant

$$h(t)=\begin{cases}(t-\alpha)(\beta-t) & \text{pour } \alpha\leqslant t\leqslant\beta,\\ 0 & \text{pour les autres } t,\end{cases}$$

on obtient

$$\int_a^b f'_x(t,\ x)\,h(t)\,dt>0.$$

La contradiction obtenue confirme notre assertion. L'équation $f'_x(t,\ x)=0$ définit, en général, une courbe, sur laquelle la fonctionnelle (2) peut présenter un extremum.

2. Sur le même espace $C[a,\ b]$ considérons la fonctionnelle

$$F(x)=\int_a^b\int_a^b K(\xi_1,\ \xi_2)\,x(\xi_1)\,x(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2, \tag{3}$$

où $K(\xi_1,\ \xi_2)$ est une fonction continue vérifiant la condition $K(\xi_1, \xi_2)=K(\xi_2,\ \xi_1)$. Il est aisé de voir que la différentielle de cette

fonctionnelle est égale à

$$dF = 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2.$$

Si cette expression est nulle pour tout $h \in C[a, b]$, en reprenant les raisonnements de l'exemple 1, on verra que

$$\int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, x(\xi_1)\, d\xi_1 = 0$$

pour tous les $\xi_2 \in [a, b]$. L'une des solutions de cette équation est la fonction $x \equiv 0$. Y a-t-il extremum en ce point? La réponse à cette question dépend de la fonction $K(\xi_1, \xi_2)$ et exige une étude plus approfondie.

3. Considérons la fonctionnelle

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, dt, \tag{4}$$

définie sur l'espace $C^1[a, b]$ des fonctions continûment différentiables sur le segment $[a, b]$. Ici $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ et $f(t, x, x')$ est une fonction deux fois différentiable. La fonctionnelle (4) joue un rôle très important dans de nombreuses questions du calcul des variations. Cherchons sa différentielle. En vertu de la formule de Taylor, on a

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b [f(t, x+h, x'+h') - f(t, x, x')]\, dt = \int_a^b (f'_x h + f'_{x'} h')\, dt + o(\|h\|),$$

où $\|h\|$ est la norme de la fonction h, considérée comme élément de l'espace $C^1[a, b]$. Ainsi, la condition nécessaire pour que la fonctionnelle (4) présente un extremum s'écrit sous la forme

$$dF = \int_a^b (f'_x h + f'_{x'} h')\, dt = 0. \tag{5}$$

Sous la forme intégrale (5) cette condition n'est pas commode pour la recherche du point $x \in C^1[a, b]$, où il y a extremum. Réduisons-la

à une forme plus commode, en intégrant par parties [1]) le terme $f'_{x'}h'$ dans (5). On obtient

$$\int_a^b f'_{x'}h'\,dt = f'_{x'}h\Big|_a^b - \int_a^b h\frac{d}{dt}f'_{x'}\,dt.$$

Donc,

$$dF = \int_a^b \left(f'_x - \frac{d}{dt}f'_{x'}\right) h\,dt + f'_{x'}h\Big|_a^b = 0. \qquad (6)$$

Cette égalité doit avoir lieu pour tous les h, y compris ceux qui vérifient la condition $h(a) = h(b) = 0$. Par conséquent,

$$\int_a^b \left(f'_x - \frac{d}{dt}f'_{x'}\right) h\,dt = 0$$

pour tous les h tels que $h(a) = h(b) = 0$. En raisonnant comme dans l'exemple 1, on en déduit que

$$f'_x - \frac{d}{dt}f'_{x'} = 0. \qquad (7)$$

L'égalité (6) se réduit donc à

$$f'_{x'}h\Big|_a^b = 0. \qquad (8)$$

Si la fonctionnelle (4) est considérée sur l'ensemble de toutes les fonctions continûment différentiables x, définies sur $[a, b]$, on peut choisir h de façon que $h(a) = 0$, $h(b) \neq 0$ et alors l'égalité (8) donne

$$f'_{x'}\big|_{t=b} = 0\,; \qquad (9)$$

de même, en posant $h(b) = 0$, $h(a) \neq 0$, on obtient

$$f'_{x'}\big|_{t=a} = 0. \qquad (10)$$

Ainsi, de la condition (6) (c.-à-d. du fait que la différentielle de la fonctionnelle s'annule) il résulte que la fonction x qui correspond à un extremum de la fonctionnelle (4) doit vérifier l'équation différentielle (7) et les conditions aux limites (9) et (10). La solution générale d'une équation différentielle du second ordre contient deux constantes arbitraires et nous disposons justement de deux conditions aux limites pour calculer ces constantes.

2. Différentielle seconde. Conditions suffisantes pour l'existence d'un extremum. Revenons sur la recherche de l'extremum d'une fonction de n variables. Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction vérifiant

---

[1]) Cette opération doit être encore justifiée, car l'existence de la dérivée x'' qui apparaît dans l'expression $\frac{d}{dt}f'_{x'}$ n'est pas supposée. A ce propos on peut consulter n'importe quel manuel de calcul des variations.

au point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ la condition $df = 0$. Alors, pour savoir si la fonction f admet ou non un extremum en ce point, il faut considérer, comme on le sait, la différentielle seconde de f. Plus précisément, on a les propositions suivantes.

1. *Si la fonction* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *admet au point* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *un minimum* (resp. un maximum), *elle vérifie en ce point la condition* $d^2f \geqslant 0$ (resp. $d^2f \leqslant 0$).

2. *Si la fonction* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *vérifie au point* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *les conditions*

$$df = 0 \quad et \quad d^2f = \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k} dx_i\, dx_k > 0$$

(pourvu que dx_i ne soient pas tous nuls), *elle admet en ce point un minimum* (resp. un maximum si $d^2f < 0$).

Bref, pour l'existence d'un minimum *il faut* que la différentielle seconde soit non négative et *il suffit* qu'elle soit définie positive.

Voyons maintenant, dans quelle mesure ces résultats peuvent être étendus aux fonctionnelles définies sur un espace de Banach.

Théorème 2. *Soit F une fonctionnelle réelle, définie sur un espace de Banach X et admettant au voisinage d'un point x_0 une dérivée seconde continue. Si cette fonctionnelle admet au point x_0 un minimum, on a* $d^2F(x_0) \geqslant 0$ [1]).

Démonstration. D'après la formule de Taylor on a

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F'(x_0)\,h + \frac{1}{2} F''(x_0)(h,\ h) + o(\|h\|^2).$$

Si la fonctionnelle F admet en x_0 un minimum, on a $F'(x_0) = 0$ et l'égalité précédente s'écrit sous la forme

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)(h,\ h) + o(\|h\|^2). \tag{11}$$

S'il existe un élément h tel que

$$F''(x_0)(h,\ h) < 0, \tag{12}$$

alors, puisque $F''(x_0)(\varepsilon h,\ \varepsilon h) = \varepsilon^2 F''(x_0)(h,\ h)$, il existe des h vérifiant la condition (12) et ayant la norme aussi petite que l'on veut. Or, pour des h suffisamment petits en norme le signe de l'expression (11) est défini par le signe du terme $\frac{1}{2} F''(x_0)(h,\ h)$. Par conséquent,

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)(h,\ h) + o(\|h\|^2) < 0,$$

c.-à-d. la fonctionnelle F n'a pas de minimum en x_0.

---

[1]) Cette inégalité signifie que $F''(x_0)(h,\ h) \geqslant 0$ pour tous les h.

Un théorème analogue peut être énoncé pour le maximum.

Le théorème démontré est une généralisation directe du théorème correspondant pour les fonctions d'un nombre fini de variables. Il n'en est plus de même, lorsqu'il s'agit de la condition suffisante. La condition $F''(x_0)(h, h) > 0$ qui, comme on l'a déjà mentionné, est suffisante pour l'existence d'un minimum dans le cas d'une fonction de n variables, n'est plus suffisante dans le cas des fonctionnelles définies sur un espace de Banach de dimension infinie. Considérons un exemple simple. Soit la fonctionnelle

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4$$

définie sur un espace de Hilbert. La différentielle première de cette fonctionnelle au point 0 est nulle ; sa différentielle seconde en ce point est égale à la série $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{h^3}$, c.-à-d. représente une fonctionnelle définie positive. Toutefois, la fonctionnelle F n'a pas de minimum au point 0, car $F(0) = 0$ et $F(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, 0, \ldots) = \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} < 0$, ce qui signifie que tout voisinage du point 0 contient des points pour lesquels $F(x) < F(0)$.

Introduisons la notion suivante. Une fonctionnelle quadratique B est dite *fortement positive*, s'il existe une constante $c > 0$ telle que $B(x, x) \geqslant c\|x\|^2$ pour tous les x.

Théorème 3. *Si une fonctionnelle F, définie sur un espace de Banach X, vérifie les conditions*

1) $dF(x_0) = 0$,

2) $d^2F(x_0)$ *est une fonctionnelle quadratique fortement positive, elle admet au point x_0 un minimum.*

Démonstration. Choisissons $\varepsilon > 0$ de façon que pour $\|h\| < \varepsilon$ la quantité $o(\|h\|^2)$ figurant dans l'égalité (11) vérifie la condition $\left| o(\|h\|^2) \right| < \frac{c}{4}\|h\|^2$. Alors

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2) >$$
$$> \frac{c}{4}\|h\|^2 > 0 \quad \text{pour} \quad \|h\| < \varepsilon.$$

Dans un espace de dimension finie une forme quadratique est fortement positive si et seulement si elle est définie positive ; c'est pourquoi la condition que la différentielle seconde soit définie posi-

tive (si en plus la différentielle première est nulle) est une condition suffisante pour que la fonction admette un extremum. Dans un espace de dimension infinie la condition que la différentielle seconde soit fortement positive est (comme le montre l'exemple ci-dessus) plus restrictive que la condition qu'elle soit définie positive.

La condition de positivité forte de la différentielle seconde qui assure l'existence d'un minimum est commode grâce au fait qu'elle peut être appliquée à toute fonctionnelle deux fois différentiable (indépendamment de sa forme concrète) sur tout espace de Banach. Mais, d'autre part, cette condition est trop grossière et difficile à vérifier dans des cas importants pour la pratique. Dans le calcul des variations on établit des conditions suffisantes plus fines d'extremum (utilisant la forme concrète des fonctionnelles qui interviennent dans les problèmes du calcul des variations), mais ces questions dépassent le cadre du présent ouvrage.

§ 3. Méthode de Newton

Une méthode bien connue de résolution des équations de la forme

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

(où f est une fonction numérique de variable numérique, définie sur un segment $[a, b]$) est *la méthode de Newton* (ou *la méthode des tangentes*). Elle consiste à chercher les approximations successives de la solution à l'aide de la formule de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

(pour approximation initiale x_0 on prend un point arbitraire du segment où la fonction f est définie). Le sens géométrique de cette méthode est illustré par la figure 24. On peut montrer que si x^* est la seule racine de l'équation (1) sur le segment $[a, b]$ et la fonction f admet sur ce segment une dérivée première non nulle et une dérivée seconde bornée, alors il existe « un champ d'attraction de la racine x^* », c.-à-d. un voisinage du point x^* tel que pour tout point x_0 de ce voisinage la suite (2) converge vers x^*.

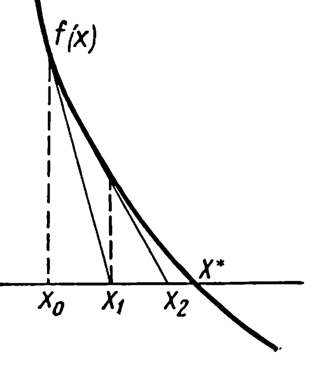


Fig. 24

La méthode de Newton peut être étendue aux équations opératorielles. Nous l'exposerons ici pour les équations dans un espace de Banach.

Considérons l'équation

$$F(x) = 0, \tag{3}$$

où F est une application d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y. Supposons que l'application F soit fortement différentiable dans une boule $B(x_0, r)$ de rayon r (dont le centre x_0 sera pris pour approximation initiale de la solution cherchée). En remplaçant, comme dans le cas d'un espace de dimension 1, l'expression $F(x_0) - F(x)$ par sa partie principale, c.-à-d. par l'élément $F'(x_0)(x_0-x)$, on obtient de (3) l'équation linéaire

$$F'(x_0)(x_0-x)=F(x_0)$$

dont la solution

$$x_1=x_0-[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)$$

peut être considérée comme l'approximation suivante de la solution exacte x de l'équation (3) (l'existence de l'opérateur $[F'(x_0)]^{-1}$ ici est, bien sûr, supposée). En reprenant les mêmes raisonnements, on obtient la suite

$$x_{n+1}=x_n-[F'(x_n)]^{-1}(F(x_n)) \tag{4}$$

des solutions approchées de l'équation (3). Dans un espace de dimension infinie la recherche de l'opérateur inverse $[F'(x_n)]^{-1}$ peut être un problème assez compliqué. Pour cette raison il est plus commode d'utiliser *la méthode modifiée de Newton* (cf. [27, 28]). La modification réside dans le remplacement de la suite (4) par la suite

$$x_{n+1}=x_n-[F'(x_0)]^{-1}(F(x_n)). \tag{5}$$

Dans ce cas l'opérateur inverse $[F'(x_0)]^{-1}$ est pris chaque fois pour la même valeur de la variable $x = x_0$. Bien que cette modification diminue la rapidité de la convergence, elle est souvent commode pour les calculs pratiques. Donnons maintenant un énoncé rigoureux de l'assertion en question, de même que sa démonstration.

Théorème 1. *Soit F une application fortement différentiable dans une boule $B(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r, dont la dérivée $F'(x)$ satisfait dans cette boule à la condition de Lipschitz :*

$$\| F'(x_1)-F'(x_2)\| \leqslant L\| x_1-x_2\|.$$

Supposons que $[F'(x_0)]^{-1}$ existe et soit

$$M=\|[F'(x_0)]^{-1}\|, \quad k=\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|, \quad h=MkL.$$

Alors, si $h<\frac{1}{4}$, dans la boule $\| x - x_0\| \leqslant kt_0$, où t_0 est la plus petite des racines de l'équation $ht^2 - t + 1 = 0$, il existe une racine unique x^* de l'équation $F(x) = 0$ et la suite $\{x_n\}$, définie par la formule de récurrence (5), *converge vers cette solution.*

Démonstration. Considérons dans l'espace X l'application $Ax = x - [F'(x_0)]^{-1}F(x)$. Sa dérivée forte est nulle au point x_0. Cette application transforme la boule $\| x - x_0\| \leqslant kt_0$ en elle-

même. En effet,

$$Ax - x_0 = x - x_0 - [F'(x_0)]^{-1} F(x) =$$
$$= [F'(x_0)]^{-1} \{F'(x_0)(x - x_0) - F(x) + F(x_0)\} -$$
$$- [F'(x_0)]^{-1} F(x_0).$$

Par conséquent,

$$\| Ax - x_0 \| \leqslant \| [F'(x_0)]^{-1} \| \cdot \| F'(x_0)(x - x_0) -$$
$$- F(x) + F(x_0) \| + \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \|,$$

c.-à-d.

$$\| Ax - x_0 \| \leqslant M \| F'(x_0)(x - x_0) - F(x) + F(x_0) \| + k. \tag{6}$$

Considérons l'application auxiliaire $\Phi(x) = F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)$. Elle est différentiable et sa dérivée est égale à $\Phi'(x) = F'(x) - F'(x_0)$. Si $\| x - x_0 \| < kt_0$, on a l'évaluation

$$\| \Phi'(x) \| = \| F'(x) - F'(x_0) \| \leqslant L \| x - x_0 \| \leqslant Lt_0 k.$$

D'après le théorème de la moyenne (formule (9), § 1) on en déduit que

$$\| \Phi(x) \| = \| \Phi(x) - \Phi(x_0) \| \leqslant Lt_0 k \| x - x_0 \| \leqslant Lt_0^2 k^2. \tag{7}$$

Donc, si $\| x - x_0 \| \leqslant t_0 k$, de (6) et (7) on obtient

$$\| Ax - x_0 \| \leqslant MLt_0^2 k^2 + k = k(MLt_0^2 k + 1) = k(ht_0^2 + 1) = kt_0.$$

Cela signifie que l'application A transforme la boule $\| x - x_0 \| \leqslant \leqslant kt_0$ en elle-même. Montrons maintenant que A est une contraction de cette boule. Pour $\| x - x_0 \| \leqslant kt_0$ on a

$$A'(x) = I - [F'(x_0)]^{-1} F'(x) = [F'(x_0)]^{-1} (F'(x_0) - F'(x)),$$

d'où

$$\| A'(x) \| \leqslant M \| F'(x_0) - F'(x) \| \leqslant ML \| x - x_0 \| \leqslant MLkt_0.$$

Or, t_0 est la plus petite des racines de l'équation $ht^2 - t + 1 = 0$, c.-à-d. $t_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h}$. C'est pourquoi

$$\| A'(x) \| \leqslant MLkt_0 \leqslant ht_0 = h \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2} = q < \frac{1}{2}, \tag{8}$$

d'où

$$\| Ax_1 - Ax_2 \| < \frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \|,$$

ce qui signifie que A est une contraction.

Par conséquent, dans la boule $\| x - x_0 \| \leqslant kt_0$ il existe un point fixe x^* et un seul de l'application A. Pour ce point on a

$$x^* = x^* - [F'(x_0)]^{-1} F(x^*), \quad \text{c.-à-d.} \quad F(x^*) = 0.$$

D'autre part,

$$Ax_n = x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n) = x_{n+1};$$

donc, en vertu du principe des contractions, la suite $\{x_n\}$ converge vers x^*.

De l'inégalité (8) on déduit immédiatement l'évaluation suivante de la rapidité de convergence de la méthode modifiée de Newton:

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \|. \tag{9}$$

Ainsi, l'erreur de la méthode modifiée de Newton décroît comme une progression géométrique. Notons, pour comparer, que la méthode habituelle de Newton (qui consiste à définir les approximations successives par la formule (4) et non par la formule (5)) converge plus rapidement qu'une progression géométrique : pour cette méthode on a

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h)^{2^n - 1} k.$$

Exemple. Considérons l'équation intégrale non linéaire

$$x(s) = \int_a^b K(s, t, x(t))\, dt, \tag{10}$$

où $K(s, t, u)$ est une fonction continue et continûment différentiable Introduisons l'application $y = F(x)$, définie par l'égalité

$$y(s) = x(s) - \int_a^b K(s, t, x(t))\, dt.$$

Alors l'équation (10) peut s'écrire sous la forme $F(x) = 0$.

Soit x_0 l'approximation initiale de la solution de cette équation. Alors la première correction $\Delta x(s) = x_1 - x_0$ est définie par l'équation

$$F'(x_0)\, \Delta x = -F(x_0). \tag{11}$$

Si la fonction $K(s, t, u)$ et l'espace dans lequel on considère l'équation (10) sont tels que la dérivée $F'(x)$ de l'application F peut être déterminée par « dérivation sous le signe d'intégration », c.-à-d. si

$$z = F'(x_0)\, x$$

signifie que

$$z(s) = x(s) - \int_a^b K'_u(s, t, x_0(t))\, x(t)\, dt,$$

alors l'équation (11) s'écrit sous la forme

$$\Delta x(s) = \int_a^b K'_u(s, t, x_0(t))\, \Delta x(t)\, dt + \varphi_0(s), \qquad (12)$$

où

$$\varphi_0(s) = \int_a^b K(s, t, x_0(t))\, dt - x_0(s).$$

De manière analogue on peut trouver les corrections suivantes.

Ainsi, la recherche de chaque approximation suivante se réduit à la résolution d'une équation intégrale l i n é a i r e. Lorsqu'on utilise la méthode modifiée de Newton, toutes les équations intégrales linéaires qu'on obtient de cette façon ont le même noyau. Pour un exposé plus détaillé de la méthode de Newton et des questions liées à cette méthode on peut consulter le livre [28], ainsi que l'article [27] de L. V. Kantorovitch qui est l'auteur des résultats fondamentaux concernant l'extension de la méthode de Newton aux équations opératorielles.

Algèbres de Banach

par V. M. Tikhomirov

Au chapitre III de cet ouvrage on s'est occupé de l'étude des espaces vectoriels. En particulier, on a mis en évidence l'importante classe d'espaces vectoriels, constituée par les espaces de Banach. Dans le présent complément on se propose d'étudier les algèbres de Banach, c.-à-d. les espaces de Banach, dans lesquels est définie la multiplication des éléments. La présence de la multiplication, jointe à la structure d'espace vectoriel et d'espace métrique, pourvoit les algèbres de Banach d'un grand nombre de propriétés remarquables.

§ 1. Définitions. Exemples d'algèbres de Banach

1. Algèbres de Banach. Isomorphisme des algèbres de Banach. Rappelons qu'on appelle espace vectoriel un ensemble non vide, muni de deux opérations, appelées addition et multiplication par un nombre, qui vérifient les huit axiomes formulés au § 1, chap. III.

Définition 1. Un espace vectoriel X s'appelle *algèbre*, s'il est muni d'une troisième opération, nommée multiplication et satisfaisant aux axiomes suivants:

1. $(xy)\,z = x\,(yz)$.
2. $x\,(y + z) = xy + xz$; $(y + z)\,x = yx + zx$.
3. $\alpha\,(xy) = (\alpha x)\,y = x\,(\alpha y)$.
4. S'il existe un élément $e \in X$ tel que $ex = xe = x$, quel que soit $x \in X$, on dit que e est l'*unité* de l'algèbre X et que X est une *algèbre avec unité* [1]).
5. Si la multiplication est commutative, c.-à-d. si elle satisfait à l'axiome

$$xy = yx,$$

on dit que X est une *algèbre commutative*.

Ce sont les algèbres commutatives avec unité qui feront l'objet principal de notre étude.

Toutes les algèbres considérées dans ce complément seront des algèbres sur le corps **C** des nombres complexes.

Au § 3 du chap. III on a introduit la notion d'espace normé,

[1]) L'unité d'une algèbre est toujours unique, car si un élément e' jouissait de la propriété 4, on aurait $ee' = e = e'$.

c.-à-d. d'espace vectoriel muni d'une norme $\| x\|$ satisfaisant aux trois axiomes formulés à la page 134.

Définition 2. Un espace normé X s'appelle *algèbre normée*, s'il est une algèbre avec unité qui vérifie en plus les deux axiomes:

6. $\| e\| = 1$.
7. $\| xy\| \leqslant \| x\| \cdot \| y\|$.

Si une algèbre normée X est, en outre, complète (c.-à-d. est un espace de Banach), on l'appelle *algèbre de Banach*.

Une application $F: X \to Y$ s'appelle *homomorphisme* de l'algèbre X dans l'algèbre Y, si elle vérifie les conditions:

$$F(x + y) = Fx + Fy, \tag{1}$$

$$F(\alpha x) = \alpha Fx, \tag{2}$$

$$F(xy) = Fx \cdot Fy. \tag{3}$$

Deux algèbres X et Y sont dites *isomorphes*, s'il existe une application bijective F de X sur Y vérifiant les conditions (1)-(3).

Deux espaces normés X et Y sont dits *isométriques*, s'il existe une application bijective $F: X \leftrightarrow Y$ vérifiant les conditions (1) et (2) et telle que

$$\| Fx\|_Y = \| x\|_X.$$

Définition 3. Deux algèbres de Banach X et Y sont dites *isométriquement isomorphes*, s'il existe un isomorphisme d'algèbre F: $X \leftrightarrow Y$ qui est en même temps une isométrie de X et Y, considérés comme espaces normés.

2. Exemples d'algèbres de Banach.

1. Le corps **C**. Les nombres complexes $\{z\}$ fournissent le plus simple exemple d'algèbre de Banach, si l'on introduit une norme par la formule

$$\| z\| = | z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z = x + iy).$$

Les nombres complexes forment un *corps* que l'on note **C**. Pour tous les éléments de **C**, excepté zéro, est définie la division, c.-à-d. l'opération inverse de la multiplication. Nous montrerons plus bas que **C** *est la seule algèbre normée qui possède la structure de corps.*

2. L'algèbre C_T. Soit T un espace topologique de Hausdorff compact. Désignons par C_T l'espace vectoriel constitué par l'ensemble des fonctions complexes continues $x(t)$ définies sur T, muni des opérations habituelles donnant la somme de deux fonctions et le produit d'une fonction par un nombre, ainsi que de la norme

$$\| x\| = \max_{t \in T} | x(t)|.$$

Aux chap. II et III on a vu un cas particulier de l'espace C_T, où le rôle de T était joué par un segment $[a, b]$ de la droite réelle. Un autre cas particulier important de l'espace C_T est fourni par

l'espace $\mathbf{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n)\}$ des vecteurs complexes à n dimensions, c.-à-d. des fonctions sur un espace de n points. L'addition, la multiplication par un nombre et la multiplication des éléments de $\mathbf{C}^n$ se réalisent en coordonnées; la norme sur $\mathbf{C}^n$ est définie par la formule

$$\| z \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | z_i |.$$

L'espace C_T est une algèbre de Banach commutative ayant pour unité la fonction $e(t) \equiv 1$. La vérification du fait que tous les axiomes sont satisfaits ne présente aucune difficulté.

3. *L'algèbre $\mathscr{A}$ des fonctions analytiques dans un disque.* Désignons par $\mathscr{A}$ l'espace vectoriel des fonctions $x(z)$ d'une variable complexe z, définies et continues sur le disque $K \equiv \{z: | z | \leqslant 1\}$ et analytiques à l'intérieur de ce disque. On définit la multiplication dans $\mathscr{A}$ comme la multiplication habituelle des fonctions et on introduit une norme par la formule

$$\| x \| = \max_{|z| \leqslant 1} | x(z) |.$$

Ceci fait de $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach commutative avec unité. Tous les axiomes sont évidents.

4. *L'algèbre l_1.* Désignons par l_1 l'ensemble des suites complexes infinies dans les deux sens et absolument sommables $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, muni de la norme

$$\| x \| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} | x_k |. \quad (4)$$

Appelons produit $x \cdot y$ de deux suites

$$x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0, \ldots, x_n, \ldots)$$

et

$$y = (\ldots, y_{-n}, \ldots, y_0, \ldots, y_n, \ldots)$$

leur convolution $z = x * y$, c.-à-d. la suite dont les termes sont définis par la formule

$$z_n = (x * y)_n = \sum_{k=-\infty} x_{n-k} y_k. \quad (5)$$

Si à chaque suite x de l_1 on associe la série trigonométrique

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

alors la suite définie par la formule (5) correspond au produit $x(t) \times \times y(t)$ des fonctions construites à partir des suites x et y. Ainsi, l'algèbre l_1 et l'algèbre W des fonctions $x(t)$ à série de Fourier absolument convergente et munie de la norme (4) sont identiques (isométriquement isomorphes). En vertu de cette dernière circonstance, les axiomes de l'algèbre et de l'espace normé pour l_1 deviennent

faciles à vérifier. Vérifions, par exemple, l'axiome 7. Pour $z = x*y$

$$\|z\| = \sum_n |z_n| = \sum_n \left|\sum_k x_{n-k} y_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n \sum_k |x_{n-k}| \, |y_k| \leqslant \sum_k \left(\sum_n |x_{n-k}|\right) |y_k| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

L'algèbre W est évidemment commutative; par conséquent, l'algèbre l_1 est aussi commutative. L'unité de l_1 est la suite e qui correspond à la fonction $e(t) \equiv 1$: tous les termes de cette suite sont nuls, excepté celui d'indice 0 qui est égal à 1.

5. L'algèbre des opérateurs bornés. Soit X un espace de Banach. Considérons l'espace $\mathscr{L}(X, X)$ des opérateurs linéaires continus qui appliquent X dans lui-même, muni des opérations habituelles donnant la somme et le produit de deux opérateurs, ainsi que le produit d'un opérateur par un nombre (cf. n°s 1-3, § 5, chap. IV). L'élément unité de $\mathscr{L}(X, X)$ est l'opérateur identique. Faisons de $\mathscr{L}(X, X)$ une algèbre de Banach, en définissant la norme, comme d'habitude, par la formule

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|.$$

En effet, l'axiome 7 a été déjà vérifié (cf. formule (4), page 217). La démonstration de la complétude de $\mathscr{L}(X, X)$ a été proposée au lecteur comme exercice à la page 217. L'algèbre $\mathscr{L}(X, X)$ est l'un des plus importants exemples d'algèbre de Banach non commutative avec unité.

3. Idéaux maximaux.

Définition 4. On appelle *idéal* d'une algèbre commutative X un sous-espace I de X tel que pour tout $y \in I$ et pour tout $x \in X$ le produit yx appartient à I. L'idéal constitué du seul élément nul et l'idéal constitué par l'algèbre X tout entière sont appelés idéaux triviaux; dans la suite ils ne seront pas étudiés. Un idéal est dit *maximal*, s'il n'est contenu dans aucun autre idéal non trivial.

Etudions les notions introduites sur l'exemple de l'algèbre C_T.

Soit $\mathscr{F}$ une partie non vide du compact T. L'ensemble $M_{\mathscr{F}} = \{x(t) \in C_T : x(t) = 0,\ t \in \mathscr{F}\}$ des fonctions, nulles sur $\mathscr{F}$, forme, comme il est aisé de voir, un idéal de C_T. Les idéaux maximaux de C_T admettent une description simple qui permet, en outre, de mieux comprendre l'essence de la théorie des algèbres de Banach commutatives.

Lemme 1. *Un idéal maximal de l'algèbre C_T est l'ensemble des fonctions de C_T nulles en un point fixe $\tau_0 \in T$.*

Démonstration. a) Soit $M_{\tau_0} = \{x(t) \in C_T : x(\tau_0) = 0\}$. Alors M_{τ_0} est un idéal. Montrons qu'il est maximal. En effet, soit $x_0(t) \notin M_{\tau_0}$, c.-à-d. $x_0(\tau_0) \neq 0$. Pour tout $y(t) \in C_T$ posons $z(t) =$

$= y(t) - \frac{y(\tau_0)\, x_0(t)}{x_0(\tau_0)}$. Alors $z(\tau_0) = 0$ et, par conséquent, $z(t)$ appartient à M_{τ_0}. Ainsi, pour tout élément n'appartenant pas à M_{τ_0}, l'idéal engendré par M_{τ_0} et cet élément est trivial. Par conséquent, M_{τ_0} est maximal.

b) Inversement, soit M un idéal maximal de C_T.

Montrons qu'il existe un point, où toutes les fonctions appartenant à cet idéal sont nulles. En effet, s'il n'en est pas ainsi, pour tout point $\tau \in T$ il existe une fonction $x_\tau(t) \in M$ telle que $x_\tau(\tau) \neq$ $\neq 0$. En vertu de la continuité de $x_\tau(t)$ par rapport à t, il existe un voisinage U_τ du point τ tel que $x_\tau(t) \neq 0$ dans U_τ. Du recouvrement ouvert $T \subset \bigcup_\tau U_\tau$ extrayons un recouvrement fini $U_{\tau_1}, \ldots, U_{\tau_n}$.

Alors d'après la définition de l'idéal, $x_0(t) = x_{\tau_1}(t) \cdot \overline{x_{\tau_1}(t)} + \ldots$ $\ldots + \overline{x_{\tau_n}(t)} \cdot x_{\tau_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} | x_{\tau_k}(t) |^2$ appartient à M.

Comme $x_0(t) > 0$ partout sur T, la fonction $\frac{1}{x_0(t)}$ est continue. C'est pourquoi $1 = \frac{1}{x_0(t)} \cdot x_0(t) \in M$. Or, l'idéal contenant l'unité d'une algèbre contient tous les éléments de cette algèbre, car $y(t) = y(t) \cdot 1$. On en déduit que M est un idéal trivial, ce qui contredit l'hypothèse qu'il est maximal. Par conséquent, M est un idéal non trivial.

Ainsi entre les idéaux maximaux et les points du support T on peut établir une correspondance biunivoque. Ceci permet de traiter les fonctions sur T comme des « fonctions sur l'espace des idéaux maximaux ».

Nous allons montrer (et c'est le but de la théorie des algèbres de Banach commutatives qui sera exposée plus bas) qu'une telle algèbre X peut être réalisée par une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues sur l'espace topologique de Hausdorff compact, constitué par les idéaux maximaux de l'algèbre X.

§ 2. Spectre et résolvante

Dans ce paragraphe l'algèbre X n'est pas nécessairement commutative, mais possède un élément unité. Les considérations de ce paragraphe sont pour la plupart pareilles à celles du § 5, chap. IV.

1. Définitions et exemples.

D é f i n i t i o n. Un élément $x \in X$ est dit *inversible*, s'il admet un inverse, c.-à-d. s'il existe un élément x^{-1} tel que

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e.$$

Dans le cas contraire on dit que l'élément x est *non inversible*.

On appelle *spectre* $\sigma(x)$ d'un élément $x \in X$ l'ensemble des nombres complexes λ tels que l'élément $\lambda e - x$ est non inversible. Si $\lambda \notin \sigma(x)$, le point λ est dit *régulier.*

La fonction

$$R_\lambda : \mathbf{C} \setminus \sigma(x) \to X, \quad R_\lambda x = x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1},$$

définie sur l'ensemble des points réguliers d'un élément x s'appelle *résolvante* de cet élément.

On appelle *rayon spectral* $r(x)$ d'un élément $x \in X$ le nombre

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|. \tag{1}$$

Illustrons ces importantes notions sur des exemples.

a) Si $X = \mathbf{C}$, tous les éléments, sauf l'élément nul, sont inversibles.

b) Si $X = C_T$, pour l'inversibilité de $x(t)$ il faut et il suffit que la fonction $x(t)$ soit partout différente de zéro. Le spectre $\sigma(x)$ coïncide avec l'ensemble des valeurs de $x(t)$; la résolvante R_λ est égale à

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda - x(t)}$$

et le rayon spectral

$$r(x) = \|x\| = \max_t |x(t)|.$$

c) Si $X = \mathscr{L}(Y, Y)$ est l'algèbre des opérateurs bornés les éléments inversibles sont les opérateurs inversibles; le spectre et la résolvante dans ce cas coïncident avec le spectre et la résolvante d'un opérateur, introduits au nº 7, § 5, chap. IV. Au fond, dans ce paragraphe nous étudions sous forme générale les notions qu'on a déjà introduites pour l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés.

2. Propriétés du spectre.

Théorème 1. 1°. *Quelle que soit la fonctionnelle $f(x)$ de l'espace dual X^*, la fonction $f(x(\lambda)) = F(\lambda)$ est analytique sur $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$ et $F(\lambda) \to 0$ quand $|\lambda| \to \infty$.*

2°. *Le spectre $\sigma(x)$ d'un élément x de l'algèbre de Banach X est un ensemble non vide, compact dans $\mathbf{C}$. On a l'inégalité*

$$r(x) \leqslant \|x\|. \tag{2}$$

Avant de démontrer le théorème 1 considérons quelques lemmes.

Lemme 1. (cf. théorème 5, § 5, chap. IV). *Soit x un élément de l'algèbre de Banach X ayant la norme inférieure à 1. Alors l'élément $e - x$ est inversible et*

$$(e - x)^{-1} = e + x + \ldots + x^n + \ldots$$

En effet, posons $s_n = e + x + \ldots + x^n$. Alors

$$\| s_n - s_{n+k} \| = \| x^{n+1} + \ldots + x^{n+k} \| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \| x \|^{n+i} = \frac{\| x \|^{n+1} - \| x \|^{n+k+1}}{1 - \| x \|} \to 0.$$

Donc, s_n est une suite de Cauchy. Comme X est un espace complet, cette suite converge vers un élément $s \in X_0$. On a

$$s(e - x) = \lim_{n\to\infty} s_n (e - x) = \lim_{n\to\infty} (e - x^{n+1}) = e.$$

On démontre de la même façon que $(e - x)\, s = e$.

Corollaire. Quel que soit $x \in X$, on a

$$(e - tx)^{-1} \to e \text{ quand } t \to 0.$$

En effet,

$$(e - tx)^{-1} = \lim_{n\to\infty} (e + tx + \ldots + (tx)^n) = e + O(t).$$

Lemme 2. (cf. théorème 4, § 5, chap. IV). *Soit* x_0 *un élément inversible et* $\| \Delta x \| \leqslant \| x_0^{-1} \|^{-1}$.

Alors $x_1 = x_0 + \Delta x$ *est un élément inversible et*

$$x_1^{-1} = (e + x_1^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1}.$$

En effet, $x_1 = x_0 + \Delta x = x_0 (e + x_0^{-1} \Delta x) = x_0 (e - x)$, $\| x \| = \| -x_0^{-1} \Delta x \| < 1$.

En appliquant le lemme 1, on obtient

$$x_1^{-1} = (e - x)^{-1} x_0^{-1},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1. *L'ensemble des éléments inversible d'une algèbre de Banach est ouvert (par rapport à la topologie normée de l'algèbre de Banach). L'ensemble des éléments non inversibles est fermé.*

Corollaire 2. *La résolvante* $x(\lambda)$ *est une fonction continue de* λ *sur* $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$.

En effet, $x(\lambda_0 + \Delta\lambda) = (\lambda_0 e - x + \Delta\lambda e)^{-1} = (e + \Delta\lambda x(\lambda_0))^{-1} \times x(\lambda_0) \xrightarrow[\Delta\lambda \to 0]{} x(\lambda_0)$, en vertu du corollaire du lemme 1.

Lemme 3 (cf. n° 7, § 5, chap. IV). *Soit* $\lambda, \mu \in \mathbf{C} \setminus \sigma(x)$. *Alors*

a) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = R_\mu x \cdot R_\lambda x$,

b) $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$ (*identité de Hilbert*)

Démonstration. a) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} = [(\mu e - x)(\lambda e - x)]^{-1} = [(\lambda e - x)(\mu e - x)]^{-1} = R_\mu x \cdot R_\lambda x$.

b) En vertu de a) et de la définition de R_λ et R_μ, on a

$$R_\lambda x = (\mu e - x) R_\lambda x \cdot R_\mu x,$$
$$R_\mu x = (\lambda e - x) R_\lambda x \cdot R_\mu x,$$

d'où $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu e - \lambda e) R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. *Si* $\lambda_0 \in \mathbf{C} \setminus \sigma(x)$, *alors* $x'(\lambda_0) = -x^2(\lambda_0)$.

En vertu de b) et du corollaire 2 du lemme 2, on a:

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda \to \lambda_0} x(\lambda) \cdot x(\lambda_0) = -x^2(\lambda_0).$$

Démontrons maintenant le théorème 1.

1°. Soit $f(x)$ une fonctionnelle linéaire continue de x, c.-à-d. $f(x) \in X^*$. Posons $F(\lambda) = f(x(\lambda)) = f(R_\lambda x)$. En vertu du corrollaire du lemme 3, pour $\lambda_0 \notin \sigma(x)$ on a:

$$F'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} f\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) =$$

$$= f\left(\lim_{\lambda \to \lambda_0}\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right)\right) = -f(x^2(\lambda_0)).$$

Ainsi, l'analyticité de $F(\lambda)$ est démontrée.

D'autre part, pour $|\lambda| > \|x\|$, en vertu du lemme 1, on a:

$$|F(\lambda)| \leqslant \|f\|_{X^*} \|x(\lambda)\|_X = \|f\|_{X^*} \|(\lambda e - x)^{-1}\| =$$

$$= \frac{\|f\|_{X^*}}{|\lambda|} \left\| \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0,$$

2°. a) Le spectre $\sigma(x)$ est non vide. Soit $\sigma(x) = \varnothing$. Alors d'après 1°, quel que soit l'élément $f \in X^*$, $F(\lambda)$ est une fonction entière tendant vers zéro quand $|\lambda| \to \infty$. Cela signifie que $F(\lambda) \equiv 0$, c.-à-d. que $f((\lambda e - x)^{-1}) = 0$ pour tout $f \in X^*$. Mais alors, en vertu du corollaire du théorème de Hahn-Banach (nº 3, § 1, chap. IV), on doit avoir $x^{-1} = 0$, ce qui est impossible.

b) Le spectre $\sigma(x)$ est compact. Si $|\lambda| > \|x\|$, alors d'après le lemme 1 l'élément $\lambda e - x = \lambda\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)$ est inversible, d'où l'on déduit que le spectre $\sigma(x)$ est borné, en même temps que l'inégalité (2). Du lemme 2 il résulte immédiatement que $\sigma(x)$ est fermé: si λ_0 est un point régulier, le voisinage $|\Delta\lambda| < \|x(\lambda_0)\|$ est constitué uniquement des points réguliers, car

$$(\lambda_0 + \Delta\lambda) e - x = \lambda_0 e - x + \Delta\lambda e.$$

Citons deux corollaires du théorème 1.

Corollaire 1. *Si une algèbre de Banach sur le corps* **C** *est elle-même un corps, alors elle est isométriquement isomorphe à* **C**.

En effet, soit X un « corps de Banach » et soit x un élément arbitraire de X. Cherchons le nombre λ pour lequel l'élément $\lambda e - x$ est non inversible, donc nul. On a $x = \lambda e$. Il est clair que la correspondance $x \leftrightarrow \lambda$ est un isomorphisme de X sur **C**. Comme $\|e\| = 1$,

on a $\| x \| = | \lambda |$. La correspondance considérée est donc une isométrie de X sur $\mathbf{C}$.

Corollaire 2. *Le spectre de tout opérateur non nul $A \in \in \mathcal{L}(X, X)$ est non vide.*

Cette proposition a été déjà énoncée sans démonstration au § 5, chap. IV (cf. page 228).

3. Théorème du rayon spectral.

Théorème 2. *On a la formule suivante pour le rayon spectral :*

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| x^n \|}. \tag{3}$$

En effet, soit f un élément quelconque de X^*. D'après le théorème 1, la fonction $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ est analytique sur $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$. En particulier, $F(\lambda)$ est analytique dans le domaine $| \lambda | > \| x \|$.

En vertu du lemme 1, dans ce domaine on a

$$x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}},$$

d'où

$$F(\lambda) = f(x(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

Cette décomposition, vraie pour $| \lambda | > \| x \|$ en vertu du lemme 1, a lieu aussi pour $| \lambda | > r(x)$ en vertu du théorème d'unicité pour les fonctions analytiques. Par conséquent,

$$\sup_n \left| \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}} \right| < \infty.$$

Nous avons établi que l'ensemble des vecteurs $\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$ est faiblement borné ; il est donc fortement borné. (Ce résultat, appelé parfois théorème de Banach-Steinhaus, a été démontré au § 3, chap. IV ; pour un exposé plus détaillé de cette question, cf. le traité [21], chap. II.) Ainsi, il existe un nombre $c(\lambda)$ dépendant de λ tel que

$$\left\| \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\| < c(\lambda),$$

d'où $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant | \lambda |$ pour tous les λ tels que $| \lambda | > r(x)$; donc

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \| x^n \|^{1/n} \leqslant r(x).$$

D'autre part, si $\lambda \in \sigma(x)$, on a $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, car l'élément $\lambda^n e - x^n$ est, évidemment, divisible par $\lambda e - x$.

D'après le théorème 1, si $\mu \in \sigma(x)$, on a $| \mu | \leqslant \| x \|$.

En posant $\lambda = \lambda^n$, on en conclut que si $\lambda \in \sigma(x)$, on a $|\lambda| \leqslant \leqslant \sqrt[n]{\|x^n\|}$, d'où $r(x) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

Le théorème est démontré.

§ 3. Quelques résultats auxiliaires

Dans ce paragraphe nous avons rassemblé une série de propositions auxiliaires dont la démonstration n'exige que des procédés techniques usuels.

1. Théorème de l'algèbre quotient. Soient X une algèbre de Banach commutative à élément unité et I un idéal de X.

Notons tout d'abord que I est constitué uniquement des éléments non inversibles, car si $z \in I$ est inversible, alors pour tout $x \in X$ on a $(xz^{-1})\, z = x \in I$, ce qui signifie que I est trivial. D'autre part, en vertu du lemme 1, § 2, la distance de l'unité e à tout élément non inversible, et donc à tout idéal, est supérieure ou égale à 1.

Considérons maintenant l'espace quotient X/I (cf. § 1, chap. III) et introduisons-y l'opération de multiplication, en appelant produit de deux classes ξ et η de X/I la classe ζ qui contient l'élément $x \cdot y$, où x et y sont des représentants des classes ξ et η. (Vérifier que le résultat ne change pas, si l'on remplace x et y par n'importe quels deux autres représentants des mêmes classes ξ et η et que l'opération de « multiplication » ainsi introduite satisfait aux axiomes 1-5 du § 1.) Ainsi, l'espace X/I devient une algèbre commutative. On l'appelle *algèbre quotient* de X par l'idéal I.

Introduisons dans X/I une norme, en posant

$$\|\xi\| = \inf_{y \in I} \|x + y\|,$$

où x est un représentant de ξ.

On a le théorème suivant.

Théorème 1. *Si X est une algèbre de Banach et I est un idéal fermé de X, alors l'algèbre quotient X/I est aussi une algèbre de Banach.*

Il s'agit de démontrer que: 1) la fonctionnelle $\|\xi\|$ satisfait aux axiomes de la norme, 2) X/I est un espace complet pour cette norme.

1) a) $\|\xi\| = \inf\limits_{y \in I} \|x + y\| \geqslant 0$, car la norme est non négative.

D'autre part, $\|0\| = \inf\limits_{y \in I} \|0 + y\| = 0$. Soit $|\xi_0| = 0$. Alors $\inf\limits_{y \in I} \|x_0 + y\| = 0$, $x_0 \in \xi_0$. Cela signifie qu'il existe une suite $y_n \in I$ telle que $\|x_0 + y_n\| \to 0$, ou, ce qui revient au même, $-y_n \to x_0$. Comme I est fermé, l'élément x_0 doit appartenir à I, c.-à-d. $\xi_0 = 0$.

Ainsi, $\|\xi\| \geqslant 0$, où l'égalité $\|\xi\| = 0$ a lieu si et seulement si $\xi = 0$.

b) $\|\lambda\xi\| = \inf\limits_{y\in I} \|\lambda x + y\| = |\lambda| \inf\limits_{y\in I} \left\| x + \frac{y}{\lambda}\right\| = |\lambda|\cdot\|\xi\|$

pour $\lambda \neq 0$; pour $\lambda = 0$ l'égalité est évidente.

c) $$\|\xi+\eta\| = \inf_{z\in I} \|x+y+z\| = \inf_{u,\, v\in I} \|x+u+y+v\| \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{u\in I} \|x+u\| + \inf_{v\in I} \|y+v\| = \|\xi\| + \|\eta\|.$$

d) $$\|\xi\eta\| = \inf_{z\in I} \|xy+z\| \leqslant \inf_{u,\, v\in I} \|(x+u)(y+v)\| \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{u\in I} \|x+u\| \cdot \inf_{v\in I} \|y+v\| = \|\xi\|\cdot\|\eta\|.$$

e) $E = e + I$, c.-à-d. $E^2 = e^2 + I = e + I$. Par conséquent, $E^2 = E$, d'où l'on déduit que $\|E\| = \|E^2\| \leqslant \|E\|^2$. Or, l'élément E n'est pas équivalent à zéro, car le voisinage du point e, comme nous avons remarqué plus haut, ne contient pas d'éléments non inversibles qui constituent l'idéal I. Donc, $1 \leqslant \|E\|$. Mais, d'autre part, $\|E\| = \inf\limits_{y\in I} \|e + y\|$, c.-à-d. $\|E\| \leqslant 1$. Par conséquent, $\|E\| = 1$.

2) Démontrons maintenant que X/I est complet. Soit $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ une suite de Cauchy, c'est-à-dire $\|\xi_{n+m} - \xi_n\| < \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$, $m \geqslant 1$. Choisissons $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ et les numéros n_k de façon que $\|\xi_{n_k+m} - \xi_{n_k}\| \leqslant \frac{1}{2^k}$.

On a $\|\xi_{n_2} - \xi_{n_1}\| \leqslant \frac{1}{2}$. Choisissons deux représentants $x_1 \in \xi_{n_1}$ et $x_2 \in \xi_{n_2}$ de façon que $\|x_2 - x_1\| \leqslant 1$.

De manière analogue construisons $x_3, \ldots x_k, \ldots, x_k \in \xi_{n_k}$ de façon que $\|x_k - x_{k-1}\| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$. La suite x_k est une suite de Cauchy dans X. Or, par hypothèse, X est complet. Donc, il existe une limite $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Considérons la classe $\xi_0 = x_0 + I$. On a

$$\|\xi_{n_k} - \xi_0\| = \inf_{y\in I} \|x_k - x_0 + y\| \leqslant \|x_k - x_0\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Par conséquent, $\xi_{n_k} \to \xi_0$, c.-à-d. X/I est un espace complet. Le théorème est démontré.

2. Trois lemmes. Pour la suite nous aurons besoin des trois lemmes suivants se rapportant respectivement à la théorie des ensembles, à l'algèbre et à la topologie.

L e m m e 1. *Tout idéal non trivial I est contenu dans un idéal maximal.*

La démonstration de ce lemme est fondée sur le lemme de Zorn, énoncé à la page 34.

En effet, soit $\mathcal{J}$ l'ensemble de tous les idéaux contenant I. L'ensemble $\mathcal{J}$ est partiellement ordonné par la relation d'inclusion: $I_1 \leqslant I_2$, si $I_1 \subseteq I_2$. Pour tout ensemble totalement ordonné $\{I_\alpha\}$ de $\mathcal{J}$ la réunion $\bigcup_\alpha I_\alpha$ est un idéal non trivial servant de borne supérieure pour $\{I_\alpha\}$. Par conséquent, en vertu du lemme de Zorn, I est suivi d'un élément maximal, c.-à-d. appartient á un idéal maximal.

Corollaire. *Si l'algèbre X n'est pas un corps, elle contient un idéal maximal. De plus, tout élément non inversible, autre que l'élément nul, appartient à un idéal maximal.*

En effet, prenons un élément non inversible quelconque $x_0 \neq 0$ et considérons l'ensemble $x_0 \cdot X$. C'est certainement un idéal. Il contient l'élément x_0 et ne contient pas l'unité e de X, c.-à-d. il n'est pas un idéal trivial. En vertu du lemme 1, cet idéal est contenu dans un idéal maximal.

Lemme 2. *Pour qu'un idéal I soit contenu dans un idéal non trivial $I' \subset X$, il faut et il suffit que l'algèbre X/I possède un idéal non trivial.*

Démontrons que la condition est nécessaire. Soit $I \subset I' \subset X$, $I \neq I'$, $X \neq I'$. Dans la classe $\xi = x + I$ considérons la sous-classe des ξ', pour lesquels $x' \in I'$. Il est aisé de voir qu'on obtient alors un idéal non trivial de X/I. On démontre de manière analogue que la condition est suffisante.

Lemme 3. *La fermeture d'un idéal I est un idéal* (non trivial).

La non-trivialité découle du fait que I est formé uniquement d'éléments singuliers; le reste découle de la continuité des opérations algébriques.

Corollaire. *Tout idéal maximal est fermé.*

§ 4. Théorèmes fondamentaux

Dans ce paragraphe X est une algèbre de Banach commutative avec unité.

1. Fonctionnelles linéaires continues multiplicatives et idéaux maximaux.

Définition 1. Une fonctionnelle linéaire continue f sur l'algèbre de Banach X est dite *multiplicative*, si quels que soient x et y, on a

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y). \tag{1}$$

Nous désignerons l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires continues multiplicatives non triviales par $\mathcal{M}$.

Remarquons qu'une fonctionnelle linéaire continue multiplicative pourrait être définie comme un homomorphisme continu de X dans $\mathbf{C}$.

Si $f \in \mathscr{M}$, on a

$$| f (x) | \leqslant \| x \|, \tag{2}$$

car si pour un certain x_0, tel que $\| x_0 \| = 1$, on a

$$| f (x_0) | = \lambda > 1, \text{ alors } | f (x_0^n) | = \lambda^n \to \infty,$$

c.-à-d. f n'est pas continue, ce qui contredit l'hypothèse.

D'autre part,

$$f (e) = f (e^2) = (f (e))^2,$$

d'où l'on déduit ou bien que $f (e) = 0$, c.-à-d. que f est triviale, ou bien que

$$f (e) = 1. \tag{3}$$

De (2) et (3) il résulte que les fonctionnelles linéaires continues multiplicatives non triviales ont la norme égale à 1, de sorte que $\mathscr{M}$ est un sous-ensemble de la sphère unité de l'espace dual X^*.

Le sous-espace de nullité de la fonctionnelle f (c.-à-d. l'ensemble des $x \in X$ tels que $f (x) = 0$) s'appelle noyau de f et se note Ker f.

Lemme 1. *Si $f \in \mathscr{M}$, le noyau* Ker f *est un idéal maximal.*

En effet, si $y \in I = \text{Ker} f$ et $x \in X$, on a

$$f (y \cdot x) = f (y) \cdot f (x) = 0, \quad \text{c.-à-d.} \quad y \cdot x \in \text{Ker} f.$$

Donc, Ker f est un idéal. Montrons que Ker f est un idéal maximal. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors Ker f peut être élargi de façon à obtenir un idéal $I \neq X$ contenant un élément $x_0 \notin \text{Ker} f$. Or, Ker f est de codimension 1 (cf. chap. III, § 1, n° 6). Donc, l'élément e peut être mis sous la forme

$$e = \lambda x_0 + y$$

avec $y \ni \text{Ker} f$. On en déduit que $e \in I$. Par conséquent, $I = X$. La contradiction ainsi obtenue prouve le lemme.

Lemme 2. *Quel que soit l'idéal maximal M, on peut construire une fonctionnelle linéaire continue multiplicative et une seule $f \in \mathscr{M}$ telle que $M = \text{Ker} f$.*

En effet, d'après le corollaire du lemme 3, § 3, M est un idéal fermé. En appliquant le théorème 1 du § 3, on obtient que X/M est une algèbre de Banach. Mais alors, d'après le lemme 2, § 3, X/M n'a pas d'idéaux non triviaux, c.-à-d. l'algèbre X/M ne contient pas d'éléments singuliers non nuls (cf. corollaire du lemme 1, § 3). Par conséquent, X/M est à la fois corps et algèbre de Banach.

D'après le corolllaire 1 du théorème 1, § 2, le corps X/M est isomorphe à **C**. Cela signifie, par définition, que pour tout $x \in X$ il existe un nombre $f (x) \in \mathbf{C}$, et un seul, tel que

$$x = f (x) \cdot e + u, \quad u \in M. \tag{4}$$

Montrons que f est un homomorphisme. Démontrons, par exemple, que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. On a

$$x = f(x) \cdot e + u, \quad u \in M,$$
$$y = f(y) \cdot e + v, \quad v \in M,$$

d'où

$$xy = f(x) \cdot f(y) \cdot e + w, \quad w \in M.$$

Cela signifie précisément que $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. On démontre de manière analogue les relations

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x).$$

En outre, si $x \in M$, de (4) il résulte que $f(x) = 0$; de même, si $x = e$, on a $f(x) = 1$. Le lemme est démontré.

On voit donc qu'il existe une correspondance biunivoque entre les idéaux maximaux M et les fonctionnelles f de $\mathcal{M}$. Conformément à cette circonstance, convenons de désigner par f_M les fonctionnelles de $\mathcal{M}$ et par M les idéaux maximaux correspondants. Nous allons désigner par la même lettre $\mathcal{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux $\{M\}$ et l'ensemble des fonctionnelles qui leur correspondent $\{f_M\}$.

Soit x un élément de X. Considérons la fonction $x(M)$ sur $\mathcal{M}$, définie par la formule

$$x(M) = f_M(x). \tag{5}$$

(La fonction $x(M)$, construite à partir de l'élément x, fait correspondre à chaque idéal maximal M le nombre $f_M(x)$, c.-à-d. l'image de l'élément x par l'homomorphisme correspondant à l'idéal M.) Nous avons obtenu ainsi une réalisation des éléments de l'algèbre X par des fonctions définies sur l'ensemble $\mathcal{M}$; c'est la réalisation dont il était question à la fin du § 1.

2. Topologie sur l'ensemble $\mathcal{M}$. Théorèmes fondamentaux. Il reste à démontrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ est compact pour une certaine topologie et que les fonctions $x(M)$ sont continues pour la même topologie.

Un peu plus haut nous avons remarqué que $\mathcal{M}$ est un sous-ensemble de la boule unité. D'autre part, au n° 4, § 3, chap. IV, on a démontré pour le cas d'un espace séparable la proposition suivante.

Dans le dual X^* d'un espace de Banach la boule unité est compacte pour la topologie *-faible.

Une démonstration de ce théorème pour le cas général est donnée, par exemple, dans [21].

Rappelons que la topologie *-faible est définie par la famille des voisinages

$$U_{x, \ldots, x_m; \delta}(f_0) = \\ = \{f \in X^* : |f(x_k) - f_0(x_k)| < \delta, \quad k = 1, \ldots, m\}. \tag{6}$$

Nous allons considérer l'ensemble $\mathcal{M}$ par rapport à la topologie *-faible. La compacité de $\mathcal{M}$ découle du résultat formulé ci-desus et du lemme suivant.

Lemme 3. *L'ensemble $\mathcal{M}$ est une partie fermée de la boule unité dans X^* et les fonctions $x(M)$ sont continues sur $\mathcal{M}$.*

En effet, soit f_0 une fonctionnelle appartenant à la fermeture de $\mathcal{M}$. Cela signifie que dans tout voisinage de base de l'application f_0 il existe un homomorphisme f_M engendré par un idéal maximal M. Considérons le voisinage $U_{x, y, x+y, \delta}(f_0)$. En vertu de (6) et de la définition de $x(M)$ on a

$$\left.\begin{aligned} |f_M(x) - f_0(x)| &< \delta, \\ |f_M(y) - f_0(y)| &< \delta, \\ |f_M(x+y) - f_0(x+y)| &< \delta. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Or, f_M est un homomorphisme, c.-à-d. $f_M(x+y) = f_M(x) + f_M(y)$. Par conséquent, de (7) il résulte que

$$f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y).$$

De manière analogue on peut montrer que $f_0(\alpha x) = \alpha f_0(x)$ et $f_0(xy) = f_0(x) \cdot f_0(y)$ (Il faut prendre les voisinages $U_{x, \alpha x, \delta}(f_0)$ et $U_{x, y, xy, \delta}(f_0)$.)

Cela signifie que f est une fonctionnelle linéaire continue multiplicative. Par ailleurs, en prenant le voisinage $U_{e, \delta}(f_0)$, on obtient que $f_0(e) = 1$, c.-à-d. que f_0 est non triviale. Donc, $f_0 \in \mathcal{M}$, c.-à-d. $\mathcal{M}$ est fermé.

Montrons maintenant que la fonction $x_0(M) = f_0(x)$ est continue sur $\mathcal{M}$.

Soit $M_0 \in \mathcal{M}$. Pour $\varepsilon > 0$ donné considérons le voisinage $U_{x_0, \varepsilon}(M_0)$. Si $M \in U_{x_0, \varepsilon}(M_0)$, alors d'après (6) on a

$$|f_M(x_0) - f_{M_0}(x_0)| = |x_0(M) - x_0(M_0)| < \varepsilon.$$

Or, cela signifie que la fonction $x_0(M)$ est continue au point M_0.

Le lemme est démontré.

Théorème 1. *L'application $x \to x(M)$ définit un homomorphisme de l'algèbre X dans l'algèbre $C_{\mathcal{M}}$ des fonctions continues sur l'espace de Hausdorff compact $\mathcal{M}$, constitué par les idéaux maximaux de l'algèbre X; en outre,*

$$\|x(M)\| = \max |x(M)| \leqslant \|x\|. \qquad (8)$$

D'après ce qui précède, il ne reste à démontrer que la relation (8).

Remarquons que d'après la définition de $f_M(x)$, quel que soit M, l'élément $x - f_M(x)e$ appartient à l'idéal M, c.-à-d. est non inversible. Cela signifie que $f_M(x) \in \sigma(x)$. D'autre part, en prenant un nombre arbitraire $\lambda_0 \in \sigma(x)$, on voit que $x - \lambda_0 e$ est non inversible

et appartient donc à un idéal maximal M. Mais alors $0 = f_M(x - \lambda_0 e)$ c.-à-d. $\lambda_0 = f_M(x)$. Ainsi, l'image de $\mathcal{M}$ par l'application $x(M)$ coïncide avec $\sigma(x)$. Par conséquent, en vertu de la partie 2° du théorème 1, § 2, on conclut que l'inégalité (8) est vraie.

Il nous reste à préciser le théorème 1 pour diverses hypothèses concernant l'algèbre X. Introduisons les trois notions suivantes.

Définition 2. L'intersection $R = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ de tous les idéaux maximaux s'appelle *radical* de X. Si $R = \{0\}$, on dit (par abus de langage) que X n'a pas de radical. L'algèbre de Banach X est dite *régulière*, si $\| x^2 \| = \| x \|^2$. Elle est dite *symétrique*, si pour toute fonction $x(M)$ il existe un élément $y \in X$ tel que $y(M) = \overline{x(M)}$. (Le trait ici désigne le complexe conjugué.)

Théorème 2. a) *Si le radical de l'algèbre X ne contient que l'élément nul, l'application $x \to x(M)$ est injective.*

b) *Si l'algèbre X est régulière, alors elle est isométriquement isomorphe à son image dans $C_{\mathcal{M}}$; en particulier, X n'a pas de radical.*

c) *Si l'algèbre X est symétrique, alors son image par l'application $x \to x(M)$ est partout dense dans $C_{\mathcal{M}}$.*

d) *Si l'algèbre X jouit des propriétés* b) *et* c), *elle est isométriquement isomorphe à $C_{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. Démontrons d'abord la dernière affirmation, en supposant que les autres soient vraies. D'après b), la correspondance biunivoque $x \leftrightarrow x(M)$ est une isométrie: $\| x \|_X = \max_{M \in \mathcal{M}} | x(M) |$. D'après c), l'ensemble $\{x(M)\}$ est partout dense dans $C_{\mathcal{M}}$. Or, X est un espace complet. Donc (puisque les normes dans X et dans $C_{\mathcal{M}}$ sont égales), $\{x(M)\}$ est aussi complet, c.-à-d. $\{x(M)\} = C_{\mathcal{M}}$.

Démontrons a). Soit $x_0 \neq 0$ et $x_0(M) \equiv 0$ sur $\mathcal{M}$. Cela signifie que $f_M(x_0) = 0$ pour tous les M, c.-à-d. $x_0 \in \operatorname{Ker} f_M$ pour tous les M et donc, $x_0 \in R$. Or, $R = \{0\}$, d'où $x_0 = 0$. La contradiction obtenue prouve a).

Pour démontrer b), remarquons que l'égalité $\| x^2 \| = \| x \|^2$ implique immédiatement que $\lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{\| x^{2^n} \|} = \| x \|$.

En appliquant le théorème du rayon spectral (théorème 2, § 2), on obtient

$$r(x) = \| x \|. \tag{9}$$

De (9) il résulte tout d'abord que le radical est constitué du seul élément nul, car en admettant que $0 \neq x_0 \in R$, on doit avoir $f_M(x_0) = 0$ pour tous les M, c.-à-d. $\sigma(x) = \{0\}$, ce qui contredit l'hypothèse que $r(x_0) = \| x_0 \| \neq 0$.

D'autre part, de (9) il résulte que l'application $x \leftrightarrow x(M)$ qui représente un isomorphisme de X sur la sous-algèbre correspondante $\{x(M)\}$ de $C_{\mathcal{M}}$ est isométrique, car d'après (8) on a

$$\| x(M) \|_{C_{\mathcal{M}}} = \max_{M \in \mathcal{M}} | x(M) | = r(x) = \| x \|.$$

La démonstration de c) fait appel à l'un des plus remarquables théorèmes de l'algèbre et de l'analyse, appelé théorème de Stone-Weierstrass, dont voici l'énoncé:

Soit C_T l'algèbre de Banach des fonctions continues sur un compact T, et soit A une sous-algèbre de C_T telle que:

1) *L'unité de C_T (c.-à-d. la fonction $e(t) \equiv 1$) appartient à A.*

2) *L'algèbre A sépare les points de T (c.-à-d. quels que soient $t_1 \neq t_2$, il existe une fonction $x(t) \in A$ telle que $x(t_1) \neq x(t_2)$).*

3) *L'algèbre A est stable par rapport à l'application $x(t) \to \overline{x(t)}$* (c.-à-d. $x(t) \in A$ *implique* $\overline{x(t)} \in A$).

Alors A est partout dense dans C_T.

Pour la démonstration du théorème de Stone-Weierstrass voir [13], [21], [26].

Démontrons maintenant c). Soit $A = \{x(M)\}$ l'image de X par l'application $x \to x(M)$.

De (4) il résulte immédiatement que $e \to e(M) \equiv 1$, c.-à-d. que $e(M) = 1 \in A$. Soient M_1 et M_2 deux idéaux maximaux distincts. Cela signifie qu'il existe un élément x_0 appartenant à M_1 et n'appartenant pas à M_2 (ou inversement). Alors

$$x_0(M_1) = f_{M_1}(x_0) = 0, \quad x_0(M_2) = f_{M_2}(x_0) \neq 0,$$

ce qui signifie que A sépare les points de $\mathcal{M}$. Par ailleurs, d'après la définition même, l'algèbre A est stable pour l'application $x(t) \to \overline{x(t)}$. En appliquant le théorème de Stone-Weierstrass, on obtient c).

Le théorème est démontré.

3. Théorème de Wiener ; exercices. La théorie des algèbres de Banach admet des applications très diverses.

Rappelons quelques résultats portant sur l'algèbre et sur l'analyse que nous avons déjà obtenus chemin faisant.

Si une algèbre de Banach sur le corps **C** *est elle-même un corps, alors elle est isométriquement isomorphe à* **C**.

Le spectre de tout opérateur borné non nul dans un espace de Banach est non vide.

Pour tout opérateur borné A dans un espace de Banach X la limite $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} = r(A)$, *existe et le spectre de A est contenu tout entier dans le disque $r(A)$.*

Démontrons maintenant, en utilisant la théorie des algèbres de

Banach commutatives, le théorème suivant, dû à Wiener:

Si une fonction $x(\theta)$ est représentable par une série de Fourier absolument convergente

$$x(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\theta}$$

et ne s'annule nulle part, alors la fonction $y(\theta) = \frac{1}{x(\theta)}$ est aussi représentable par une série de Fourier absolument convergente.

Considérons l'algèbre l_1 des séries absolument convergentes (cf. exercice 4, nº 2, § 1). Cherchons l'espace $\mathcal{M}$ pour l_1. Il est aisé de voir que pour définir un homomorphisme de l_1 dans **C**, il suffit de le définir pour la fonction $x_0(t) = e^{it}$, car alors il s'étend univoquement à l_1. Posons $f_M(x_0) = f_M(e^{it}) = \zeta$. Alors $f_M(x_0^{-1}) = f_M(e^{-it}) = \zeta^{-1}$. D'après (2) on a

$$|\zeta| = |f_M(x_0)| \leqslant \|x_0\| = 1,$$

$$\left|\frac{1}{\zeta}\right| = |f_M(x_0^{-1})| \leqslant \|x_0^{-1}\| = 1,$$

d'où $|\zeta| = 1$, c.-à-d. $\zeta = e^{i\theta}$. Donc, l'ensemble $\mathcal{M}$ se trouve en correspondance biunivoque avec la circonférence $|\zeta| = 1$. Le fait que la fonction $x(\theta) = \sum_k x_k e^{ik\theta}$ ne s'annule nulle part dans l'intervalle $-\pi \leqslant \theta < \pi$ signifie que la suite $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0, \ldots, x_n, \ldots)$ n'appartient à aucun idéal maximal. Donc, d'après le corollaire du lemme 1, § 3, cette suite est inversible dans l'algèbre l_1. Posons $y = x^{-1} = (\ldots, y_{-n}, \ldots, y_0, \ldots, y_n, \ldots)$. Alors

$$y(M) = f_M(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ik\theta} = f_M(x^{-1}) = \frac{1}{f_M(x)} = \frac{1}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\theta}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Deux autres applications importantes de la théorie des algèbres de Banach, à savoir le théorème spectral pour les opérateurs bornés et le théorème de Stone-Čech, seront formulées plus bas sous forme d'exercices (cf. exercices 8 et 9).

E x e r c i c e s. 1. a) Montrer que l'espace des idéaux maximaux de l'algèbre $\mathcal{A}$ (cf. exemple 3, nº 2, § 1) peut être mis en correspondance biunivoque et continue avec les points du disque unité $|z| \leqslant 1$.

b) Montrer que l'algèbre $\mathcal{A}$ est régulière (et, donc, n'a pas de radical), mais n'est pas symétrique.

2. Qu'est-ce qui nous empêche d'affirmer que l'algèbre l_1 (cf. exemple 4, nº 2, § 1) est isométriquement isomorphe à l'espace $C_{\mathcal{M}}$, c.-à-d. à l'espace des fonctions continues sur la circonférence $|\zeta| = 1$.

3. Démontrer qu'on a le théorème:

Soit $x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty$ et $x(z) \neq 0$ pour $|z| \leqslant 1$. Alors la fonction $y(z) = \frac{1}{x(z)}$ est développable en série de Taylor, absolument convergente pour $|z| \leqslant 1$.

4. Désignons par $C^n[a, b]$ l'ensemble des fonctions $x(t)$, n fois continûment dérivables sur le segment $[a, b]$.

(a) Montrer que $C^n[a, b]$ est une algèbre de Banach par rapport aux opérations habituelles et à la norme définie par la formule

$$\| x \| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max_{a \leqslant t \leqslant b} | x^{(k)}(t) |.$$

b) Trouver les idéaux maximaux de $C^n[a, b]$ (cf. [13], pp. 19, 20).

c) Vérifier que $C^n[a, b]$ est une algèbre symétrique sans radical. Quel résultat obtient-on dans ce cas, en appliquant le théorème 2?

5. Soit $CBV[0, 1]$ l'algèbre des fonctions complexes continues à variation bornée sur le segment $[0, 1]$ avec la norme

$$\| x \| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x(t) | + \mathrm{Var}(x, [0, 1]).$$

a) Montrer que $CBV[0, 1]$ est une algèbre de Banach.

b) Trouver les idéaux maximaux de cette algèbre.

6. Donner un exemple d'algèbre de Banach coïncidant avec son radical.

7. Décrire tous les idéaux fermés de l'algèbre $C[a, b]$.

8. Soit T un espace topologique complètement régulier (cf. n° 6, § 5, chap. II). Désignons par B_T l'ensemble de toutes les fonctions complexes bornées, définies sur T, muni des opérations habituelles et de la norme $\| x \| = \sup_{t \in T} | x(t) |$.

a) Vérifier que B_T est une algèbre régulière et symétrique sans radical.

b) Montrer qu'il existe un homéomorphisme (injectif) de T dans l'espace $\mathscr{M}$ des idéaux maximaux de l'algèbre B_T et que l'image de T par cet homéomorphisme est partout dense dans $\mathscr{M}$.

c) Montrer que toute fonction complexe bornée sur l'image de T par cet homéomorphisme admet un prolongement continu unique sur $\mathscr{M}$.

En ajoutant à b) l'affirmation que $\mathscr{M}$ est un compact (cette affirmation résulte immédiatement de a), si l'on applique les théorèmes 1 et 2 du § 4), on obtient le théorème connu de Tikhonov sur l'extension compacte. L'assertion c) est due à Stone et à Čech. Une extension compacte qui jouit de la propriété c) est dite *maximale*. L'assertion

c) signifie donc que $\mathcal{M}$ est une extension compacte maximale (cf. [22]).

9. Soit H un espace de Hilbert. Considérons l'algèbre $\mathcal{L}(H, H)$ et sa sous-algèbre commutative $B(A_0)$, engendrée par un opérateur auto-adjoint A_0 (c.-à-d. la fermeture de l'enveloppe linéaire des puissances de A_0).

a) Montrer que l'algèbre $B(A_0)$ est régulière et n'a pas de radical

b) Montrer que $B(A_0)$ est symétrique et que, de plus,

$$\overline{x(M)} = x^*(M),$$

où x^* est l'adjoint de l'opérateur $x \in B(A_0)$ et $x(M)$ est l'application construite au § 4. A propos de l'assertion b) voir aussi l'exercice 10 c).

En appliquant à l'algèbre $B(A_0)$ le théorème 2, § 4, on obtient le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints (cf. [22], chap. X ; [26], chap. II).

10. Une algèbre de Banach (non nécessairement commutative) est dite *algèbre à involution*, s'il existe une application $X \to X$ jouissant des propriétés suivantes :

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (xy)^* = y^*x^*,$$
$$(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*, \quad (x^*)^* = x.$$

Une algèbre à involution s'appelle *B^*-algèbre*, si elle jouit, en plus, de la propriété $\| xx^* \| = \| x \|^2$.

a) Montrer que l'algèbre $\mathcal{L}(H, H)$ est une B^*-algèbre (cf. [22]).

b) Montrer qu'une B^*-algèbre commutative est régulière (cf. [22]).

c) Montrer que toute B^*-algèbre est symétrique et que, de plus, $\overline{x(M)} = x^*(M)$ (cf. [22], lemme d'Arens).

Les assertions b) et c), adjointes au théorème 2, donnent le résultat suivant, dû à Guelfand et à Naïmark et appelé parfois théorème fondamental de la théorie des algèbres de Banach commutatives :

Une B^*-algèbre commutative est isométriquement isomorphe à l'algèbre $C_{\mathcal{M}}$, l'isomorphisme possédant la propriété $\overline{x(M)} = x^*(M)$.

Ainsi, l'objet algébrique abstrait, décrit au moyen de 24 axiomes (dont 13 axiomes de l'algèbre commutative, 5 axiomes concernant la norme, l'axiome de complétude et 5 axiomes de la B^*-algèbre), peut être réalisé par l'algèbre des fonctions continues sur un espace topologique de Hausdorff compact.

Ceci permet de voir d'un point de vue commun des résultats de nature apparemment différente, tels que le théorème de Wiener sur les séries trigonométriques absolument convergentes, le théorème du développement spectral d'un opérateur auto-adjoint, les théorèmes topologiques de Tikhonov, Stone et Čech et bien d'autres

Bibliographie

1. А в е р б у х В. И., С м о л я н о в О. Г., Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах [Théorie de la différentiation dans les espaces vectoriels topologiques], УМН XXII, вып. 6 (138) (1967), 200-260.
2. А л е к с а н д р о в П. С., Введение в общую теорию множеств и функций [Introduction à la théorie générale des ensembles et des fonctions], Гостехиздат, 1948.
3. А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М., Теория линейных операторов [Théorie des opérateurs linéaires], « Наука », 1966.
4. B a n a c h S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
5. Б е р е з а н с к и й Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов [Décomposition des opérateurs auto-adjoints suivant les fonctions propres], « Наукова думка », Киев, 1965.
6. B o c h n e r S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademie-Verlag, 1932.
7. B o u r b a k i N., Eléments de Mathématique. Livre III. Topologie générale, Hermann, Paris, 1958-1961.
8. B o u r b a k i N., Eléments de Mathématique. Livre I. Théorie des Ensembles, Hermann, Paris, 1954-1956.
9. B o u r b a k i N., Eléments de Mathématique. Livre V. Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Paris, 1953-1955.
10. В и л е н к и н Н. Я. и др., Функциональный анализ [Analyse fonctionnelle] (серия « Справочная математическая библиотека »), « Наука », 1964.
11. W i e n e r N., The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933.
12. P a l e y R., W i e n e r N., Fourier Transforms in the Complex Domain, New York, 1934.
13. Г е л ь ф а н д И. М., Р а й к о в Д. А., Ш и л о в Г. Е., Коммутативные нормированные кольца [Anneaux commutatifs normés], Физматгиз, 1960.
14. G u e l f a n d I. M., C h i l o v G. E., Les distributions. Tome 1, Dunod, Paris, 1962.
15. G u e l f a n d I. M., C h i l o v G. E., Les distributions. Tome 2 : Espaces fondamentaux, Dunod, Paris, 1964.
16. G u e l f a n d I. M., C h i l o v G. E., Les distributions. Tome 3 : Théorie des équations différentielles, Dunod, Paris, 1965.
17. G u e l f a n d I. M., V i l e n k i n N. Y., Les distributions. Tome 4 : Applications de l'analyse harmonique, Dunod, Paris, 1967.
18. Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов [Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints], « Наука », 1965.
19. Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения [La théorie des opérateurs de Volterra dans un espace de Hilbert et ses applications], « Наука », 1967.

20. В у л и х Б. З., Теория полуупорядоченных пространств [Théorie des espaces semi-ordonnés], Физматгиз, 1961.
21. D u n f o r d N., S c h w a r t z J., Linear Operators. General Theory, Interscience, New York, 1958.
22. D u n f o r d N., S c h w a r t z J., Linear Operators. Spectral Theory, Interscience, New York.
23. D a y M. M., Normed Linear Spaces, Berlin, 1958.
24. D i e u d o n n é J., Fondements de l'Analyse Moderne, Gauthier-Villars, Paris 1965.
25. Z y g m u n d A., Trigonometrical series, Warszawa, 1935.
26. Y o s i d a K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1965.
27. К а н т о р о в и ч Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика [Analyse fonctionnelle et mathématiques appliquées], УМН III, вып. 6 (28) (1948), 89-185.
28. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах [Analyse fonctionnelle dans les espaces normés], Физматгиз, 1959.
29. К е л л и Дж. Л., Общая топология, « Наука », 1968.
30. К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Топологические методы в теории нелинейных дифференциальных уравнений [Méthodes topologiques dans la théorie des équations différentielles non linéaires], Гостехиздат, 1956.
31. K u r a t o w s k i K., Topology, vol. I, Varsovie, 1952.
32. L e b e s g u e H., Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, Paris, 1904.
33. L o è v e M., Probability Theory, Princeton, 1960.
34. L o o m i s L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand, New York, 1953.
35. М и х л и н С. Г., Лекции по интегральным уравнениям [Leçons sur les équations intégrales], Физматгиз, 1959.
36. M a u r i n K., Methods of Hilbert spaces, Warszawa, 1967.
37. N a i m a r k M., Normed rings, P. Nordhoff, Groningen, 1959.
38. Н а й м а р к М. А., Линейные дифференциальные операторы [Opérateurs linéaires différentiels], изд. 2, « Наука », 1959.
39. Н а т а н с о н И. П., Теория функций вещественной переменной [Théorie des fonctions d'une variable réelle], изд. 2, Гостехиздат, 1957.
40. П л е с н е р А. И., Спектральная теория линейных операторов [Théorie spectrale des opérateurs linéaires], « Наука », 1965.
41. R i e s z F., N a d y B. S., Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest, 1952.
42. R o b e r t s o n A., R o b e r t s o n W., Topological vector spaces, Cambridge University Press, 1964.
43. R u d i n W., Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York-San Francisco-Toronto-London, 1964.
44. S a c k s S., Theory of the integral, Hafner, New York, 1937.
45. T i t c h m a r s h E., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Clarendon Press, Oxford, 1937.
46. T r i c o m i F., Integral Equations, New York, 1957.
47. F r a e n k e l A., B a r-H i l l e l Y., Foundations of Set theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.
48. H a l m o s P. R., Measury theory, Van Nostrand, Princeton, 1950.
49. H a l m o s P., Finite Dimensional Vector Spaces, K. Van Nostrand, New York, 1958.
50. H a l m o s P., Lectures on Ergodic Theory, Chicago, 1956.
51. H i l l e E., P h i l l i p s R., Functional Analysis and Semi-groups, Providence, 1957.

52. Ш и л о в Г. Е., Математический анализ [Analyse mathématique]. Второй специальный курс, Физматгиз, 1965.
53. Ш и л о в Г. Е., Г у р е в и ч Б. Л., Интеграл, мера и производная. Общая теория [Intégrale, mesure et dérivée. Théorie générale], « Наука », 1967.
54. Ш и л о в Г. Е., Ф а н Д ы к Т и н ь, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах [Intégrale, mesure et dérivée dans les espaces vectoriels], « Наука », 1967.
55. E d w a r d s R., Functional Analysis. Theory and Applications, New York, 1965.
56. S c h w a r t z L., Théorie des distributions, I, II, Act. Sci. Ind., 1091, 1122, Paris, 1951.
57. F r a e n k e l A., Abstract Set Theory, Amsterdam, 1953.

Répartition de la bibliographie par chapitres

Chapitre I. 2; 8; 47; 56.
Chapitre II. 2; 4; 7; 24; 29; 31.
Chapitre III. 4; 9; 10; 13; 15; 17; 20; 21; 23; 26; 27; 28; 34; 36; 37; 41; 42; 49; 51; 55.
Chapitre IV. 3-5; 13-19; 21-23; 26; 34; 36-38; 40; 52; 57.
Chapitre V. 12; 21; 32; 33; 39; 41; 44; 48; 50; 53; 54.
Chapitre VI. 21; 28.
Chapitre VII. 32; 39; 41; 44; 53.
Chapitre VIII. 6; 11; 12; 14-17; 25; 52.
Chapitre IX. 35; 46.
Chapitre X. 1; 24; 28; 30; 43; 51.
Complément. 13; 21; 22; 26.

INDEX ALPHABÉTIQUE

Table des matières

